

GHEORGHE
MIHOC

VIRGIL
CRAIU

TRATAT
DE
STATISTICĂ
MATEMATICĂ

VOLUMUL II

VERIFICAREA
IPOTEZELOR
STATISTICE

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

GHEORGHE MIHOC ♦ VIRGIL CRAIU

TRATAT de STATISTICĂ MATEMATICĂ

Volumul II

VERIFICAREA IPOTEZELOR STATISTICE

P R E F A Ț Ă

Acest al doilea volum face parte dintr-o lucrare concepută în mai multe volume dintre care primul a apărut la începutul anului 1976. Scopul cărții (în capitole numerotate de la 13 la 20 în continuarea celor din volumul I) este prezentarea teoriei matematice a verificării ipotezelor statistice. Astfel se cercetează condițiile de existență pentru testele : cel mai puternic, maximin, uniform cel mai puternic, cel mai stingent și invariant. Se prezintă diferite tipuri de eficiențe și se stabilește comportarea lor asimptotică.

Aparatul matematic necesar pentru o tratare sistematică a verificării ipotezelor este teoria măsurii în spații abstracte : spațiu măsurabil, măsuri finite ; măsuri σ -finite, mulțimi măsurabile Lebesgue, funcții simple, funcții integrabile, derivata Radon-Nikodym, teorema lui Fubini, statisticile ca transformări măsurabile de la un spațiu la alt spațiu, măsuri probabilistice, măsuri probabilistice dominate de alte măsuri, distanța în mulțimea tuturor măsurilor probabilistice, măsuri probabilistice invariante în raport cu un grup arbitrar, convergența măsurilor, repartiții probabilistice condiționate. Totuși o mare parte a lucrării poate fi citită fără o cunoaștere a teoriei măsurii dacă simbolul $\int p(x) d\mu(x)$

este interpretat fie ca $\int p(x) dx$ fie ca $\sum p(x)$ și dacă literele a.p.t.

(aproape peste tot) sînt ignorate. De asemenea sînt necesare elemente de calcul matricial (funcții de matrici) și de funcții complexe (funcții analitice).

În continuarea acestui volum vom prezenta analiza secvențială și analiza dispersională, corelația și regresia, seriile dinamice, teoria deciziilor și analiza Bayesiană.

Acest volum poate folosi cercetătorilor, cadrelor didactice și studenților precum și acelor care aplică metodele statisticii în domeniul lor de activitate.

Februarie 1976

AUTORII

CUPRINS

Capitolul XIII

VERIFICAREA IPOTEZELOR STATISTICE

§ 1.	Introducere. Definiții.	15
§ 2.	Cel mai puternic (C.M.P.) test.	17
2.1.	Formularea problemei.	17
2.2.	Lema Neyman—Pearson.	21
2.3.	Proprietăți ale funcției de putere a C.M.P. test pentru verificarea ipotezei simple nule P_0 față de alternativa simplă P_1	25
2.4.	Teste maximin.	29
§ 3.	Repartiții cu raportul de verosimilități monoton și teste uniform cel mai puternice (U.C.M.P.).	37
3.1.	Teste U.C.M.P.	37
3.2.	Proprietăți ale repartițiilor cu raportul de verosimilități monoton.	40
3.3.	Generalizarea lemei lui Neyman-Pearson.	42
3.4.	Teste U.C.M.P. pentru ipoteze bilaterale.	44
§ 4.	Nedepasare	48
4.1.	Definiții. Punerea problemei.	48
4.2.	Teste local cel mai puternice (L.C.M.P.)	49
4.3.	Familii exponențiale cu un parametru.	56
4.4.	Similaritate.	60
4.5.	Teste U.C.M.P. nedepasate pentru familii exponențiale cu mai mulți parametri	62
§ 5.	Cele mai stringente teste. Teste invariante.	68
5.1.	Cele mai stringente teste.	68
5.2.	Principiu de invarianță.	69
5.3.	Legătura dintre cele mai stringente teste și principiul de invarianță.	71
§ 6.	Șir consistent de teste.	75
§ 7.	Eficiența estimatorilor și a testelor.	78
7.1.	Eficiența în sensul lui Pitman. Estimator asimptotic eficient.	78
7.2.	Eficiența în sensul lui Hodges și Lehmann.	84
7.3.	Eficiența în sensul lui Bahadur	87
7.4.	Compararea eficiențelor.	93
§ 8.	Relația dintre intervalele de încredere și verificarea ipotezelor statistice.	97
	Probleme	100

Capitolul XIV

TESTUL RAPORTULUI DE VEROSIMILITĂȚI

§ 1.	Introducere.	103
§ 2.	Definiția testului.	103
§ 3.	Repartiția asimptotică a raportului de verosimilități pentru selecții mari	107
§ 4.	Consistența testului raportului de verosimilități.	114

§ 5.	Puterea asimptotică a testului raportului de verosimilități.	116
§ 6.	Testul raportului de verosimilități și folosirea ipotezelor intermediare.	120

Capitolul XV

TESTUL X^2 . TABELE DE CONTINGENȚĂ

§ 1.	Definirea testului de concordanță.	130
§ 2.	Statistica X^2 și repartiția sa asimptotică.	130
§ 3.	X^2 — test al ipotezei simple.	135
§ 4.	Testul X^2 și testul raportului de verosimilități pentru ipoteza simplă H_0	136
§ 5.	Testul X^2 în cazul în care H_0 este o ipoteză compusă.	137
§ 6.	Alegerea claselor pentru testul X^2	143
§ 7.	Momentele statisticii X^2	144
§ 8.	Consistența testului X^2	145
§ 9.	Nedeplasarea testului X^2	145
§ 10.	Teste de independență în tabele 2×2 pentru selecții de volum mare.	147
§ 11.	Teste de independență exacte în tabele 2×2	150
11.1.	Frecvențele marginale fixate. Testul lui Fisher.	150
11.2.	O frecvență marginală fixată; omogenitate.	152
11.3.	Nici o frecvență marginală fixată.	153
§ 12.	Test optim exact pentru tabele 2×2	154
§ 13.	Testul lui Mc. Nemar.	154
§ 14.	Corecția de continuitate.	155
14.1.	Introducere.	155
14.2.	Aproximația lui Packett (1964) și aplicarea sa la studiul performanței corecției de continuitate în tabele 2×2	156
14.3.	Corecția de continuitate obținută prin standardizarea statisticilor prin estimatori consistenti ai dispersiei.	160
§ 15.	Tabele $r \times c$. Teste de independență.	163
§ 16.	Teste de omogenitate. Tabele $2 \times c$	166
16.1.	Testul de dispersie binomial.	166
16.2.	Testul de dispersie al repartiției Poisson.	167
§ 17.	Tabele de contingență $I \times J \times K$	167
17.1.	Definiții.	167
17.2.	Descompunerea statisticii X^2	169
17.3.	Descompunerea statisticii X^2	170

Capitolul XVI

TESTE PRIVIND PARAMETRII REPARTIȚIEI NORMALE

§ 1.	Statistici independente de o statistică suficientă.	172
§ 2.	Teste unilaterale și bilaterale privind media populației normale de dispersie cunoscută.	175
§ 3.	Teste privind diferența mediilor a două populații normale cu dispersii egale.	177
§ 4.	Testul lui Tukey pentru egalitatea mediilor.	179
4.1.	Definirea testului.	179
4.2.	Puterea testului.	180
§ 5.	Compararea unor teste privind egalitatea mediilor când dispersiile sînt eterogene în cazul selecțiilor mici.	183
§ 6.	Teste pentru egalitatea mediilor a două populații în ipoteza că coeficienții de variație sînt omogeni.	189
§ 7.	O generalizare a problemei Behrens-Fisher.	191
§ 8.	Teste unilaterale privind dispersia populației normale.	193
§ 9.	Compararea a două dispersii.	195

§ 10.	Testul lui Hartley pentru egalitatea dispersiilor.	197
10.1.	Definirea testului.	197
10.2.	Puterea testului	198
§ 11.	Nedeplasarea testelor pentru egalitatea dispersiilor.	200
§ 12.	Egalitatea a două sau mai multe dispersii față de alternative oarecare.	202
12.1.	Definirea testului.	202
12.2.	Proprietăți ale testului propus.	203
12.3.	Intervale de încredere simultane pentru σ_i^2/σ_0^2 ($i = 1, 2, \dots, k$).	205
§ 13.	Testul lui Lehmann.	205
13.1.	Definirea testului.	206
13.2.	Puterea testului.	206
13.3.	Repartiția limită a statisticii L .	207
§ 14.	Testul lui Bartlett.	209
14.1.	Definirea testului.	209
14.2.	Repartiția limită a statisticii M .	210
§ 15.	Procedee pentru verificarea ipotezei existenței unei relații liniare între dispersii	211
15.1.	Introducere.	211
15.2.	Definirea testului.	211
15.3.	Volumul și funcția de putere a testului.	212
15.4.	Proprietăți optime ale testului pentru $\alpha \leq 0,05$.	212
15.5.	Alte ipoteze alternative.	214
15.6.	Generalizări.	216
§ 16.	Teste privind media repartiției log-normală cu dispersia cunoscută.	217
16.1.	Considerații preliminare.	217
16.2.	Procedee pentru verificarea ipotezei H_0 .	218
16.3.	Proprietăți asimptotice ale testelor pentru valori mari ale ipotezei nule.	225
§ 17.	Un test privind egalitatea mediilor a 2 populații log-normale în cazul coeficienților de dispersie omogeni.	228

Capitolul XVII

STUDIUL ANALITIC AL PROBLEMEI BEHRENS-FISHER

§ 1.	Introducere.	231
§ 2.	Proprietăți ale testelor omogene similare pentru problema Behrens-Fisher.	231
2.1.	Definiții.	231
2.2.	Repartiția vectorului $(\xi, \eta) = \left(\frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_2}, \frac{s_1}{s_2} \right)$ $n_1 \geq 2, n_2 \geq 2$.	232
2.3.	Axiomele lui Wald privind testele omogene.	234
2.4.	Testul Fisher-Welch-Wald.	236
2.5.	Proprietatea de regularitate zero.	240
§ 3.	Construcția testului omogen similar nealeator pentru problema Behrens-Fisher.	250
§ 4.	Proprietăți optime ale testului lui Welch.	254

Capitolul XVIII

TESTE PRIVIND PARAMETRII VECTORILOR NORMALI

§ 1.	Testul T^2 .	257
1.1.	Definirea testului.	257
1.2.	Regiuni de încredere pentru vectorul medie.	260
1.3.	Problema celor 2 selecții.	260
1.4.	Problema celor q selecții.	261
1.5.	Problema simetriei.	262

1.6.	Puterea testului.	262
1.7.	Proprietăți optime ale testului T^2	263
§ 2.	Testul raportului de verosimilități pentru ipoteze asupra vectorilor valori medie.	267
2.1.	Repartiția statisticii U	267
2.2.	Verificarea ipotezei privind egalitatea mediilor mai multor vectori normali care au aceeași matrice de covarianțe.	271
2.3.	Verificarea ipotezei privind egalitatea mediilor mai multor vectori normali cind matricele de covarianțe nu sînt egale.	274
§ 3.	Testul raportului de verosimilități pentru ipoteze asupra matricelor de covarianțe.	278
3.1.	Testul raportului de verosimilități pentru verificarea ipotezei conform căreia matricea de covarianțe este egală cu o matrice dată.	278
3.2.	Test pentru sfericitate	289
§ 4.	Testul raportului de verosimilități pentru verificarea ipotezei $\Sigma = \Sigma_0$ și $\mu = \mu_0$	300
§ 5.	Testul raportului de verosimilități pentru verificarea ipotezei $\Sigma_1 = \Sigma_2$	305
§ 6.	Verificarea ipotezei privind egalitatea a k matrici de covarianțe	308
§ 7.	Verificarea ipotezei privind identitatea a k repartiții normale.	310

Capitolul XIX

TESTELE WALD-WOLFOWITZ, WILCOXON-MANN-WHITNEY ȘI X

§ 1.	Repartiții în teoria iterațiilor și caracteristici ale acestora.	312
§ 2.	Testul Wald-Wolfowitz.	318
§ 3.	Testul Wilcoxon-Mann-Whitney.	321
3.1.	Definirea statisticii U a lui Mann-Whitney.	321
3.1.1.	Repartiția statisticii U cînd $F_1 = F_2$	321
3.1.2.	Repartiția statisticii U în alternativa Lehmann generalizată.	322
3.2.	Caracteristici ale statisticii U	324
3.3.	Repartiția asimptotică a statisticii U pentru $n_2 \rightarrow \infty$	327
3.4.	Statistica T și cîteva din proprietățile sale	330
3.5.	Puterea testului Wilcoxon-Mann-Whitney	332
3.6.	Compararea puterii testelor Wilcoxon și Student.	336
§ 4.	Testul X	342
4.1.	Definirea testului	342
4.2.	Valoarea medie și dispersia lui X	344
4.3.	Repartiția limită a statisticii X	345
4.4.	Testul X în cazul în care anumiți x_{1i} și x_{2j} pot fi egali.	345
4.5.	Comparația cu testul Student.	346

Capitolul XX

TESTE DE TIP KOLMOGOROV ȘI SMIRNOV

§ 1.	Procese aleatoare.	348
1.1.	Funcții aleatoare separabile.	348
1.2.	Funcții aleatoare continue.	351
1.3.	Procese browniene.	357
§ 2.	Teoreme de limită pentru procese aleatoare.	362
2.1.	Convergența slabă a repartițiilor într-un spațiu metric.	362
2.2.	Spațiul funcțiilor fără discontinuități de spețe a doua.	370
§ 3.	Teoreme de tip Kolmogorov și Smirnov.	379
§ 4.	Teste de tip Kolmogorov și Smirnov.	388
4.1.	Definirea testelor.	388
4.2.	Puterea testului Kolmogorov.	390
4.3.	Consistența testului Kolmogorov	397
	Bibliografie.	399

CONTENTS

Chapter XIII TESTING STATISTICAL HYPOTHESES

§ 1.	Introduction. Definitions.	15
§ 2.	The most powerful test.	17
2.1.	Stating the problem.	17
2.2.	The Neyman-Pearson lemma.	21
2.3.	Properties of the power function of a most powerful test of a simple null hypothesis P_0 against a simple alternative P_1	25
2.4.	Maximin tests.	29
§ 3.	Distributions with monotone likelihood ratio and uniformly most powerful tests.	37
3.1.	Uniformly most powerful tests.	37
3.2.	Properties of the distributions with monotone likelihood ratio.	40
3.3.	A generalization of the Neyman-Pearson lemma	42
3.4.	Uniformly most powerful test for two-sided hypotheses	44
§ 4.	Unbiasedness.	48
4.1.	Definitions. Stating the problem.	48
4.2.	Locally most powerful tests.	49
4.3.	One-parameter exponential families.	56
4.4.	Similarity.	60
4.5.	Uniformly most powerful tests for multiparameter exponential families.	62
§ 5.	Most stringent tests and invariant tests.	68
5.1.	Most stringent tests.	68
5.2.	The invariance principle.	69
5.3.	The connection between most stringent tests and the invariance principle	71
§ 6.	Consistent sequence of tests.	75
§ 7.	The efficiency of estimators and of tests.	78
7.1.	Pitman efficiency. The asymptotic efficient estimator.	78
7.2.	Hodges and Lehmann efficiency.	84
7.3.	Bahadur efficiency.	87
7.4.	Comparison of efficiencies.	93
§ 8.	The connection between tests of hypotheses and confidence intervals.	97
	Problems.	100

Chapter XIV THE LIKELIHOOD RATIO TEST

§ 1.	Introduction.	103
§ 2.	Definition of the test.	103
§ 3.	Asymptotic distribution of likelihood ratio in large samples.	107
§ 4.	Consistency of likelihood ratio test.	114
§ 5.	Asymptotic power of likelihood ratio test.	116
§ 6.	The likelihood ratio test and the use of intermediary hypotheses.	120

Chapter XV

THE X^2 TEST. THE CONTINGENCY TABLES

§ 1.	Test of fit. Definition.	130
§ 2.	The X^2 statistic and their asymptotic distribution.	130
§ 3.	The X^2 test of the simple hypothesis.	135
§ 4.	The X^2 test and likelihood ratio test of the simple hypothesis.	136
§ 5.	The X^2 test for testing a composite hypothesis.	137
§ 6.	The choice of classes for the X^2 test.	143
§ 7.	The moments of the X^2 test statistic.	144
§ 8.	Consistency of the X^2 test.	145
§ 9.	Unbiasedness of the X^2 test.	145
§ 10.	Large-sample tests of independence in a 2×2 table.	147
§ 11.	Exact test of independence in a 2×2 table.	150
11.1	Both margins fixed. Fisher's test.	150
11.2.	One margin fixed: homogeneity.	152
11.3.	No margin fixed.	153
§ 12.	The optimum exact test for 2×2 tables.	154
§ 13.	Mc. Nemar's test.	154
§ 14.	The continuity correction.	155
14.1.	Introduction.	155
14.2.	Plackett's approximation and their application to study the overall performance of X^2 corrected for continuity for 2×2 tables.	156
14.3.	The continuity correction obtained from standardized of statistics by consistent variance estimators.	160
§ 15.	$r \times c$ tables. The test of independence.	163
§ 16.	The test of the homogeneity. $2 \times c$ tables.	166
16.1.	The binomial dispersion test.	166
16.2.	The Poisson dispersion test.	167
§ 17.	$I \times J \times K$ contingency tables.	167
17.1.	Definitions.	167
17.2.	Partition of X^2 statistic.	169
17.3.	Partition of X^2 statistic.	170

Chapter XVI

TESTS CONCERNING THE PARAMETERS OF A NORMAL DISTRIBUTION

§ 1.	Statistics independent of a sufficient statistic.	172
§ 2.	One and two-sided tests concerning the mean of a normal distribution with known variance.	175
§ 3.	Tests concerning difference between the means of two-normal distributions with equal variances.	177
§ 4.	Tukey's test for equality of means.	179
4.1.	Definition of the test.	179
4.2.	The power of the test.	180
§ 5.	Comparison of some tests concerning equality of means for small samples when the variances are heterogeneous.	183
§ 6.	Tests for equality of means of two distributions when the dispersion coefficients are homogeneous.	189
§ 7.	On a generalization of the Behrens-Fisher problem.	191
§ 8.	One-sided tests concerning the variance of a normal distribution.	193
§ 9.	Comparing the variances of two distributions.	195
§ 10.	Hartley's test for equality of the variances.	197

10.1. Definition of the test.	197
10.2. The power of the test.	198
§ 11. Unbiasedness of the tests concerning equality of variances.	200
§ 12. Equality of two or several variances against arbitrary alternatives.	202
12.1. Definition of the test.	202
12.2. Properties of the test.	203
12.3. Simultaneous confidence intervals for σ_i^2/σ_0^2 ($i = 1, 2, \dots, k$).	205
§ 13. Lehmann's test.	205
13.1. Definition of the test.	206
13.2. The power of the test.	206
13.3. Limiting distribution of L -statistic.	207
§ 14. Bartlett's test.	209
14.1. Definition of the test.	209
14.2. Limiting distribution of M -statistic.	210
§ 15. Procedures for testing a linear relation among variances.	211
15.1. Introduction.	211
15.2. Definition of the test.	211
15.3. The size and power function of the test.	212
15.4. Optimum properties of the test for $\alpha \leq 0,05$	212
15.5. Other alternative hypotheses.	214
15.6. Generalizations.	216
§ 16. Tests concerning the mean of log-normal distribution with known variance.	217
16.1. Preliminary remarks.	217
16.2. Procedures for testing hypothesis H_0	218
16.3. Asymptotic properties of the tests for large values specified of the null hypothesis.	225
§ 17. Test concerning equality of means of two log-normal distribution for homogeneous dispersion coefficients.	228

Chapter XVII

ANALYTICAL STUDY OF BEHRENS-FISHER PROBLEM

§ 1. Introduction	231
§ 2. The properties of homogeneous similar tests for the Behrens-Fisher problem	231
2.1. Definitions	231
2.2. Distribution of vector $(\xi, \eta) = \left(\frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_2}, \frac{s_1}{s_2} \right)$, $n_1 \geq 2, n_2 \geq 2$	232
2.3. Wald's axioms concerning the homogeneous tests	234
2.4. Fisher-Welch-Wald's test	236
2.5. Zero-regularity property	240
§ 3. Construction of homogeneous similar non randomized tests for Behrens-Fisher problem.	250
§ 4. The optimum properties of Welch's test	254

Chapter XVIII

TESTS CONCERNING THE PARAMETERS OF NORMAL VECTORS

§ 1. The T^2 test.	257
1.1. Definition of the test.	257
1.2. Confidence regions for mean vector.	260
1.3. The problem of two samples.	260
1.4. The problem of q samples.	261
1.5. The problem of symmetry.	262
1.6. The power of the test.	262

1.7.	Optimum properties of the T^2 test.	263
§ 2.	The likelihood ratio test for hypotheses concerning means of normal vectors.	267
2.1.	Distribution of U statistic.	267
2.2.	Testing the hypothesis concerning equality of the means of several normal vectors with equal covariance matrix.	271
2.3.	Testing the hypothesis concerning equality of the means of several normal vectors when covariance matrices are not equal.	274
§ 3.	The likelihood ratio test for hypothesis concerning covariance matrices	278
3.1.	The likelihood ratio test for testing the hypothesis concerning the equality between covariance matrix and a given matrix.	278
3.2.	The sphericity test.	289
§ 4.	The likelihood ratio test for testing the hypothesis $\Sigma = \Sigma_0$ and $\mu = \mu_0$	300
§ 5.	The likelihood ratio test for testing the hypothesis $\Sigma_1 = \Sigma_2$	305
§ 6.	Testing the hypothesis concerning equality of k covariance matrices	308
§ 7.	Testing the hypothesis concerning identity of k normal distributions	310

Chapter XIX

THE WALD-WOLFOWITZ, WILCOXON-MANN-WHITNEY AND X TESTS

§ 1.	Distributions in the theory of runs and their characteristics.	312
§ 2.	The Wald-Wolfowitz test.	318
§ 3.	The Wilcoxon-Mann-Whitney test.	321
3.1.	Definition of the U statistic of Mann-Whitney.	321
3.1.1.	Distribution of the U statistic when $F_1 = F_2$	321
3.1.2.	Distribution of the U statistic under generalized Lehmann alternative.	322
3.2.	Characteristics of the U statistic.	324
3.3.	Asymptotic distribution of the U statistic for $n_2 \rightarrow \infty$	327
3.4.	The T statistic and some of their properties.	330
3.5.	The power of Wilcoxon-Mann-Whitney-test.	332
3.6.	Comparison of the power of Wilcoxon and Student tests.	336
§ 4.	The X test.	342
4.1.	Definition of the test.	342
4.2.	Mean and variance of X	344
4.3.	Asymptotic distribution of X statistic.	345
4.4.	The X test when same x_{i1} and x_{2j} are equal	345
4.5.	Comparison of X and Student tests.	346

Chapter XX

TESTS OF THE KOMOGOROV AND SMIRNOV TYPE

§ 1.	Random processes.	348
1.1.	Separable random functions.	348
1.2.	Continuous random functions.	351
1.3.	Brownian processes.	357
§ 2.	Limit theorems for random processes.	362
2.1.	Weak convergence of the distributions in metric space.	362
2.2.	Space of functions without discontinuities of the second kind	370
§ 3.	Theorems of the Kolmogorov and Smirnov type	379
§ 4.	Tests of the Kolmogorov and Smirnov type	388
4.1.	Definition of the tests.	388
4.2.	The power of Kolmogorov test.	390
4.3.	The consistency of Kolmogorov test	397
	<i>Bibliography</i>	399

VERIFICAREA IPOTEZELOR STATISTICE

§ 1. Introducere. Definiții

Fie $(R, \mathcal{S})$ un spațiu măsurabil și Ω o mulțime ce conține cel puțin două elemente. Fie P_θ o măsură probabilistică pe $(R, \mathcal{S})$ ce corespunde unic la $\theta \in \Omega$.

Mulțimea tuturor P_θ cu $\theta \in \Omega$ se va nota P_Ω și θ va fi numit parametrul acestei mulțimi de repartiții probabilistice. Ω poartă numele de spațiu parametrilor și P_Ω de mulțimea măsurilor probabilistice pe $(R, \mathcal{S})$ corespunzătoare spațiului Ω .

Punctele din R sînt reprezentările matematice ale observațiilor posibile; P_Ω reprezintă descrierile posibile ale variabilității în situațiile observabile considerate.

Cînd sîntem într-o situație reală în care se pot face observații și care sînt descrise de un model probabilistic, o ipoteză este o presupunere privind structura probabilistică ce descrie variabilitatea în situațiile observabile.

DEFINIȚIA 1. O ipoteză este o presupunere care implică că repartiția probabilistică adevărată ce descrie variabilitatea observată aparține la o submulțime proprie a repartițiilor probabilistice posibile.

Sau

DEFINIȚIA 1'. O ipoteză implică că parametrul adevărat θ aparține la o submulțime proprie a spațiului parametrilor Ω și se obișnuiește să se identifice o ipoteză cu o submulțime.

Teoria ipotezelor statistice se ocupă de problema :

O observație dată este sau nu compatibilă cu o ipoteză?

DEFINIȚIA 2. Un test statistic pentru verificarea unei ipoteze este o regulă care asociază fiecărei observații posibile una dintre următoarele două categorii :

- în concordanță cu ipoteza considerată
- nu este în concordanță cu ipoteza considerată

În termenii modelului matematic :

O ipoteză definește o submulțime Ω_0 a spațiului parametrilor Ω ; un test statistic împarte spațiul de selecție R în două submulțimi : o mulțime ale cărei puncte sînt în concordanță cu Ω_0 și complementara sa ale cărei puncte nu sînt în concordanță cu Ω_0 . Există mai multe teste pentru o ipoteză dată și se pune problema de a alege dintre acestea unul care să fie „bun” într-un anumit sens.

Un test pentru verificarea ipotezei Ω_0 pe care o vom numi ipoteza nulă și o vom nota prin $H_0: \theta \in \Omega_0$ față de ipoteza $\Omega - \Omega_0$ pe care o vom numi ipoteza alternativă și o vom nota prin $H_1: \theta \in \Omega - \Omega_0$ împarte spațiul de selecție într-o regiune de acceptare corespunzătoare lui Ω_0 și complementara sa, o regiune de respingere a lui Ω_0 (de acceptare a lui $\Omega - \Omega_0$) numită *regiune critică*. Găsirea unui test bun poate fi interpretată ca alegerea unei regiuni critice care este optimă relativ la un anumit criteriu.

Oricărui test statistic îi sînt asociate două erori.

i) Putem respinge ipoteza nulă cînd este adevărată, adică cînd valoarea adevărată a parametrului aparține mulțimii Ω_0 . Această eroare poartă numele de *eroare de ordinul I*.

ii) Putem accepta ipoteza nulă cînd este falsă, adică cînd valoarea adevărată a parametrului aparține mulțimii $\Omega - \Omega_0$. Această eroare poartă numele de *eroarea de ordinul II*.

Atunci fiecărui test i se asociază două funcții care descriu probabilitățile erorilor asociate cu acest test; acestea sînt definite după cum urmează:

Fie $W(\bar{W})$ regiune critică (de acceptare) a testului; o regiune a spațiului de selecție.

Funcția α este definită pe Ω_0 prin

$$(1) \quad \alpha(\theta) = P_\theta(W) = P(\mathbf{x} \in W | \theta \in \Omega_0)$$

și această funcție descrie probabilitatea erorii de ordinul I.

Funcția β definită pe $\Omega - \Omega_0$ prin

$$(2) \quad \begin{aligned} \beta(\theta) &= P_\theta(\bar{W}) = P(\mathbf{x} \in \bar{W} | \theta \in \Omega - \Omega_0) = \\ &= 1 - P(\mathbf{x} \in W | \theta \in \Omega - \Omega_0) = 1 - P_\theta(W) \end{aligned}$$

descrie probabilitatea erorii de ordinul II.

DEFINIȚIA 3. Funcția

$$(3) \quad \pi(\theta) = 1 - \beta(\theta)$$

poartă numele de funcția de putere a testului.

Este de preferat un test pentru care probabilitățile erorilor sînt cît mai mici posibil. Totuși nu putem alege W în așa fel încît $\alpha(\theta)$ și $\beta(\theta)$ să fie simultan minimizate uniform, cu excepția unor cazuri speciale. Luînd $W = \Phi$, putem face $\alpha(\theta) \equiv 0$ și luînd $W = R$ putem face $\beta(\theta) \equiv 0$. Deci un test care minimizează uniform cele două probabilități ale erorilor va cere ca aceste probabilități să fie zero și în mod obișnuit un astfel de test nu există. Deoarece în multe situații este mai importantă eroarea de ordinul I decît eroarea de ordinul II, vom controla probabilitatea erorii de ordinul I la o valoare α prestabilită mică și vom căuta acele teste care minimizează uniform probabilitatea erorii de ordinul II.

Un astfel de test poartă numele de *cel mai puternic (C.M.P.) test*.

Cu alte cuvinte ne vom limita la testele care satisfac condiția

$$\alpha(\theta) \leq \alpha \text{ pentru toți } \theta \in \Omega_0$$

și dintre acestea îl vom alege pe acela (dacă există) pentru care $\beta(\theta)$ este minimizată uniform pe $\Omega - \Omega_0$, sau echivalent pentru care $\pi(\theta) = 1 - \beta(\theta)$ este maximizată uniform pe $\Omega - \Omega_0$.

DEFINIȚIA 4. Dacă un test satisface condiția

$$(4) \quad \alpha(\theta) \leq \alpha \text{ pentru toți } \theta \in \Omega_0,$$

α este numit pragul de semnificație al testului.

DEFINIȚIA 5. Cantitatea

$$(5) \quad \sup_{\theta \in \Omega_0} \alpha(\theta)$$

poartă numele de volumul testului.

§ 2. Cel mai puternic (C.M.P.) test

2.1. Formularea problemei

Vom presupune că Ω are numai două elemente θ_0 și θ_1 și că

$$\Omega_0 = \{\theta_0\}, \quad \Omega - \Omega_0 = \{\theta_1\}.$$

DEFINIȚIA 6. O ipoteză care specifică o mulțime în spațiul parametrilor care conține numai un element poartă numele de ipoteză simplă.

Astfel în terminologia statistică avem de verificat ipoteza nulă $H_0: \theta = \theta_0$ față de ipoteza alternativă simplă $H_1: \theta = \theta_1$, o problemă de interes practic limitat dar avînd un conținut analitic deosebit. În acest caz, funcția de putere a oricărui test se reduce la un singur număr și examinăm problema existenței C.M.P. test la pragul de semnificație α dat.

TEOREMA 1. Dacă punctul $x = (x_1, \dots, x_n)$, în spațiul de selecție, este un vector aleator de tip continuu cu densitatea $f(x, \theta)$, unde parametrul θ este necunoscut și $H_0: \theta = \theta_0$ și $H_1: \theta = \theta_1$ sînt ipoteza nulă și respectiv ipoteza alternativă, atunci există un test C.M.P. cu regiunea critică

$$(6) \quad W_c = \{x: f(x, \theta_1) \geq cf(x, \theta_0)\}, \quad c \geq 0$$

unde $f(x, \theta_0)[f(x, \theta_1)]$ este densitatea punctului x cînd este adevărată ipoteza $H_0[H_1]$.

Demonstrație. Presupunem că densitățile $f(x, \theta_0)$ și $f(x, \theta_1)$ sînt definite și finite aproape peste tot. Fie

$$\psi(c) = P(x \in W_c | \theta = \theta_0) = P_{\theta_0}(W_c).$$

Funcția $\psi(c)$ este nedescrescătoare. Într-adevăr dacă $c_1 < c_2$, atunci fiecare punct x , pentru care inegalitatea din (6) este satisfăcută cu $c = c_2$ aparține mulțimii W_{c_1} pentru $c = c_1$, deci $\psi(c_2) \geq \psi(c_1)$. Urmează că $\psi(0) = 1$, deoarece densitatea nu poate fi negativă.

Se observă că $0 \leq \psi(c) \leq 1/c$. Partea stângă a acestei inegalități rezultă cu ușurință, iar partea dreaptă după cum urmează : dacă am avea $c\psi(c) > 1$, atunci din (6) obținem :

$$\int_{W_c} f(x, \theta_1) dx \geq c \int_{W_c} f(x, \theta_0) dx = c\psi(c) > 1,$$

ceea ce este imposibil deoarece integrala din partea stângă reprezintă o probabilitate și nu poate depăși unitatea.

Din $0 \leq \psi(c) \leq 1/c$, urmează că $\lim_{c \rightarrow \infty} \psi(c) = 0$. Presupunem că există un c' pentru care

$$(7) \quad \psi(c') = \alpha$$

unde α este pragul de semnificație dat al testului.

Arătăm că mulțimea $W_{c'} = W'$ definită de (6) cu c' satisfăcând (7) este cea mai bună. Avem

$$(8) \quad \psi(c') = P_{\theta_0}(W') = \int_{W'} f(x, \theta_0) dx = \alpha.$$

Fie W un alt test cu același prag de semnificație

$$(9) \quad P_{\theta_0}(W) = \int_W f(x, \theta_0) dx = \alpha.$$

Din (8) și din (9) obținem

$$(10) \quad P_{\theta_0}(W') - P_{\theta_0}(W' \cap W) = \alpha - P_{\theta_0}(W' \cap W) = P_{\theta_0}(W) - P_{\theta_0}(W' \cap W).$$

Din definiția mulțimii W' , urmează că dacă $x \notin W'$, atunci

$$(11) \quad c'f(x, \theta_0) > f(x, \theta_1).$$

Din (10) și (11) obținem :

$$\begin{aligned} P_{\theta_1}(W') - P_{\theta_1}(W' \cap W) &\geq c'[P_{\theta_0}(W') - P_{\theta_0}(W' \cap W)] = \\ &= c'[P_{\theta_0}(W) - P_{\theta_0}(W \cap W')] \geq P_{\theta_1}(W) - P_{\theta_1}(W \cap W'). \end{aligned}$$

Deci

$$P_{\theta_1}(W') - P_{\theta_1}(W' \cap W) \geq P_{\theta_1}(W) - P_{\theta_1}(W \cap W').$$

Adunând în ambii membri ai inegalității de mai sus $P_{\theta_1}(W' \cap W)$ obținem

$$P_{\theta_1}(W') \geq P_{\theta_1}(W)$$

ceea ce arată că puterea testului bazat pe regiunea critică W' este cel puțin la fel de mare ca puterea testului bazat pe orice altă regiune critică W . Prin urmare testul bazat pe regiunea critică W' este C.M.P.

Dacă nu există o constantă c' care să satisfacă (7), atunci există o constantă c^* astfel încît

$$\psi(c^* - 0) \geq \alpha \text{ și } \psi^*(c^* + 0) \leq \alpha.$$

Avem

$$\psi(c^* - 0) - \psi(c^* + 0) = \int_M f(x, \theta_0) dx,$$

unde

$$M = \{x | f(x, \theta_1) = c^* f(x, \theta_0)\}.$$

Atunci testul C.M.P. are regiunea critică

$$W'' = W''_{c^*} - B,$$

unde B este o submulțime a mulțimii M aleasă astfel încît

$$P_{\theta_0}(W'') = \alpha.$$

Cu aceasta teorema este demonstrată.

Această teoremă este un caz particular al lemei fundamentale a lui Neyman și Pearson.

Problema mai poate fi formulată în felul următor :

Se dau ipotezele H_0 și H_1 , parametrii α și β ; se cere să se determine C.M.P. test W și volumul selecției n astfel încît verificînd ipoteza H_0 față de ipoteza H_1 , probabilitățile erorilor de ordinul unu și doi să fie α și respectiv β .

Exemplul 1. Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ necunoscută și σ^2 cunoscută. Ne propunem să găsim C.M.P. test pentru verificarea ipotezei

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ față de alternativa } H_1 : \mu = \mu_1 > \mu_0$$

pentru α și β date; totodată și volumul selecției.

Avem :

$$\frac{f(x, \mu_1, \sigma^2)}{f(x, \mu_0, \sigma^2)} = \exp \left[\bar{x} \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma^2/n} \right] \exp \left[-\frac{\mu_1^2 - \mu_0^2}{2\sigma^2/n} \right]$$

După (6) testul C.M.P. are ca regiune critică mulțimea punctelor x , pentru care

$$\bar{x} > \frac{\sigma^2 \ln c}{n(\mu_1 - \mu_0)} + \frac{\mu_1 + \mu_0}{2} = k$$

k determinîndu-se din condiția

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_k^\infty \exp \left[-\frac{n(\bar{x} - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] d\bar{x} = \alpha$$

Din relația anterioară obținem

$$P_{H_0}(\bar{x} < k) = \Phi\left(\frac{k - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha,$$

de unde

$$k = \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha}.$$

Puterea testului în $\mu = \mu_1$ este

$$\pi(\mu_1) = P_{H_1}(\bar{x} > k) = 1 - \Phi\left(\frac{k - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi\left(u_{1-\alpha} + \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

sau ținând seama că

$$1 - \Phi(v) = \Phi(-v), \quad -u_\alpha = u_{1-\alpha}$$

obținem

$$\pi(\mu_1) = \Phi\left(u_\alpha + \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right).$$

Deoarece $\pi = 1 - \beta$,

$$\text{din } \Phi\left(u_\alpha + \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1 - \beta, \text{ obținem } n = \frac{(u_{1-\alpha} + u_{1-\beta})^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2} \sigma^2.$$

Presupunem că variabila X este discretă, luând valoarea x_k cu probabilitatea $p_k(\theta) = P_\theta(X = x_k)$ și verificăm ipoteza

$$H_0: \theta = \theta_0$$

față de ipoteza alternativă

$$H_1: \theta = \theta_1.$$

Fie $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ o selecție asupra variabilei aleatoare X și $f(x, \theta_0)[f(x, \theta_1)]$ funcția de probabilitate a vectorului de selecție $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ pentru selecția realizată dacă este adevărată ipoteza $H_0(H_1)$. Deoarece variabila aleatoare X este discretă, egalitatea

$$P_{\theta_0}(W) = \alpha$$

nu mai este satisfăcută, pentru un α dat, pentru orice mulțime W din spațiul de selecție.

Teorema 1 nu poate fi extinsă direct la variabile aleatoare discrete. Pentru a o formula în acest caz este nevoie să se introducă noțiunea de test aleator.

Testele nealeatoare împart spațiul de selecție în două părți, o regiune de respingere W și complementara sa, astfel încât am respins ipoteza H_0 , ori de câte ori vectorul de selecție observat $\bar{x} \in W$.

Fie $\Omega_0 \subset \Omega$ și α un număr real, astfel încât $0 \leq \alpha \leq 1$.

DEFINIȚIA 7. Fiecare aplicație $\mathbb{S}$ -măsurabilă $\phi: R \rightarrow [0, 1]$ poartă numele de test aleator. ϕ este numit test aleator pentru verificarea ipotezei Ω_0 față de alternativa $\Omega - \Omega_0$, la pragul de semnificație α dacă

$$M_{P_\theta}(\phi) \leq \alpha,$$

pentru toți $\theta \in \Omega_0$.

Atunci vom spune că ϕ este un test aleator pentru problema $(\alpha, \Omega_0, \Omega - \Omega_0)$ sau pentru problema $(\alpha, P_{\Omega_0}, P_{\Omega - \Omega_0})$. Pentru scopuri practice, pentru un α dat, ϕ se alege astfel încât

$$\sup_{\theta \in \Omega_0} M_{P_\theta}(\phi) = \alpha.$$

Ω , sau P_Ω , poartă numele de mulțimea ipotezelor admisibile și Ω_0 sau P_{Ω_0} de ipoteza nulă.

Dacă ϕ are forma I_W , $W \in \mathbb{S}$, atunci W poartă numele de regiune critică.

Deoarece în acest caz

$$M_\theta(\phi) = \int_R I_W dP_\theta = P_\theta(W)$$

regiunea critică W care definește testul I_W pentru problema $(\alpha, \Omega_0, \Omega - \Omega_0)$ trebuie să satisfacă condiția

$$P_\theta(W) \leq \alpha$$

pentru toți $\theta \in \Omega_0$.

2.2. Lema Neyman-Pearson

TEOREMA 2. (Neyman-Pearson (1936)): Fie P_0 și P_1 repartiții probabilistice cu densitățile p_0 și respectiv p_1 în raport cu măsura μ . În aceste condiții

1) Pentru problema (α, P_0, P_1) există un test ϕ și k un număr real nenegativ astfel încât

$$(12) \quad \int \phi(x) p_0(x) d\mu = \alpha, \quad 0 < \alpha < 1$$

și

$$(13) \quad \phi(x) = \begin{cases} 1, & x \in W_k \\ 0, & x \in R - W_k \end{cases},$$

unde

$$W_k = \{x : p_1(x) > k p_0(x)\} \text{ pentru } k \geq -\infty \text{ și } -\infty, 0 \text{ definit ca } -\infty,$$

și

$$W_{k+} = \{x : p_1(x) \geq k p_0(x)\} \text{ pentru } k > -\infty$$

2) Dacă un test satisface relațiile (12) și (13) pentru un anumit k , atunci este C.M.P. test pentru problema (α, P_0, P_1) .

3) Fiind dat testul ϕ^* de putere maximă la nivelul de semnificație α , atunci ϕ^* va îndeplini aproape peste tot condiția (13) și va îndeplini aproape peste tot condiția (12) dacă nu există un test de putere 1 și astfel încât

$$\int \phi(x) p_0(x) d\mu = \alpha' < \alpha.$$

Demonstrație. 1) Fie

$$\alpha(c) = P_0\{p_1(x) > c p_0(x)\}$$

probabilitatea ca $p_1(x)/p_0(x) > c$, dacă repartiția probabilistică a variabilei X este P_0 .

$p_1(x)/p_0(x)$ nu are sens dacă numitorul este zero; $p_0(x)$ este însă zero pe o mulțime de măsură nulă.

Urmează că $1 - \alpha(c)$ este o funcție de repartiție. Avem :

$$1 - \alpha(c) = 1 - P_0\left\{\frac{p_1(x)}{p_0(x)} > c\right\} = P_0\left\{\frac{p_1(x)}{p_0(x)} \leq c\right\},$$

ceea ce arată că $\alpha(c)$ este nedescrescătoare și

$$\alpha(c-0) - \alpha(c) = P_0\left\{\frac{p_1(x)}{p_0(x)} = c\right\},$$

$$\alpha(-\infty) = 1 \text{ și } \alpha(\infty) = 0.$$

Deoarece $0 \leq \alpha(c) \leq 1$, pentru orice $0 < \alpha < 1$, fie c_0 astfel încât

$$(14) \quad \alpha(c_0) \leq \alpha \leq \alpha(c_0-0)$$

Pentru c_0 , care îndeplinește (14), considerăm testul definit prin

$$(15) \quad \phi(x) = \begin{cases} 1 & , p_1(x) > c_0 p_0(x) \\ \frac{\alpha - \alpha(c_0)}{\alpha(c_0-0) - \alpha(c_0)}, & , p_1(x) = c_0 p_0(x) \\ 0 & , p_1(x) < c_0 p_0(x) \end{cases}$$

Acest test este definit aproape peste tot în raport cu măsura P_0 , deoarece dacă

$$\alpha(c_0-0) - \alpha(c_0) = 0, \quad P_0\left\{\frac{p_1(x)}{p_0(x)} = c_0\right\} = 0$$

$\phi(x)$ definit în (15) verifică (12). Într-adevăr

$$\int \phi(x) p_0(x) d\mu = 1. P_0 \left\{ \frac{p_1(x)}{p_0(x)} > c_0 \right\} + \frac{\alpha - \alpha(c_0)}{\alpha(c_0 - 0) - \alpha(c_0)} P \left\{ \frac{p_1(x)}{p_0(x)} = c_0 \right\} + 0. P_0 \left\{ \frac{p_1(x)}{p_0(x)} < c_0 \right\},$$

sau

$$\int \phi(x) p_0(x) d\mu = \alpha(c_0) + \frac{\alpha - \alpha(c_0)}{\alpha(c_0 - 0) - \alpha(c_0)} [\alpha(c_0 - 0) - \alpha(c_0)] = \alpha.$$

Putem lua deci $k = c_0$. Urmează că testul $\phi(x)$, care are forma (15) îndeplinește condițiile (12) și (13).

Observăm că dacă c_0 nu este unic și dacă $\phi_1(x)$ și $\phi_2(x)$ sînt funcțiile obținute pentru două valori c' și c'' ,

$$\{x : \phi_1(x) \neq \phi_2(x)\}$$

este de măsură nulă atît în raport cu P_0 cît și cu P_1 și deci aceste puncte pot fi excluse din spațiul de selecție. Fie (c', c'') intervalul în care $\alpha(c) = \alpha$ și

$$C = \left\{ x, p_0(x) > 0, c' < \frac{p_1(x)}{p_0(x)} < c'' \right\}.$$

Atunci

$$P_0(C) = \alpha(c') - \alpha(c'' - 0) = 0 \text{ și deci } \mu(C) = 0, P_1(C) = 0.$$

2) Presupunem că testul $\phi(x)$ îndeplinește condițiile (12) și (13) și că ϕ^* este un alt test pentru care :

$$\int \phi^*(x) p_0(x) d\mu \leq \alpha.$$

Fie

$$S^+ = \{x, \phi(x) - \phi^*(x) > 0\}$$

și

$$S^- = \{x, \phi(x) - \phi^*(x) < 0\}.$$

Dacă : $x \in S^+$, $\phi(x) > 0$ și deci $p_1(x) \geq k p_0(x)$,

$x \in S^-$, atunci $p_1(x) \leq k p_0(x)$.

Urmează că

$$\int (\phi - \phi^*)(p_1 - k p_0) d\mu = \int_{S^+ \cup S^-} (\phi - \phi^*)(p_1 - k p_0) d\mu \geq 0$$

sau

$$\int (\phi - \phi^*) p_1 d\mu \geq k \int (\phi - \phi^*) p_0 d\mu$$

Deoarece

$$\int \phi p_0 d\mu = \alpha, \text{ și } - \int \phi^* p_0 d\mu \geq -\alpha,$$

urmează că

$$\int \phi p_1 d\mu \geq \int \phi^* p_1 d\mu,$$

ceea ce arată că ϕ este de putere maximă.

3) Fie $\phi^*(x)$ un test de putere maximă pentru problema (α, P_0, P_1) și $\phi(x)$ un alt test care satisface (12) și (13).

Fie

$$S = (S^+ \cup S^-) \cap \{x, p_1(x) \neq kp_0(x)\}$$

și să presupunem că $\mu(S) > 0$.

Dacă $x \in S$, atunci $(\phi - \phi^*)(p_1 - kp_0) > 0$.

Într-adevăr dacă $x \in S$, atunci $p_1(x) \neq kp_0(x)$. Dacă $p_1 - kp_0 > 0$, $\phi(x) - \phi^*(x) > 0$, deoarece $\phi(x) = 1$, iar dacă $p_1(x) - kp_0(x) < 0$, $\phi(x) - \phi^*(x) < 0$, deoarece $\phi(x) = 0$. Urmează că

$$\int_{S^+ \cup S^-} (\phi - \phi^*)(p_1 - kp_0) d\mu = \int_S (\phi - \phi^*)(p_1 - kp_0) d\mu > 0,$$

ceea ce ne arată că puterea testului ϕ este strict mai mare decât a testului ϕ^* . Aceasta este o contradicție, deoarece am presupus pe ϕ^* ca fiind de putere maximă. La acest rezultat absurd am ajuns presupunând că S nu este de măsură nulă. Deci $\mu(S) = 0$ sau același lucru $\phi = \phi^*$ aproape peste tot în raport cu măsura μ , ceea ce ne arată că ϕ^* îndeplinește aproape peste tot condiția (13).

Presupunem că ϕ^* ar fi de volum $< \alpha$ și putere < 1 . În acest caz am putea construi un alt test ϕ^{**} adăugînd regiunii de respingere a testului ϕ^* noi puncte (punctele în care $\phi^* = 0$ și $\phi^* = 1$) sau porțiuni de puncte (punctele în care $\phi^* = 0$, dar $0 < \phi^* < 1$). Putem proceda în acest mod pînă cînd vom obține un test de volum α și de putere 1. Însă în acest mod am putea construi un test avînd puterea mai mare decât a testului ϕ^* , ceea ce contrazice ipoteza că ϕ^* este optim.

Dar dacă ϕ^* este de putere < 1 , atunci satisface (12).

Se observă că (12) și (13) determină unic testul C.M.P., cu excepția mulțimii pe care $p_1(x) = kp_0(x)$, unde $\phi(x)$ poate fi definit arbitrar cu condiția ca testul rezultat să aibe volumul α . De fapt se observă că se poate lua $\phi(x)$ ca o constantă pe această mulțime,

$$\phi(x) = \frac{\alpha - \alpha(c_0)}{\alpha(c_0 - 0) - \alpha(c_0)},$$

... Dacă $\mu\{x : p_1(x) = kp_0(x)\} = 0$ testul C.M.P. este determinat unic. Acest test unic este nealeator. În cazul general, aleatorizarea este necesară numai pe mulțimea frontieră $\{x, p_1(x) = kp_0(x)\}$ pentru a obține

$$\int \phi p_0 d\mu = \alpha.$$

TEOREMA 3. Fie π puterea C.M.P. test pentru problema (α, H_0, H_1) , $0 < \alpha < 1$. În acest caz $\alpha < \pi$ cu excepția cazului când $p_0(x) = p_1(x)$.

Demonstrație. Considerăm testul dat de $\phi(x) \equiv \alpha$. Puterea acestui test este

$$\int \phi(x)p_1(x)d\mu = \alpha \int p_1(x)d\mu = \alpha.$$

Însă puterea acestui test nu poate fi mai mare decât puterea C.M.P. test, adică $\alpha \leq \pi$.

Dacă $\alpha = \pi < 1$, testul $\phi(x) \equiv \alpha$ este C.M.P. și din punctul 3) teorema 2, trebuie să avem :

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & x \in W_k \\ 0 & x \in W_{k+} \end{cases}$$

Deci $p_1(x) = kp_0(x)$ aproape peste tot deoarece $\phi(x) = \alpha$, iar $0 < \alpha < 1$. Însă

$$\int p_1 d\mu = k \int p_0 d\mu = k \Rightarrow k = 1 \Rightarrow p_0 = p_1.$$

2.3. Proprietăți ale funcției de putere a C.M.P. test pentru verificarea ipotezei simple nule P_0 față de alternativa simplă P_1

Fie $0 \leq \alpha \leq 1$, ϕ_α mulțimea tuturor testelor ϕ pentru problema (α, P_0, P_1) , ϕ_α^* C.M.P. test pentru această problemă și

$$(16) \quad \pi(\alpha) = M_{P_1}(\phi_\alpha^*)$$

Are loc

TEOREMA 4. (Schmetterer (1963), (1974)). π este nedescrescătoare și concavă în $0 \leq \alpha \leq 1$ cu $0 \leq \pi \leq 1$. π este continuă în $0 < \alpha < 1$ și $\alpha \rightarrow \pi(\alpha)/\alpha$ nedescrescătoare. De asemenea

$$(17) \quad \lim_{\alpha \uparrow 1} \pi(\alpha)/\alpha = 1$$

și

$$(18) \quad 1 \leq \pi(\alpha)/\alpha \leq 1/\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Demonstrație. Din definiția funcției π urmează că π este nedescrescătoare. Fie α_1, α_2 numere reale cu $0 < \alpha_i < 1$, $i = 1, 2$ și t_1, t_2 numere pozitive cu $t_1 + t_2 = 1$. Avem

$$0 < t_1 \alpha_1 + t_2 \alpha_2 < 1.$$

Dacă $\phi_{\alpha_1}^* \in \phi_{\alpha_1}$ și $\phi_{\alpha_2}^* \in \phi_{\alpha_2}$ sînt C.M.P. teste, atunci

$$0 \leq t_1 \phi_{\alpha_1}^* + t_2 \phi_{\alpha_2}^* \leq 1$$

și

$$\begin{aligned} M_{P_0}(t_1 \phi_{\alpha_1}^* + t_2 \phi_{\alpha_2}^*) &= \\ &= t_1 M_{P_0}(\phi_{\alpha_1}^*) + t_2 M_{P_0}(\phi_{\alpha_2}^*) \leq t_1 \alpha_1 + t_2 \alpha_2, \end{aligned}$$

astfel încît

$$t_1 \phi_{\alpha_1}^* + t_2 \phi_{\alpha_2}^* \in \phi_{t_1 \alpha_1 + t_2 \alpha_2}$$

Din definiția C.M.P. test, avem

$$M_{P_1}(t_1 \phi_{\alpha_1}^* + t_2 \phi_{\alpha_2}^*) \leq M_{P_1}(\phi_{t_1 \alpha_1 + t_2 \alpha_2}^*)$$

sau, din (16)

$$(19) \quad t_1 \pi(\alpha_1) + t_2 \pi(\alpha_2) \leq \pi(t_1 \alpha_1 + t_2 \alpha_2).$$

Din condiția de monotonie și din (19) rezultă continuitatea funcției π în $0 < \alpha < 1$. Dacă numerele pozitive t_2 și ε sînt mici, astfel încît

$$\alpha + t_2 \varepsilon < 1 \text{ și } \alpha - \varepsilon t_1 > 0,$$

atunci

$$(20) \quad (t_1 - 1) \pi(\alpha) + t_2 \pi(\varepsilon) \leq \pi(\alpha + t_2 \varepsilon) - \pi(\alpha).$$

Pe de altă parte din (19) avem

$$t_1 \pi(\alpha + \varepsilon t_2) + t_2 \pi(\alpha - \varepsilon t_1) \leq \pi(\alpha).$$

astfel încît

$$(21) \quad \pi(\alpha + \varepsilon t_2) - \pi(\alpha) \leq -t_2 \pi(\alpha - \varepsilon t_1) + (1 - t_1) \pi(\alpha + \varepsilon t_2).$$

Deoarece $0 \leq \pi \leq 1$, din (20) și (21) pentru $t_2 \rightarrow 0$ rezultă continuitatea la dreapta a funcției π . Analog rezultă continuitatea la stînga. Din monotonicitatea și continuitatea funcției π în $0 < \alpha < 1$ urmează că $\pi(0+)$ există și $\pi(0+) \geq 0$. Aceasta împreună cu (17) implică monotonicitatea aplicației $\alpha \rightarrow \pi(\alpha)/\alpha$. Alegem numerele reale γ, δ cu $0 < \delta < \gamma < 1$ și punem în (19)

$$\alpha_2 = \gamma, \quad t_2 = \delta/\gamma.$$

Făcînd $\alpha_2 \searrow 0$, găsim că $\alpha \rightarrow \pi(\alpha)/\alpha$ este nedescrescătoare.

Deoarece pentru $\alpha = 1$, alegînd $\phi^*(x) = 1$ pentru toți $x \in R$, obținem sigur C.M.P. test, urmează (17). (18) rezultă fără greutate.

Ne punem problema condițiilor în care marginea superioară din (18) este atinsă printr-o alegere convenabilă a măsurilor probabilistice P_0 și P_1 .

DEFINIȚIA 8. Două măsuri probabilistice P_0 și P_1 pe $(R, \mathfrak{S})$ sînt ortogonale dacă există cel puțin o mulțime $M \in \mathfrak{S}$ cu

$$P_0(M) = 1 \quad \text{și} \quad P_1(M) = 0.$$

Atunci există o mulțime $N \in \mathfrak{S}$ cu

$$P_0(N) = 0 \quad \text{și} \quad P_1(N) = 1.$$

Este suficient să alegem $N = R - M$.

TEOREMA 5. Dacă P_0 și P_1 sînt măsuri ortogonale, atunci

$$\pi(\alpha) = 1, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Demonstrație. Fie p_i densitatea Radon-Nicodym a măsurii P_i , $i = 0, 1$, absolut continuă în raport cu măsura $(P_0 + P_1)/2$. Dacă $\beta \leq \alpha$, atunci

$$\phi^*(x) = \begin{cases} 1 & p_1(x) > 0 \\ \beta & p_1(x) = 0 \end{cases}$$

pentru fiecare α , $0 \leq \alpha \leq 1$, definește C.M.P. test pentru problema (α, P_0, P_1) .

De asemenea avem

$$M_{P_1}(\phi^*) = 1.$$

Astfel am dat un exemplu care arată că C.M.P. test nu trebuie să satisfacă

$$(22) \quad \int_R \phi^* p_0 d\mu = \alpha$$

cînd funcția de putere pentru ipoteza alternativă ia valoarea 1.

În aplicații prezintă interes valorile mici ale lui α . Considerarea $\lim_{\alpha \searrow 0} \pi(\alpha)/\alpha$ care trebuie să existe după teorema 4 dă o imagine privind cît este de bun C.M.P. test față de testul trivial. Următoarea teoremă arată că pentru alegere convenabilă a măsurilor probabilistice P_0 și P_1 , C.M.P. test este aproape la fel de ineficace ca testul trivial.

TEOREMA 6. (Schmetterer (1974)). Fie p o densitate pe R_1 cu următoarele proprietăți

- p este simetrică față de zero
- p este continuă și strict monoton descrescătoare pentru $x \geq 0$.

Fie σ un număr real > 1 și presupunem că funcția $x \rightarrow p(x/\sigma)/p(x)$ este strict monoton crescătoare pentru $x \geq 0$. Dacă P_0 este dată prin densitatea p și P_1 prin densitatea $x \rightarrow p(x/\sigma)/\sigma$ atunci $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \pi(\alpha)/\alpha$ este finită sau infinită după cum $x \rightarrow p(x/\sigma)/p(x)$ este mărginită sau nu.

Demonstrație. Din presupuneri rezultă existența $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x/\sigma)/p(x)$ ca finită sau infinită. Pentru fiecare α , $0 < \alpha < 1$, fie $\eta(\alpha)$ singura soluție a ecuației

$$\int_{\eta(\alpha)}^{\infty} p(x) dx = \alpha/2.$$

Atunci C.M.P. test pentru problema (α, P_0, P_1) are regiunea critică

$$W = \{x : \eta(\alpha) \leq x < \infty\} \cup \{x : -\infty < x \leq -\eta(x)\}.$$

Deci

$$\pi(\alpha)/\alpha = \frac{1}{\sigma} \int_{\eta(\alpha)}^{\infty} p(x/\sigma) dx \left[\int_{\eta(\alpha)}^{\infty} p(x) dx \right]^{-1},$$

astfel încît

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \pi(\alpha)/\alpha = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} p(\eta(\alpha)/\sigma)/p(\eta(\alpha)),$$

ceea ce demonstrează teorema.

Observații. i) Densitatea

$$p(x) = (1/\pi)(1/(1+x^2)), \quad x \in R_1$$

satisface toate condițiile teoremei 6. În acest caz

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \pi(\alpha)/\alpha = \sigma$$

și σ poate fi ales arbitrar apropiat de 1.

ii) Pentru $P_0 \neq P_1$, trebuie să avem $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \pi(\alpha)/\alpha = 1$. Fie P_0 și P_1 definite pe (R, δ) și μ o măsură dominantă pentru P_0 și P_1 . Fie p_i , $i = 0, 1$ densitățile Radon-Nicodým corespunzătoare. Deoarece $P_0 \neq P_1$, pentru $E = \{x : p_1(x) > p_0(x)\}$ avem sigur $\mu(E) > 0$.

Deoarece :

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : p_1(x) - p_0(x) \geq 1/n\},$$

există un $\varepsilon > 0$ și $E_1 \subseteq E$ astfel încît $p_1(x) \geq p_0(x) + \varepsilon$ pentru $x \in E_1$ și $\mu(E_1) = \delta > 0$.

Dacă $p_0(x) = 0$ pentru $x \in E_1$ a.p.t. în raport cu μ , considerăm testul

$$\phi_{\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & x \in E_1 \\ \alpha & x \in R - E_1 \end{cases} \text{ cu } 0 < \alpha < 1$$

Atunci :

$$M_{P_1}(\phi_\alpha) = \alpha P_1(R - E_1) + P_1(E_1) = \alpha + (1 - \alpha)P_1(E_1) > \alpha.$$

Dar dacă $\int_{E_1} p_0 d\mu = \alpha_1 > 0$, atunci fie

$$\phi_{\alpha_1}(x) = \begin{cases} 1 & x \in E_1 \\ 0 & x \in R - E_1 \end{cases}$$

astfel încît

$$M_{P_1}(\phi_{\alpha_1}) = \int_{E_1} p_1 d\mu \geq \alpha_1 + \varepsilon \delta > \alpha_1.$$

În orice caz, deoarece $\alpha \rightarrow \pi(\alpha)/\alpha$ nu crește, avem $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \pi(\alpha)/\alpha > 1$.

2.4. Teste maximin

În acest paragraf urmăim Krafft, Witting (1967) (de asemenea se pot vedea Baumann (1968) și Schmetterer (1974)).

TEOREMA 7. Fie P_Ω mulțimea măsurilor probabilistice pe $(R, \mathcal{S})$, dominate de o măsură μ σ -finită, unde mulțimea Ω a ipotezelor admisibile poate fi arbitrară. Fie $0 \leq \alpha \leq 1$, $\theta_1 \in \Omega$ și considerăm problema $(\alpha, \Omega - \{\theta_1\}, \{\theta_1\})$. Pentru această problemă există C.M.P. test ϕ^* .

DEFINIȚIA 9. Un test ϕ_0 pentru problema $(\alpha, \Omega_0, \Omega - \Omega_0)$ este numit maximin dacă

$$(23) \quad \inf_{\theta \in \Omega - \Omega_0} \pi_{\phi_0}(\theta) = \sup_{\phi \in \phi_\alpha} \inf_{\theta \in \Omega - \Omega_0} \pi_\phi(\theta),$$

unde ϕ_α este mulțimea tuturor testelor pentru problema $(\alpha, \Omega_0, \Omega - \Omega_0)$

Observație. Dacă $\Omega - \Omega_0$ conține un singur punct, atunci testul maximin este C.M.P. test pentru problema $(\alpha, \Omega_0, \Omega - \Omega_0)$.

Arătăm că în condiții slabe există un test maximin.

TEOREMA 8. Fie P_Ω o mulțime de măsuri probabilistice pe $(R, \mathcal{S})$ dominată de o măsură μ σ finită. Fie $0 \leq \alpha \leq 1$. Atunci există întotdeauna un test maximin pentru problema $(\alpha, \Omega_0, \Omega - \Omega_0)$.

Demonstrație. Pentru fiecare $\theta \in \Omega$, fie p_θ densitatea Radon-Nicodym a măsurii P_θ în raport cu μ . Atunci există șirul $\{\phi_i\}$ cu $\phi_i \in \phi_\alpha$ astfel încît

$$(24) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \inf_{\theta \in \Omega - \Omega_0} \pi_{\phi_i}(\theta) = \sup_{\phi \in \phi_\alpha} \inf_{\theta \in \Omega - \Omega_0} \pi_\phi(\theta).$$

Există un ϕ_0 cu $0 \leq \phi_0 \leq 1$ (a.p.t. în raport cu μ) și un subșir $\{\phi_{i_k}\}$ al șirului $\{\phi_i\}$ astfel încît

$$(25) \quad \int_R \phi_{i_k} p_\theta d\mu \rightarrow \int_R \phi_0 p_\theta d\mu,$$

pentru toți $\theta \in \Omega$. Astfel ϕ_0 este un test. Deoarece $\phi_{i_k} \in \phi_\alpha$ din (25) avem

$$\int_R \phi_0 p_\theta d\mu \leq \alpha \text{ pentru } \theta \in \Omega_0$$

adică

$$(26) \quad \phi_0 \in \phi_\alpha.$$

Mai mult, pentru fiecare $\theta_1 \in \Omega - \Omega_0$ și $k \geq 1$

$$\inf_{\theta \in \Omega - \Omega_0} \pi_{\phi_{i_k}}(\theta) \leq \int_R \phi_{i_k} p_{\theta_1} d\mu.$$

Aceasta împreună cu (24) și (25) dă

$$\sup_{\phi \in \phi_\alpha} \inf_{\theta \in \Omega - \Omega_0} \pi_\phi(\theta) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_R \phi_{i_k} p_{\theta_1} d\mu = \int_R \phi_0 p_{\theta_1} d\mu$$

pentru fiecare $\theta_1 \in \Omega - \Omega_0$.

Urmează că

$$(27) \quad \sup_{\phi \in \phi_\alpha} \inf_{\theta \in \Omega - \Omega_0} \pi_\phi(\theta) \leq \inf_{\theta \in \Omega - \Omega_0} \pi_{\phi_0}(\theta).$$

Ținând seama de (26) urmează că în (27) trebuie să avem egalitate.

Teorema 8 este legată de un program liniar generalizat: Fie P_Ω , Ω_0 , $\Omega - \Omega_0$, α , μ și p_μ cu aceleași semnificații ca în teoremă. Fie $\mathfrak{D}_0$ și $\mathfrak{D}_1$ σ -algebra de submulțimi a mulțimilor Ω_0 și respectiv $\Omega - \Omega_0$. Presupunem că aplicația

$$\{(\theta, x) \rightarrow p_\theta(x)\} \text{ este } \begin{cases} \mathfrak{D}_0 \times \mathfrak{S} - \text{măsurabilă pe } \Omega_0 \times R \text{ și} \\ \mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{S} - \text{măsurabilă pe } \Omega - \Omega_0 \times R \end{cases}$$

(Pfanagl (1969) dă condiții necesare și suficiente pentru existența densităților produs). Această ultimă presupunere va fi folosită în tot acest subparagraf.

Considerăm următorul program liniar care este echivalent cu problema găsirii unui test maximin.

$$(28a) \quad \int_R p_\theta \phi d\mu + s \leq 0, \quad \theta \in \Omega - \Omega_0$$

$$(28b) \quad \int_R p_\theta \phi d\mu \leq \alpha, \quad \theta \in \Omega_0$$

$$(28c) \quad 0 \leq \phi(x) \leq 1, \quad x \in R$$

$$(28d) \quad \begin{aligned} s &\geq 0 \\ s &- \text{maxim.} \end{aligned}$$

În această problemă se presupune că ϕ este $\mathfrak{S}$ -măsurabil.
Programul dual este determinat de următoarele condiții

$$(29a) \quad \int_{\Omega_0} p_\theta(x) d\lambda(\theta) - \int_{\Omega - \Omega_0} p_\theta(x) dv(\theta) + v(x) \geq 0, \text{ a. p. t. în raport cu } \mu$$

$$(29b) \quad v(\Omega - \Omega_0) \geq 1$$

$$(29c) \quad v(x) \geq 0 \text{ a.p.t. în raport cu } \mu$$

$$\alpha \lambda(\Omega_0) + \int_R v d\mu \rightarrow \text{minim},$$

unde: $\lambda \neq 0$ este o măsură mărginită pe $(\Omega_0, \mathfrak{D}_0)$,

v este o măsură mărginită pe $(\Omega - \Omega_0, \mathfrak{D}_1)$, și

v o funcție $\mathfrak{S}$ -măsurabilă pe R .

Observație. Existența integralelor din (29a) urmează din presupunerea de măsurabilitate a aplicației $(\theta, x) \rightarrow p_\theta(x)$.

DEFINIȚIA 10. Perechile (ϕ, s) sau tripletele (λ, v, v) care satisfac condițiile (28) și respectiv (29) poartă numele de soluții posibile.

LEMA 1. Fie (ϕ, s) și (λ, v, v) soluții posibile. Atunci

$$(30) \quad s \leq \alpha \lambda(\Omega_0) + \int_R v d\mu.$$

Dacă (ϕ_0, s_0) și (λ_0, v_0, v_0) sînt soluții posibile astfel încît în (30) are loc egalitatea, atunci $(\phi_0, s_0) [(\lambda_0, v_0, v_0)]$ este o soluție a programului liniar [dual], adică

$$s_0 = \max s \text{ și } \alpha \lambda_0(\Omega_0) + \int_R v_0 d\mu = \text{minim}.$$

Demonstrație. (28d), (29b) și (28a) implică

$$(31) \quad s \leq v(\Omega - \Omega_0)s \leq v(\Omega - \Omega_0) \inf_{\theta \in \Omega - \Omega_0} \int_R p_\theta \phi d\mu \leq \int_{\Omega - \Omega_0} \int_R p_\theta(x) \phi(x) d\mu(x) dv(\theta)$$

Din (29 a) obținem

$$(32) \quad \int_{\Omega - \Omega_0} \int_R p_\theta(x) \phi(x) d\mu(x) dv(\theta) = \int_R \int_{\Omega - \Omega_0} p_\theta(x) dv(\theta) \phi(x) d\mu(x) \leq \int_R \left[\int_{\Omega_0} p_\theta(x) d\lambda(\theta) + v(x) \right] \phi(x) d\mu(x) = \int_{\Omega_0} \int_R p_\theta(x) \phi(x) d\mu(x) d\lambda(\theta) + \int_R v \phi d\mu \leq \alpha \lambda(\Omega_0) + \int_R v d\mu$$

(31) împreună cu (32) dă (30).

A doua parte a lemei 1 este o consecință a relației (30) și a definiției maximului și minimului.

Modificăm condițiile (29). Dacă (λ, ν, v) este o soluție posibilă a programului dual, atunci $(\lambda, \nu, \bar{v})$ este de asemenea o astfel de soluție unde

$$\begin{aligned} \bar{v}(x) &= \max \left(0, \int_{\Omega - \Omega_0} p_0(x) d\nu(\theta) - \int_{\Omega_0} p_0(x) d\lambda(\theta) \right) = \\ (33) \quad &= \left(\int_{\Omega - \Omega_0} p_0(x) d\nu(\theta) - \int_{\Omega_0} p_0(x) d\lambda(\theta) \right)^+. \end{aligned}$$

Mai mult

$$\alpha \lambda(\Omega_0) + \int_R \bar{v} d\mu \leq \alpha \lambda(\Omega_0) + \int_R v d\mu.$$

Aceste două presupuneri rezultă din (29a) și (29c). Prin urmare programul dual admite următoarea formulare:

Să se rezolve problema

$$\alpha \lambda(\Omega_0) + \int_R \left(\int_{\Omega - \Omega_0} p_0(x) d\nu(\theta) - \int_{\Omega_0} p_0(x) d\lambda(\theta) \right)^+ d\mu(x) \rightarrow \text{minim}$$

unde: λ este o măsură mărginită pe $(\Omega_0, \mathfrak{D}_0)$ și

ν este o măsură mărginită pe $(\Omega - \Omega_0, \mathfrak{D}_1)$ cu $\nu(\Omega - \Omega_0) \geq 1$.

Această formulare arată că putem să presupunem, fără micșorarea generalității, că ν este o măsură probabilistică, adică

$$(34) \quad \nu(\Omega - \Omega_0) = 1.$$

Dacă punem $\lambda(\Omega_0) = k$, atunci obținem următoarea formulare pentru programul dual, care este echivalentă cu formularea anterioară.

Fie: Λ mulțimea tuturor măsurilor probabilistice λ pe $(\Omega_0, \mathfrak{D}_0)$,

Ξ mulțimea tuturor măsurilor probabilistice ν pe $(\Omega - \Omega_0, \mathfrak{D}_1)$ și k un număr pozitiv.

Fie

$$(35) \quad h(k, \lambda, \nu) = \alpha k + \int_R \left(\int_{\Omega - \Omega_0} p_0(x) d\nu(\theta) - k \int_{\Omega_0} p_0(x) d\lambda(\theta) \right)^+ d\mu(x).$$

Găsim un triplet (k_0, λ_0, ν_0) unde $k_0 > 0$, $\lambda_0 \in \Lambda$, $\nu_0 \in \Xi$, astfel încît

$$\inf_{k > 0, \lambda \in \Lambda, \nu \in \Xi} h(k, \lambda, \nu) = h(k_0, \lambda_0, \nu_0).$$

Observații. i) $x \rightarrow \int_{\Omega - \Omega_0} p_0(x) d\lambda(\theta)$ și $x \rightarrow \int_{\Omega_0} p_0(x) d\lambda(\theta)$ sînt densități Radon-Nicodým ale măsurilor probabilistice pe $(R, \mathfrak{S})$ în raport cu μ
ii) Membrul drept al relației (35) definește puterea C.M.P. test;

Mai precis, are loc
LEMA 2. *Egalitatea*

$$(36) \quad \inf_{\theta \in \Omega - \Omega_0} \pi_{\phi_0}(\theta) = h(k_0, \lambda_0, \nu_0),$$

unde $\phi_0 \in \phi_\alpha$ are loc dacă ϕ

$$(37) \quad \phi_0(x) = \begin{cases} 1, & \int_{\Omega_1} p_0(x) d\nu_0(\theta) > k_0 \int_{\Omega_0} p_0(x) d\lambda_0(\theta) \\ 0, & \int_{\Omega_1} p_0(x) d\nu_0(\theta) < k_0 \int_{\Omega_0} p_0(x) d\lambda_0(\theta) \end{cases}$$

$$(38) \quad M(\phi_0; \theta) = \inf_{\theta_1 \in \Omega - \Omega_0} M(\phi_0; \theta_1), \quad \theta \in \Omega_1 \text{ a.p.t. în raport cu } \nu_0$$

$$(39) \quad M(\phi_0; \theta) = \alpha, \quad \theta \in \Omega_0 \text{ a.p.t. în raport cu } \lambda_0$$

Demonstrație. Presupunem că (36) are loc. Atunci semnul egal apare în șirul de inegalități (31) și (32) dacă punem

$$\lambda = k_0 \lambda_0, \quad \nu = \nu_0, \quad \phi = \phi_0 \text{ și } v = \nu_0$$

unde

$$\nu_0(x) = \left(\int_{\Omega - \Omega_0} p_0(x) d\nu_0(\theta) - k_0 \int_{\Omega_0} p_0(x) d\lambda_0(\theta) \right)^+, \quad x \in R.$$

Pentru început aceasta împreună cu (34) implică relația (38). Mai departe, împreună cu (29a) conduce la

$$\int_{\Omega - \Omega_0} p_0(x) d\nu_0(\theta) = k_0 \int_{\Omega_0} p_0(x) d\lambda_0(\theta) + \nu_0(x) \text{ a.p.t. în raport cu } \mu,$$

ori de câte ori $\phi_0(x) > 0$. În final ultima egalitate din (32) dă (39).

Se observă că condițiile (37), (38) și (39) împreună cu (34) implică egalitatea în (32) și (31), adică are loc (36).

Lema 2 sugerează

DEFINIȚIA 11. Perechea de măsuri probabilistice (λ_0, ν_0) unde λ_0 este definită pe $(\Omega_0, \mathfrak{D}_0)$ și ν_0 pe $(\Omega - \Omega_0, \mathfrak{D}_1)$ este numită cel mai puțin favorabilă dacă

$$\sup_{\phi \in \phi_\alpha} \inf_{\theta \in \Omega - \Omega_0} \pi_\phi(\theta) = h(k_0, \lambda_0, \nu_0)$$

pentru k_0 real.

Fie

Γ orice mulțime de indici,

P_Γ o familie de măsuri probabilistice pe $(R, \mathfrak{S})$ dominată de o măsură

μ σ -finită.

p_ρ densitatea Radon-Nicodym a măsurii P_ρ în raport cu μ , $\rho \in \Gamma$,

$\mathfrak{D} \sigma$ — algebra de submulțimi a mulțimii Γ .

Presupunem că :
 $(\rho, x) \rightarrow p_\rho(x)$ este o aplicație $(\mathfrak{D} \times \mathfrak{S})$ -măsurabilă
 și notăm prin $K(\Gamma)$ mulțimea tuturor măsurilor probabilitice pe $(R, \mathfrak{S})$
 de forma

$$A \rightarrow \int_A \int_{\Gamma} p_\rho(x) d\eta(\rho) d\mu(x), \quad A \in \mathfrak{S}$$

unde η este orice măsură probabilistică pe $(\Gamma, \mathfrak{D})$

Avem
LEMA 3. Presupunem că $P_0 \in K(\Omega_0)$ și $P_1 \in K(\Omega - \Omega_0)$ unde
 $\Gamma(\Omega_0)$ și $K(\Omega - \Omega_0)$ sînt definite cu ajutorul lui Λ și respectiv Ξ .
 Fie ϕ^* C.M.P. test pentru problema (α, P_0, P_1) . Atunci

$$\pi_{\phi^*}(P_1) \geq \sup_{\phi \in \phi_\alpha} \inf_{\theta \in \Omega - \Omega_0} \pi_\phi(\theta).$$

Demonstrația rezultă din lema 2.

Are loc

TEOREMA 9. Presupunem că $\theta_1 \in \Omega$ și fie $\Omega_0 = \Omega - \{\theta_1\}$. Fie
 $P_0 \in K(\Omega_0)$ și presupunem că ϕ^* este C.M.P. test pentru problema $(\alpha, P_0, P_{\theta_1})$. Atunci ϕ^* este de asemenea C.M.P. test pentru problema $(\alpha, \Omega_0, \{\theta_1\})$
 cu condiția că

$$M(\phi^*; \omega) \leq \alpha,$$

să aibă loc pentru toți $\omega \in \Omega_0$.

Ilustrăm teorema 9 prin

Exemplu 2. Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ o selecție asupra unei variabile
 aleatoare $X \sim N(\mu, 1)$. Ne propunem să construim C.M.P. test pentru
 verificarea ipotezei nule compuse.

$$\Omega_0 = \{\mu_a, \mu_0\}$$

față de alternativa

$$\mu = \mu_1, \mu_a < \mu_0 < \mu_1$$

Astfel avem o problemă de forma $(\alpha, P_{\Omega_0}, P_{\mu_1})$ unde P_{μ_i} pentru
 $i = a, 0, 1$ sînt măsuri probabilitice pe spațiul $(R^n, \mathfrak{B}_n^*)$ definite prin den-
 sitățile

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (1/\sqrt{2\pi})^n \exp \left\{ -\sum_{j=1}^n (x_j - \mu_i)^2/2 \right\}$$

Alegem în Ω_0 măsura probabilistică λ dată de

$$\lambda(\mu_0) = 1, \quad \lambda(\mu_a) = 0$$

Astfel am înlocuit problema $(\alpha, P_{\Omega_0}, P_{\mu_1})$ prin $(\alpha, P_{\mu_0}, P_{\mu_1})$. După
 teorema 2, C.M.P. test ϕ^* pentru problema $(\alpha, P_{\mu_0}, P_{\mu_1})$ este dat de

$$\phi^*(x) = \begin{cases} 1, & \exp \left\{ -\sum_1^n (x_j - \mu_1)^2/2 \right\} \geq k \exp \left\{ -\sum_1^n (x_j - \mu_0)^2/2 \right\} \\ 0, & \exp \left\{ -\sum_1^n (x_j - \mu_1)^2/2 \right\} < k \exp \left\{ -\sum_1^n (x_j - \mu_0)^2/2 \right\} \end{cases}$$

cu $k \geq 0$ convenabil ales. Mulțimea

$$\left\{ \mathbf{x} : \exp \left\{ - \sum_1^n (x_j - \mu_1)^2/2 \right\} \right\} = k \exp \left\{ - \sum_1^n (x_j - \mu_0)^2/2 \right\}$$

este mulțimea nulă. Astfel ϕ^* este definit de regiunea critică W care poate fi scrisă sub forma

$$(40) \quad W = \left\{ \mathbf{x} : \sum_1^n (x_j - \mu_0)^2 - \sum_1^n (x_j - \mu_1)^2 \geq 2 \ln k \right\}$$

Deoarece $\mu_1 > \mu_0$, W se poate pune sub forma

$$(41) \quad W = \left\{ \mathbf{x} : (\bar{x} - \mu_0) \sqrt{n} > \frac{\ln k}{\sqrt{n}(\mu_1 - \mu_0)} + (\mu_1 - \mu_0) \sqrt{n}/2 \right\}$$

Cum $(\bar{x} - \mu_0) \sqrt{n} \sim N(0,1)$, din (41) avem $P_{\mu_0}(W) = \alpha$, dacă

$$\frac{\ln k}{\sqrt{n}(\mu_1 - \mu_0)} + (\mu_1 - \mu_0) \sqrt{n}/2 = u_{1-\alpha}$$

W mai poate fi definită ca

$$(42) \quad \{ \mathbf{x} : (\bar{x} - \mu_0) \sqrt{n} \geq u_{1-\alpha} \}.$$

Arătăm că

$$(43) \quad P_{\mu_a}(W) \leq \alpha$$

W este definită de asemenea de

$$\{ \mathbf{x} : (\bar{x} - \mu_a) \sqrt{n} > u_{1-\alpha} + (\mu_0 - \mu_a) \sqrt{n} \}$$

și deoarece $\mu_0 - \mu_a > 0$, (43) este demonstrată. Astfel după teorema 9, W definește C.M.P. test pentru problema $(\alpha, P_{\mu_0}, P_{\mu_1})$. De observat că aceasta are loc pentru orice $\mu_a < \mu_0$. Este esențial pentru discuția următoare ca W definită de (42) să nu depindă de μ_1 . Deci avem următorul rezultat:

Fie P_μ , $\mu \in R_1$ măsura probabilistică pe $(R^n, \mathfrak{B}_n)$ a cărei densitate este dată de

$$(44) \quad x \rightarrow (1/\sqrt{2\pi})^n \exp \left\{ - \sum_1^n (x_i - \mu)^2/2 \right\}.$$

Fie $\Omega_1 = \{ \mu : \mu \geq \mu_0 \}$. Atunci regiunea critică W definită de (42) dă C.M.P. test în $\Omega_1 - \{ \mu_0 \}$ pentru problema

$$(\alpha, \{ \mu_0 \}, \Omega_1 - \{ \mu_0 \})$$

Din (43) urmează de asemenea că W definește C.M.P. test în $\Omega_1 - \mu_0$ pentru problema

$$(\alpha, (R_1 - \Omega_1) \cup \{\mu_0\}, \Omega_1 - \{\mu_0\}).$$

Dacă presupunem că $\mu_1 < \mu_0$, atunci din (40) urmează că pentru probleme $(\alpha, P_{\mu_0}, P_{\mu_1})$ C.M.P. test are regiunea critică

$$W_1 = \left\{ x : (\bar{x} - \mu_0) \sqrt{n} \leq \frac{\ln k}{\sqrt{n}(\mu_1 - \mu_0)} - (\mu_0 - \mu_1) \sqrt{n}/2 \right\}$$

k putînd fi calculat din

$$\frac{\ln k}{\sqrt{n}(\mu_1 - \mu_0)} - (\mu_0 - \mu_1) \sqrt{n}/2 = u_\alpha.$$

Regiunea critică W_1 este astfel dată de

$$(45) \quad \{x : (\bar{x} - \mu_0) \sqrt{n} \leq u_\alpha\}$$

care este, din nou, independentă de μ_1 . (45) dă C.M.P. test în $R_1 - \Omega_1$ pentru problema $(\alpha, \{\mu_0\}, R_1 - \Omega_1)$. Acest rezultat poate fi extins prin aplicarea teoremei 9.

Dacă $0 < \alpha < 1$, atunci regiunile critice W și W_1 definite de (42) și respectiv (45) nu sînt identice.

Considerăm ca mulțimea ipotezelor admisibile tot R_1 și $\{\mu_0\}$ ca ipoteză nulă. Urmează că W și W_1 în $R_1 - \{\mu_0\}$ nu dau teste C.M.P. pentru problema $(\alpha, \{\mu_0\}, R_1 - \{\mu_0\})$, $0 < \alpha < 1$.

Pentru fiecare $\mu \in R_1$, W poate fi definită ca

$$W = \{x : (\bar{x} - \mu) \sqrt{n} \geq u_{1-\alpha} + (\mu_0 - \mu) \sqrt{n}\}.$$

Astfel cu $k(\mu) = u_{1-\alpha} + (\mu_0 - \mu) \sqrt{n}$, obținem

$$\pi(\mu) = 1 - \Phi(k(\mu)), \mu \in R_1.$$

Funcția de putere π_1 , corespunzătoare regiunii W_1 pentru $\mu \in R_1$ cu $k_1(\mu) = u_\alpha + (\mu_0 - \mu) \sqrt{n}$, este

$$\pi_1(\mu) = \Phi(k_1(\mu)).$$

Deoarece, pentru $\mu < \mu_0$, $k(\mu) > -k_1(\mu)$, urmează că

$$\pi(\mu) < \pi_1(\mu).$$

Deci I_W nu poate fi C.M.P. test în $\mu < \mu_0$. În același mod pentru $\mu > \mu_0$, I_{W_1} nu poate fi C.M.P. test. Astfel, pentru problema $(\alpha, \{\mu_0\}, R_1 - \{\mu_0\})$ nu există C.M.P. test, deoarece C.M.P. test în $\Omega_1 - \mu_0$ este dat de I_W și în $R_1 - \Omega_1$ de I_{W_1} .

Astfel există C.M.P. test pentru ipotezele alternative $\mu < \mu_0$ sau $\mu > \mu_0$ însă nu există pentru alternativa bilaterală $\mu \neq \mu_0$.

§ 3. Repartiții cu raportul de verosimilități monoton și teste uniform cel mai puternice (U.C.M.P.)

3.1. Teste U.C.M.P.

În aplicații, în problemele de verificare a ipotezelor statistice, intervin familii de repartiții continue care depind de unul sau mai mulți parametri. O problemă simplă apare în cazul ipotezei unilaterale $H_0: \theta \leq \theta_0$. În general testul C.M.P. în raport cu alternativa $H_1: \theta_1 > \theta_0$ depinde de θ_1 și deci nu este U.C.M.P. Totuși există un test U.C.M.P. dacă familia de densități $p_\theta(x)$ ($p_\theta(x) > 0$ pentru orice x) are raportul de verosimilități monoton în sensul următor:

- există o funcție $T: R \rightarrow R_1$, $\mathcal{S}$ măsurabilă
- există o funcție crescătoare $\varphi: R \rightarrow [0, \infty]$ astfel încît pentru orice $\theta < \theta'$ densitățile p_θ și $p_{\theta'}$ sînt distincte și

$$(46) \quad \frac{p_{\theta'}(x)}{p_\theta(x)} = \varphi(T(x)) \text{ a.p.t în raport cu } \frac{1}{2} (P_\theta + P_{\theta'})$$

unde P este măsura probabilistică pe $(R, \mathcal{S})$ dominată de măsura μ , σ finită a cărei derivată Radon-Nicodým este p .

TEOREMA 10. *Fie θ un parametru real și fie X variabila aleatoare avînd densitatea de repartiție $p_\theta(x)$ cu raportul de verosimilități monoton în raport cu $T(x)$. În aceste condiții*

1) *Există un test U.C.M.P. la nivelul de semnificație α pentru verificarea ipotezei*

$$H_0: \theta \leq \theta_0 \text{ față de alternativa } H_1: \theta > \theta_0,$$

determinat de

$$(47) \quad \phi(x) = \begin{cases} 1, & T(x) > c, \\ \gamma, & T(x) = c, \\ 0, & T(x) < c \end{cases}$$

unde c și γ se determină din

$$(48) \quad \int \phi(x) p_{\theta_0}(x) d\mu = \alpha$$

2) *Funcția de putere a acestui test*

$$\pi(\theta) = \int \phi(x) p_\theta(x) d\mu$$

este strict crescătoare pentru toate punctele θ pentru care $\pi(\theta) < 1$.

3) *Pentru orice θ' testul determinat de (47) și (48) este U.C.M.P. pentru verificarea ipotezei $H_0: \theta \leq \theta'$ față de alternativa $H_1: \theta > \theta'$ la nivelul $\alpha' = \pi(\theta')$*

4) Pentru orice $\theta < \theta_0$ testul face minimă $\pi(\theta)$ pentru toate testele care satisfac (48).

Demonstrație. 1) și 2). Considerăm ipoteza $H_0: \theta = \theta_0$ în raport cu alternativa $H_1: \theta = \theta_1, \theta_1 > \theta_0$. Aplicînd lema Neyman-Pearson rezultă că testul C.M.P. este dat de

$$(49) \quad \phi(x) = \begin{cases} 1 & , \quad \frac{p_{\theta_1}}{p_{\theta_0}} > c_0, \\ \frac{\alpha - \alpha(c_0)}{\alpha(c_0 - 0) - \alpha(c_0)} & , \quad \frac{p_{\theta_1}}{p_{\theta_0}} = c_0, \\ 0 & , \quad \frac{p_{\theta_1}}{p_{\theta_0}} < c_0 \end{cases}$$

c_0 se determină din relația

$$\int \phi(x) p_{\theta_0}(x) d\mu = \alpha.$$

Avem

$$\gamma = \frac{\alpha - \alpha(c_0)}{\alpha(c_0 - 0) - \alpha(c_0)} \text{ iar din } \frac{p_{\theta_1}}{p_{\theta_0}} > 0 \text{ rezultă } T(x) > c_0,$$

ceea ce demonstrează 1) și 2).

Conform lemei Neyman-Pearson testul dat de (47) și (48) este de asemenea C.M.P. pentru verificarea ipotezei:

$H_0: \theta = \theta'$ față de alternativa $H_1: \theta = \theta''$ la nivelul $\alpha' = \pi(\theta')$ dacă $\theta' < \theta''$. Într-adevăr, dacă $\theta' < \theta''$ testul dat de (47) și (48) pentru verificarea ipotezei H_0 față de H_1 îndeplinește condițiile

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & p_{\theta''}(x) > c_0 p_{\theta'}(x) \\ 0, & p_{\theta''}(x) < c_0 p_{\theta'}(x) \end{cases}$$

și

$$\int \phi(x) p_{\theta'}(x) d\mu = \pi(\theta') = \alpha.$$

Conform teoremei 1 avem

$$\pi(\theta'') > \alpha' = \pi(\theta').$$

$\pi(\theta)$ fiind nedescrescătoare, avem

$$(50) \quad \int \phi(x) p_{\theta}(x) d\mu \leq \alpha, \quad \theta \leq \theta_0$$



(50) este mai restrictivă decât condiția

$$(51) \quad \int \phi(x) p_{\theta_0}(x) d\mu \leq \alpha$$

Deci clasa testelor care verifică (50) este cuprinsă în clasa testelor care verifică (51). Deoarece testul dat maximizează $\pi(\theta_1)$ în clasa testelor care verifică (51) va fi test de putere maximă și pentru clasa de teste care verifică (50). Însă acest test nu depinde de θ_1 , deci el este U.C.M.P. pentru verificarea ipotezei H_0 față de H_1 .

3) Am văzut că dacă $\theta' < \theta''$ și $\alpha' = \pi(\theta')$, testul obținut este C.M.P. pentru verificarea ipotezei

$$H_0: \theta = \theta' \text{ față de alternativa } H_1: \theta = \theta'' > \theta',$$

la nivelul α' . Înlocuind pe θ_0 cu θ' și α cu α' , raționând ca mai înainte obținem rezultatul dorit.

4) Pentru orice $\theta < \theta_0$ testul minimizează $\pi(\theta)$ (probabilitatea erorii de ordinul I) dintre toate testele care satisfac (48). Vom schimba rolul ipotezelor H_0 și H_1 . În acest caz eroarea de ordinul II va trece în eroarea de ordinul I din prima problemă. Știm că testul U.C.M.P. există și maximizează $\pi(\theta)$ cu $\theta < \theta_0$; deci va minimiza eroarea de ordinul II pentru problema cu ipotezele inversate, adică minimizează eroarea de ordinul I pentru problema inițială.

Observație. O clasă importantă de familii de repartiție, pentru care există un test U.C.M.P. pentru verificarea ipotezei

$$H_0: \theta \leq \theta_0 \text{ față de } H_1: \theta > \theta_0$$

este clasa repartițiilor exponențiale depinzând de un parametru, adică avînd densitatea

$$(52) \quad p_\theta = c(\theta) \exp [Q(\theta) T(x)] h(x),$$

unde $c(\theta) > 0$ și $Q(\theta)$ este strict crescător.

TEOREMA 11. Pentru clasa de repartiții (52) există un test U.C.M.P. pentru verificarea ipotezei

$$H_0: \theta \leq \theta_0 \text{ față de alternativa } H_1: \theta > \theta_0.$$

Testul este dat de

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & T(x) > c, \\ \gamma, & T(x) = c, \\ 0, & T(x) < c, \end{cases}$$

unde γ și c sînt determinați din

$$\int \phi(x) p_{\theta_0}(x) d\mu = \alpha.$$

Demonstrație. Fie $\theta' > \theta$

$$\frac{p_{\theta'}}{p_{\theta}} = \frac{c(\theta')}{c(\theta)} \exp \{ [Q(\theta') - Q(\theta)] T(x) \}.$$

Deoarece $Q(\theta)$ este o funcție crescătoare, $Q(\theta') - Q(\theta) > 0$; deci raportul este o funcție crescătoare de $T(x)$. Aceasta înseamnă că familia de densități are raportul de verosimilități monoton.

Conform teoremei 10 există un test U.C.M.P.

3.2. Proprietăți ale repartițiilor cu raportul de verosimilități monoton

Următoarea leamnă stabilește proprietăți de bază ale familiei cu raportul de verosimilități monoton.

LEMA 4. (Karlin (1957), Lehmann (1959)). Fie $p_{\theta}(x)$ o familie de densități pe dreapta reală cu raportul de verosimilități monoton în x .

i) Dacă ψ este o funcție nedescrescătoare de x , atunci $M_{\theta}\psi(X)$ este o funcție nedescrescătoare de θ ; dacă $X_1, \dots, X_n$ este o selecție asupra variabilei având densitatea $p_{\theta}(x)$ și ψ' este o funcție de $x_1, \dots, x_n$ care este nedescrescătoare în fiecare dintre aceste argumente, atunci $M_{\theta}\psi'(X_1, \dots, X_n)$ este o funcție nedescrescătoare de θ .

ii) Pentru orice $\theta < \theta'$ funcția de repartiție a variabilei X pentru θ și θ' satisface

$$F_{\theta'}(x) \leq F_{\theta}(x) \text{ pentru toți } x.$$

iii) Fie ψ o funcție care schimbă o singură dată semnul. Mai precis, presupunem că există o valoare x_0 astfel încât

$$\psi(x) \leq 0 \text{ pentru } x < x_0$$

și

$$\psi(x) \geq 0 \text{ pentru } x \geq x_0.$$

Atunci există θ_0 astfel încât

$$M_{\theta}\psi(X) \leq 0 \text{ pentru } \theta < \theta_0$$

și

$$M_{\theta}\psi(X) \geq 0 \text{ pentru } \theta > \theta_0$$

cu excepția cazului în care fie $M_{\theta}\psi(X)$ este pozitivă pentru toți θ sau negativă pentru toți θ .

Demonstrație. i) Fie $\theta < \theta'$ și

$$A = \{x : p_{\theta'}(x) < p_{\theta}(x)\},$$

$$B = \{x : p_{\theta'}(x) > p_{\theta}(x)\}$$

Dacă

$$a = \sup_A \psi(x) \text{ și } b = \inf_B \psi(x)$$

atunci $b - a \geq 0$ și

$$\begin{aligned} \int \psi(p_{\theta'} - p_{\theta}) d\mu &\geq a \int_A (p_{\theta'} - p_{\theta}) d\mu + b \int_B (p_{\theta'} - p_{\theta}) d\mu = \\ &= (b - a) \int_B (p_{\theta'} - p_{\theta}) d\mu \geq 0, \end{aligned}$$

ceea ce demonstrează prima presupunere. Rezultatul general pentru n urmează prin inducție.

ii) urmează din i) luând

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & x > x_0 \\ 0 & x \leq x_0 \end{cases}$$

iii) Vom arăta mai întâi că pentru orice $\theta' < \theta''$

$$M_{\theta'} \psi(X) > 0 \rightarrow M_{\theta''} \psi(X) \geq 0.$$

Dacă $p_{\theta''}(x_0)/p_{\theta'}(x_0) = \infty$, atunci $p_{\theta'}(x) = 0$ pentru $x \geq x_0$ și deci $M_{\theta'} \psi(X) \leq 0$. Prin urmare presupunem că

$$p_{\theta''}(x_0)/p_{\theta'}(x_0) = c < \infty.$$

Atunci $\psi(x) \geq 0$ pe mulțimea $S = \{x : p_{\theta'}(x) = 0 \text{ și } p_{\theta''}(x) > 0\}$ și

$$\begin{aligned} M_{\theta''} \psi(X) &\geq \int_S \psi \frac{p_{\theta''}}{p_{\theta'}} p_{\theta'} d\mu \geq \\ &\geq \int_{-\infty}^{x_0-} c \psi p_{\theta'} d\mu + \int_{x_0}^{\infty} c \psi p_{\theta'} d\mu = c M_{\theta'} \psi(X) \geq 0 \end{aligned}$$

Luând $\theta_0 = \inf\{\theta : M_{\theta} \psi(X) > 0\}$ rezultă lema.

Observație. Partea ii) a lemei arată că orice familie de repartiții cu raportul de verosimilități monoton în x este stohastic crescătoare. Reciproca nu are loc. Aceasta rezultă dacă considerăm densitatea repartiției Cauchy

$$\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + (x - \theta)^2}$$

Deoarece θ este un parametru de poziție, această familie este stohastic crescătoare; totuși raportul de verosimilități nu este monoton.

Lehmann (1959) în problema 10, capitolul 3 dă următoarea extensie a lemei 4.

LEMA 4' Fie P_0 și P_1 două repartiții cu densitate p_0 și p_1 astfel încât $p_1(x)/p_0(x)$ este o funcție nedescrescătoare de o statistică cu valori reale $T(x)$.

- i) Dacă T are densitatea p'_1 când repartiția originală este P_1 , atunci $p'_1(t)/p'_0(t)$ este nedescrescătoare în t .
 ii) $M_0\psi(T) \leq M_1\psi(T)$ pentru orice funcție nedescrescătoare ψ
 iii) Dacă $p_1(x)/p_0(x)$ este o funcție strict crescătoare de $t = T(x)$, același lucru este adevărat pentru $p'_1(t)/p'_0(t)$ și

$$M_0\psi(T) < M_1\psi(T)$$

în afară de cazul când $\psi(T)$ este constantă a.p.t. în raport cu $P_0 + P_1$ sau

$$M_0\psi(T) = M_1\psi(T) = \pm\infty.$$

iv) Pentru orice repartiții distincte cu densitățile p_0, p_1

$$(53) \quad -\infty \leq M_0 \ln \frac{p_1(X)}{p_0(X)} < M_1 \ln \frac{p_1(X)}{p_0(X)} \leq \infty.$$

Demonstrație. i) Fără a pierde din generalitate presupunem că $p_1(x)/p_0(x) = T(x)$. Atunci pentru orice funcție integrabilă

$$\int \phi(t) p'_1(t) d\nu(t) = \int \phi[T(x)] T(x) p_0(x) d\mu(x) = \int \phi(t) t p'_0(t) d\nu(t),$$

și deci $p'_1(t)/p'_0(t) = t$ a.p.t.

iv) Posibilitatea

$$M_0 \ln \frac{p_1(X)}{p_0(X)} = \infty$$

este exclusă deoarece din convexitatea funcției $\ln$,

$$M_0 \ln \frac{p_1(X)}{p_0(X)} \leq \ln M_0 \frac{p_1(X)}{p_0(X)} = 0.$$

Similar pentru M_1 . Inegalitatea strictă urmează din iii) cu $T(x) = p_1(x)/p_0(x)$.

3.3. Generalizarea lemei lui Neyman-Pearson

Următoarea teoremă este o generalizare a Teoremei 2.

TEOREMA 12 (Neyman, Pearson (1936 a), Dantzig, Wald (1951)).

Fie $f_1, \dots, f_{m+1}$ funcții cu valori reale definite pe spațiul euclidian $\mathcal{X}$ și μ integrabile și presupunem că pentru constantele $c_1, \dots, c_m$ dat există o funcție critică ϕ pentru care

$$(54) \quad \int \phi f_i d\mu = c_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Fie $\mathcal{C}$ clasa funcțiilor critice ϕ pentru care are loc (54).

i) Printre elementele clasei $\mathcal{C}$ există unul care face maximă

$$\int \phi f_{m+1} d\mu$$

ii) O condiție suficientă pentru ca un element al clasei să facă maximă

$$\int \phi f_{m+1} d\mu$$

este existența constantelor $k_1, \dots, k_m$ astfel încât

$$(55) \quad \phi(x) = \begin{cases} 1, & f_{m+1}(x) > \sum_{i=1}^m k_i f_i(x), \\ 0, & f_{m+1}(x) < \sum_{i=1}^m k_i f_i(x). \end{cases}$$

iii) Dacă un membru al familiei $\mathcal{C}$ satisface (55) cu

$$k_1, \dots, k_m \geq 0$$

atunci maximizează

$$\int \phi f_{m+1} d\mu$$

pentru toate funcțiile critice ce satisfac

$$(56) \quad \int \phi f_i d\mu \leq c_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

iv) Mulțimea punctelor E din spațiul m -dimensional ale căror coordonate sînt

$$\left(\int \phi f_1 d\mu, \dots, \int \phi f_m d\mu \right)$$

pentru o funcție critică ϕ este convexă și închisă. Dacă $(c_1, \dots, c_m)$ este un punct interior mulțimii E , [un punct interior mulțimii E relativ la spațiul m dimensional sau relativ la cel mai mic spațiu linear (de dimensiune $\leq m$) ce conține pe E] atunci există constantele $k_1, \dots, k_m$ și un test ϕ ce satisface (54) și (55) și condiția necesară pentru ca un membru al familiei $\mathcal{C}$ să facă maxima

$$\int \phi f_{m+1} d\mu$$

este ca (55) să aibă loc a.p.t. în raport cu μ .

TEOREMA 13. Fie $p_1, \dots, p_m, p_{m+1}$ densități în raport cu o măsură μ și fie $0 < \alpha < 1$. Atunci există un test ϕ astfel încât

$$M_i \phi(X) = \alpha \quad (i = 1, \dots, m)$$

și

$$M_{m+1} \phi(X) > \alpha$$

afară de cazul când $p_{m+1} = \sum_1^m k_i p_i$, a.p.t. în raport cu μ .

Demonstrație. Demonstrația se face prin inducție asupra lui m . Pentru $m = 1$, obținem teorema 3. Presupunem că a fost demonstrată pentru orice mulțime de m repartiții și considerăm cazul a $m + 1$ densități $p_1, \dots, p_{m+1}$. Dacă $p_1, \dots, p_m$ sînt liniar dependente, numărul densităților p_i poate fi redus și rezultatul urmează din ipoteza de inducție. Prin urmare presupunem că $p_1, \dots, p_m$ sînt liniar independente. Atunci pentru fiecare $j = 1, \dots, m$, prin ipoteza de inducție, există testele ϕ_j și ϕ'_j astfel încît

$$M_i \phi_j(X) = M_i \phi'_j(X) = \alpha$$

pentru toți $i = 1, \dots, j - 1, j + 1, \dots, m$

și

$$M_j \phi_j(X) < \alpha < M_j \phi'_j(X)$$

Urmează că punctul spațiului m -dimensional pentru care toate cele m coordonate sînt egale cu α este un punct interior mulțimii E astfel încît se poate aplica teorema (12) [pctul (iv)]. Tesul $\phi(x) \equiv \alpha$ este astfel încît

$$M_i \phi(X) = \alpha \text{ pentru } i = 1, \dots, m.$$

Dacă printre toate testele ce satisfac condițiile anterioare unul este cel mai puternic, va satisface (55). Deoarece $0 < \alpha < 1$, aceasta implică

$$p_{m+1} = \sum_1^m k_i p_i \text{ a.p.t. în raport cu } \mu$$

ceea ce trebuia demonstrat.

3.4. Teste U.C.M.P. pentru ipoteze bilaterale

Există teste U.C.M.P. nu numai pentru ipoteze unilaterale dar de asemenea și pentru ipoteze bilaterale de forma

$$(57) \quad H_0 : \theta \leq \theta_1 \text{ sau } \theta \geq \theta_2 \quad (\theta_1 < \theta_2).$$

Arătăm că pentru familiile exponențiale există un test U.C.M.P. pentru ipoteza (57).

TEOREMA 14. i) Pentru verificarea ipotezei $H_0(57)$ față de ipoteza alternativă

$$H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2$$

în familia exponențială ce depinde de un singur parametru există un test U.C.M.P. dat de

$$(58) \quad \phi(x) = \begin{cases} 1, & C_1 < T(x) < C_2 \\ \gamma_i, & T(x) = C_i, \quad i = 1, 2 \\ 0, & T(x) < C_1 \text{ sau } > C_2 \end{cases} \quad (C_1 < C_2)$$

unde C_i și γ_i ($i = 1, 2$) sînt determinate de

$$(59) \quad \int \phi(x) p_{\theta_1}(x) d\mu = \int \phi(x) p_{\theta_2}(x) d\mu = \alpha.$$

ii) Acest test minimizează

$$\int \phi(x) p_{\theta}(x) d\mu$$

cu condiția (59) pentru toți $\theta < \theta_1$ și $\theta > \theta_2$.

iii) Pentru $0 < \alpha < 1$, funcția de putere a acestui test are un maxim în punctul θ_0 dintre θ_1 și θ_2 și descrește strict cînd θ tinde de la θ_0 în fiecare direcție afară de cazul în care există două valori t_1 și t_2 astfel încît:

$$P_{\theta} \{T(X) = t_1\} + P_{\theta} \{T(X) = t_2\} = 1.$$

pentru toți θ .

Demonstrație. (Lehmann (1959)) i) Putem să ne restrîngem la statistică $T = T(X)$ a cărei repartiție este

$$dP_{\theta}(t) = C(\theta) e^{Q(\theta)t} d\nu(t)$$

unde presupunem că $Q(\theta)$ este strict crescătoare. Fie

$$\theta_1 < \theta' < \theta_2$$

și considerăm mai întîi problema maximizării $M_{\theta} \psi(T)$ supuse la condiția (59) cu $\phi(x) = \psi[T(x)]$. Dacă notăm prin E mulțimea tuturor punctelor

$$(M_{\theta_1} \psi(T), M_{\theta_2} \psi(T))$$

cînd ψ variază pe totalitatea funcțiilor critice, atunci punctul (α, α) este un punct interior al mulțimii E . Această afirmație rezultă din faptul că după teorema 3, mulțimea E conține punctele (α, u_1) și (α, u_2) cu $u_1 < \alpha < u_2$ și toate punctele (u, u) cu $0 < u < 1$.

Deci din teorema 12, punctul (iv) există constantele k_1, k_2 și testul $\psi_0(t)$ astfel că

$$\phi_0(x) = \psi_0 [T(x)]$$

satisface (59) și $\psi_0(t) = 1$ cînd

$$k_1 C(\theta_1) e^{Q(\theta_1)t} + k_2 C(\theta_2) e^{Q(\theta_2)t} < C(\theta') e^{Q(\theta')t}$$

și prin urmare când

$$a_1 e^{b_1 t} + a_2 e^{b_2 t} < 1, \quad b_1 < 0 < b_2$$

și $\psi_0(t) = 0$ când membrul stâng > 1 .

a_1 și a_2 nu pot fi simultan ≤ 0 , deoarece în acest caz testul conduce întotdeauna la respingerea ipotezei. Dacă unul dintre numerele $a_1, a_2 \leq 0$ și celălalt este ≥ 0 , membrul stâng este strict monoton și avem de-a face cu un test unilateral de tipul celui considerat în teorema 11, care are o funcție de putere strict monotonă și deci nu poate satisface (59). Deoarece atât a_1 cât și a_2 sînt pozitive, testul satisface (58). După teorema 12 punctul iii) testul minimizează de asemenea și

$$M_{\theta} \psi(T)$$

supus la condiția mai slabă

$$M_{\theta_i} \psi(T) \leq \alpha, \quad i = 1, 2.$$

Pentru a demonstra că acest test este U.C.M.P. pentru verificarea ipotezei H_0 , este necesar să arătăm că satisface condiția

$$M_{\theta} \psi(T) \leq \alpha \text{ pentru } \theta \leq \theta_1 \text{ și } \theta \geq \theta_2.$$

Acest lucru urmează din ii) prin comparare cu testul $\psi(t) \equiv \alpha$.

ii) Fie $\theta' < \theta_1$ și aplicăm teorema 12 punctul iv) pentru a minimiza $M_{\theta'} \phi(X)$ cu condiția (59). Împărțind prin $e^{Q(\theta_1)t}$ testul va avea regiunea critică de forma

$$a_1 e^{b_1 t} + a_2 e^{b_2 t} < 1 \quad (b_1 < 0 < b_2)$$

Astfel el coincide cu testul $\psi_0(t)$ obținut în (i). După teorema 12 punctul iv), prima și a treia condiție sînt necesare și testul optim este unic cu condiția ca $P\{T = C_i\} = 0$.

iii) Fără a micșora generalitatea luăm $Q(\theta) = 0$. Din i) și din continuitatea funcției

$$\pi(\theta) = M_{\theta} \phi(X)$$

urmează că fie $\pi(\theta)$ satisface iii) sau că există trei puncte

$$\theta' < \theta'' < \theta'''$$

astfel încît

$$\pi(\theta') = \pi(\theta'') = \pi(\theta''').$$

Dacă această valoare comună este c , deoarece

$$\pi(\theta') = 0 \text{ (sau } 1) \Rightarrow \phi(t) = 0 \text{ (sau } 1)$$

aproape peste tot în raport cu ν și aceasta este exclusă de (59), urmează că

$$0 < c < 1$$

După cum am văzut în demonstrarea punctului i), testul maximizează $M_0 \phi(X)$ supusă la condiția

$$M_{0'} \phi(X) = M_{0''} \Phi(X) = c$$

pentru toți $0' < 0 < 0''$ și posibilitatea

$$M_{0''} \Phi(X) = c$$

este exclusă de teorema 13 afară de cazul când

$$p_{0''} = k_1 p_{0'} + k_2 p_{0''}$$

aproape peste tot în raport cu ν .

Din presupunerile făcute în iii) urmează că există trei puncte t_1, t_2, t_3 , astfel încât

$$1 = k_1 \frac{p_{0'}(t_i)}{p_{0''}(t_i)} + k_2 \frac{p_{0''}(t_i)}{p_{0''}(t_i)}, i = 1, 2, 3$$

ceea ce este imposibil deoarece

$$[k_1 p_{0'}(t) + k_2 p_{0''}(t)] / p_{0''}(t)$$

este convexă.

Pentru a determina $C_1, C_2, \gamma_1, \gamma_2$ vom pleca cu valorile triviale C_1^*, γ_1^* , găsim C_2^*, γ_2^* astfel încât

$$\pi^*(\theta_1) = \alpha$$

și calculăm $\pi^*(\theta_2)$ care va fi fie foarte mare, fie foarte mică.

Pentru alegerea următoarei valori triviale, observăm că dacă

$$\pi^*(\theta_2) < \alpha,$$

regiunea de acceptare corectată este la dreapta celei alese, adică este satisfăcut

$$C_1 > C_1^* \text{ sau } C_1 = C_1^* \text{ și } \gamma_1 < \gamma_1^*$$

și invers dacă $\pi^*(\theta_2) > \alpha$. Aceasta este o consecință a lemei 4, aplicate la $T(x)$. Orice test ϕ^* ce satisface (58) și $\pi^*(\theta_1) = \alpha$ poate fi la dreapta fie la stînga testului ϕ satisfăcînd (58) și (59). Cum ϕ este la stînga sau la dreapta testului ϕ^* , funcția

$$\psi(t) = \phi^*(t) - \phi(t)$$

este monoton crescătoare sau descrescătoare și din lema $\pi^*(\theta_2) \geq \alpha$ sau $\leq \alpha$.

Cu toate că în familia exponențială există un test U.C.M.P. pentru verificarea ipotezei H_0 , pentru verificarea ipotezei $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ ($\theta_1 \leq \theta_2$) sau a ipotezei $\theta = \theta_0$ nu există un test U.C.M.P. Aceasta rezultă din considerarea testelor U.C.M.P. pentru ipotezele unilaterale

$$\theta \geq \theta_1 \text{ și } \theta \leq \theta_2.$$

Observație. Concluziile teoremei 14 rămân adevărate (Karlin (1957)) dacă densitatea p_θ a statisticii suficiente T , care fără a restrânge generalitatea va fi luată a fi X , satisface următoarele condiții.

a) $p_\theta(x)$ este continuă în x pentru fiecare θ ;

b) $p_{\theta'}(x)/p_\theta(x)$ este strict crescătoare în x pentru $\theta < \theta'$

$$c) \begin{vmatrix} p_{\theta_1}(x_1) & p_{\theta_1}(x_2) & p_{\theta_1}(x_3) \\ p_{\theta_2}(x_1) & p_{\theta_2}(x_2) & p_{\theta_2}(x_3) \\ p_{\theta_3}(x_1) & p_{\theta_3}(x_2) & p_{\theta_3}(x_3) \end{vmatrix} > 0 \text{ pentru toți } \begin{matrix} \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 \\ \text{și} \\ x_1 < x_2 < x_3 \end{matrix}$$

§ 4. Nedeplasare

4.1. Definiții. Punerea problemei

Fie $H_0 : \theta \in \Omega_0$ și $H_1 : \theta \in \Omega_1$ clasa alternativelor compuse.

DEFINIȚIA 12. (Neyman, Pearson (1936), (1938)). Un test pentru care funcția de putere $\pi_\phi(\theta) = M_\theta \phi(X)$ satisface condițiile

$$(60) \quad \begin{aligned} \pi_\phi(\theta) &\leq \alpha & \text{dacă } \theta \in \Omega_0 \\ \pi_\phi(\theta) &\geq \alpha & \text{dacă } \theta \in \Omega_1 \end{aligned}$$

poartă numere de test nedeplasat.

Observație. Ori de câte ori un test U.C.M.P. există, el este și nedeplasat deoarece puterea sa nu poate cădea sub puterea testului $\phi(x) \equiv \alpha$.

Testul U.C.M.P. nedeplasat există pentru o clasă mare de probleme pentru care testul U.C.M.P. nu există. În particular pentru anumite ipoteze de forma

$$\theta \leq \theta_0 \text{ sau } \theta = \theta_0$$

cînd repartiția variabilei sub cercetare depinde în afară de θ și de alți parametri.

Cînd $\pi_\phi(\theta)$ este o funcție continuă de θ , nedeplasarea implică

$$(61) \quad \pi_\phi(\theta) = \alpha \text{ pentru toți } \theta \in \omega$$

unde ω este frontiera comună a mulțimilor Ω_0 și Ω_1 adică mulțimea tuturor punctelor θ care sînt puncte limită atât pentru Ω_0 cît și pentru Ω_1 .

DEFINIȚIA 13. (Neyman, Pearson (1933)). Testele ce satisfac condiția (61) poartă numele de teste similare pe frontieră (a mulțimilor Ω_0 și Ω_1).

În aplicații condiția (61) este mai convenabilă decât condiția (60).

Următoarea leamnă joacă un rol important în determinarea testelor U.C.M.P. nedeplasate.

LEMA 5 (Lehmann (1950)). Dacă pentru repartițiile P funcția de putere a fiecărui test este continuă și dacă ϕ_0 este U.C.M.P. printre toate testele ce satisfac (61) și este de prag α pentru verificarea ipotezei H_0 , atunci ϕ_0 este U.C.M.P. nedeplasat.

Demonstrație. Clasa testelor ce satisfac (61) conține clasa testelor nedeplasate și deci ϕ_0 este uniform de putere cel puțin ca orice test nedeplasat. Pe de altă parte, ϕ_0 este nedeplasat deoarece este uniform cel puțin de putere ca $\phi(x) \equiv \alpha$.

4.2. Teste local cel mai puternice (L.C.M.P.)

Dacă mulțimea P_Ω este dominată de o măsură σ -finită, existența C.M.P. test este esențial echivalentă cu a cere ca densitățile Radon-Nicodym să posede raport de verosimilități monoton. Din punct de vedere practic și teoretic prezintă interes cercetarea funcției de putere a testului în vecinătatea ipotezei nule. Se pot considera de asemenea alternative îndepărtate de ipoteza nulă, ipotezele alternative apropiate de ipoteza nulă neprezentând interes. Deci este necesar să introducem ideea de distanță în mulțimea ipotezelor admisibile Ω . Până acum, nu am făcut presupuneri privind structura acestei mulțimi.

Exemplul 3. Fie P_μ repartiția $N(\mu, 1)$. Atunci o definiție naturală a distanței între două ipoteze μ_1 și μ_2 este $|\mu_1 - \mu_2|$. Deoarece la fiecare μ corespunde o singură repartiție P_μ , putem de asemenea folosi această distanță pentru a defini distanța δ între repartiții și anume

$$\delta(P_{\mu_1}, P_{\mu_2}) = |\mu_1 - \mu_2|$$

Putem întotdeauna să introducem o distanță în mulțimea tuturor măsurilor probabilistice pe un spațiu măsurabil $(R, \mathcal{S})$ prin

$$d(P_1, P_2) = \sup_{A \in \mathcal{S}} |P_1(A) - P_2(A)|$$

pentru fiecare pereche de măsuri P_1 și P_2 .

d posedă toate proprietățile unei metrici

$$d(P_1, P_2) = 0 \text{ dacă } P_1 = P_2$$

$$d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$$

$$d(P_1, P_3) \leq d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3).$$

Ultima proprietate rezultă din inegalitatea triunghiului pentru numere reale și din definiția supremului.

Incidental din $\delta(P_\mu, P_{\mu_0}) \rightarrow 0$ pentru $\mu \rightarrow \mu_0$ avem de asemenea $d(P_\mu, P_{\mu_0}) \rightarrow 0$ și reciproc. Această afirmație rezultă din următorul fapt: fie p_i densitatea Radon-Nicodým a măsurii P_i , $i = 1, 2$, în raport cu o măsură μ convenabilă, de exemplu $P_1 + P_2$. Atunci

$$(62) \quad d(P_1, P_2) = \frac{1}{2} \int_R |p_1 - p_2| d\mu.$$

Aceasta urmează din

$$\int_R (p_1 - p_2) d\mu = 0 \quad \text{și} \quad d(P_1, P_2) = \int_{\{x: p_1(x) - p_2(x) \geq 0\}} |p_1 - p_2| d\mu.$$

Aceste considerații sînt numai o ilustrare a următoarei teoreme.

TEOREMA 15 (Scheffé (1947)). *Fie $p_1, p_2, \dots$ un șir de densități, în raport cu măsura μ σ finită, care converge către densitatea p (în raport cu μ). Atunci $\int_R |p_n - p| d\mu \rightarrow 0$.*

Aceste observații sugerează următoarea definiție

DEFINIȚIA 14. Fie $\mathfrak{B}$ mulțimea ipotezelor admisibile pentru un test. Presupunem că poate fi introdusă o distanță în $\mathfrak{B}$ astfel încît $\mathfrak{B}$ poate fi pus în corespondență biunivocă și continuă cu o submulțime Ω a lui R^n , $n \geq 1$. Problema de verificat $(\Omega_0, \Omega - \Omega_0)$ este numită parametrică cînd ipoteza nulă Ω_0 și $\Omega - \Omega_0$ sînt submulțimi deschise sau închise ale lui R^n .

Definiția testului local cel mai puternic pe care o dăm aparține cadrului teoriei parametrice.

Ω mulțimea ipotezelor admisibile ale unei probleme este o submulțime a spațiului R^k , $k \geq 1$.

DEFINIȚIA 15. Fie $\theta_0 \in \Omega$, $\Omega - \{\theta_0\}$ deschisă, $0 \leq \alpha \leq 1$ și ϕ_α mulțimea tuturor testelor pentru problema $(\alpha, \{\theta_0\}, \Omega - \{\theta_0\})$. ϕ^* este numit local cel mai puternic (L.C.M.P.) pentru această problemă dacă pentru fiecare $\phi \in \phi_\alpha$ există o sferă deschisă $K_\phi \subset R^k$ cu centrul în θ_0 astfel încît $K_\phi \cap (\Omega - \{\theta_0\})$ este nevidă și pentru funcțiile de putere

$$(63) \quad \pi_{\phi^*}(\theta) \geq \pi_\phi(\theta)$$

are loc pentru toți $\theta \in K_\phi \cap (\Omega - \{\theta_0\})$.

În condiții generale există teste L.C.M.P.

TEOREMA 16. *Fie $\Omega = [\theta_0, \infty)$, P_Ω definită pe $(R, \mathfrak{S})$ și dominată de măsură μ σ finită și p_0 densitățile Radon-Nicodým în raport cu μ ale măsurilor P_θ . Cu excepția unei mulțimi de μ — măsură nulă, pentru toți θ din $[\theta_0, \theta_1)$, $\theta_0 < \theta_1$ și fiecare $x \in R$, aplicația*

$$\theta \rightarrow p_\theta(x)$$

este derivabilă (în θ_0 la dreapta). Există o funcție ψ μ -integrabilă astfel încît pentru $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$

$$(64) \quad \left| \frac{\partial}{\partial \theta} p_\theta \right| \leq \psi$$

a.p.t. în raport cu μ . Pentru fiecare k cu $-\infty \leq k \leq \infty$ presupunem

$$(65) \quad \mu \left\{ x : \frac{\partial}{\partial \theta} p_{\theta_0}(x) = k p_{\theta_0}(x) \right\} = 0.$$

Fiecare test ϕ^* de forma

$$(66) \quad \phi^*(x) = \begin{cases} 1 & , \quad \frac{\partial}{\partial \theta} p_{\theta_0}(x) > k p_{\theta_0}(x) \\ \text{un număr arbitrar} & , \quad \frac{\partial}{\partial \theta} p_{\theta_0}(x) = k p_{\theta_0}(x) \\ \text{în } [0, 1] & \\ 0 & , \quad \frac{\partial}{\partial \theta} p_{\theta_0}(x) < k p_{\theta_0}(x) \end{cases}$$

cu $-\infty \leq k \leq \infty$ este L.C.M.P. pentru problema $(\{\theta_0\}, \Omega - \{\theta_0\})^*$. Reciproc, dacă $\bar{\phi}$ este L.C.M.P. pentru problema $(\{\theta_0\}, \Omega - \{\theta_0\})$, atunci $\bar{\phi} = \phi^*$ a.p.t. în raport cu μ pentru un k convenabil ales.

Demonstrație. Fie ϕ_α mulțimea tuturor testelor pentru problema $(\alpha, \{\theta_0\}, \Omega - \{\theta_0\})$ și fie

$$\phi'_\alpha = \{\phi : \phi \in \phi_\alpha, M_{\theta_0}\phi = \alpha\}$$

Presupunem $0 < \alpha \leq 1$ și fie $\phi_1 \in \phi_\alpha$ cu

$$(67) \quad M_{\theta_0}\phi_1 = \alpha_1 < \alpha$$

Atunci există întotdeauna un test $\phi \in \phi'_\alpha$ ce satisface condiția $\phi_1 \leq \phi$ astfel că pentru funcțiile de putere are loc

$$(68) \quad \pi_\phi(\theta) \geq \pi_{\phi_1}(\theta)$$

pentru toți $\theta \in \Omega - \{\theta_0\}$. Aceasta rezultă după cum urmează: fie $\beta = (1 - \alpha)/(1 - \alpha_1)$. Din (67), $\beta < 1$. Pentru $x \in R$ definim

$$\phi(x) = (1 - \beta) + \beta \phi_1(x)$$

care are proprietatea dorită. Astfel este destul să arătăm că pentru alegerea convenabilă a lui k testul definit de (66) aparține mulțimii ϕ'_α și este L.C.M.P. pentru ϕ'_α . Existența lui k rezultă din teorema 2. Găsim

$$\int_R \phi^* \frac{\partial}{\partial \theta} p_{\theta_0} d\mu \geq \int_R \phi \frac{\partial}{\partial \theta} p_{\theta_0} d\mu$$

* În acest caz definim $0 \cdot \infty = 0$ și $-\infty \cdot 0 = -\infty$

Din (64) avem de asemenea

$$(69) \quad \frac{\partial}{\partial \theta} M_{\theta_0}(\phi^*) \geq \frac{\partial}{\partial \theta} M_{\theta_0}(\phi)$$

Dacă semnul $>$ apare în (69) atunci diferența funcțiilor de putere $\pi_{\phi^*} - \pi_{\phi}$ este local (strict) crescătoare în θ_0 . Deoarece

$$\pi_{\phi^*}(\theta_0) - \pi_{\phi}(\theta_0) = 0$$

într-un interval anumit care în general depinde de ϕ , avem

$$\pi_{\phi^*}(\theta) > \pi_{\phi}(\theta)$$

Totuși dacă în (69) avem egalitate, atunci ϕ trebuie să fie de forma

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \frac{\partial}{\partial \theta} p_{\theta_0}(x) > k p_{\theta_0}(x) \\ 0, & \frac{\partial}{\partial \theta} p_{\theta_0}(x) < k p_{\theta_0}(x) \end{cases}$$

a.p.t. în raport cu μ . Deci, din (65), $\phi = \phi^*$ a.p.t. în raport cu μ . Însă atunci

$$\pi_{\phi^*}(\theta) = \pi_{\phi}(\theta) \text{ pentru } \theta \in \Omega - \{\theta_0\}.$$

Fie acum $\bar{\phi}$ testul L.C.M.P. pentru problema $(\alpha, \{\theta_0\}, \Omega - \{\theta_0\})$. Atunci pentru fiecare $\phi \in \phi'_\alpha$ există un interval (θ_0, θ) în interiorul căruia

$$(70) \quad \pi_{\bar{\phi}}(\theta) \geq \pi_{\phi}(\theta)$$

Din (64) urmează că

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \pi_{\phi}(\theta) = \pi_{\phi}(\theta_0) = \alpha$$

și astfel din (70) avem de asemenea

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \pi_{\bar{\phi}}(\theta) = \pi_{\bar{\phi}}(\theta_0) = \alpha.$$

Aceasta, cu (70) dă pentru derivata la dreapta în θ_0

$$(71) \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \pi_{\bar{\phi}}(\theta_0) \geq \frac{\partial}{\partial \theta} \pi_{\phi}(\theta_0)$$

pentru fiecare $\phi \in \phi'_\alpha$. Folosind (64) și (65) găsim că $\bar{\phi}$ este de forma (66) a.p.t. în raport cu μ . Teorema este demonstrată.

Această teoremă asigură existența testelor L.C.M.P. pentru alternative unilaterale. Testul trivial care este întotdeauna $\equiv \alpha$, aparține mulțimii ϕ'_α . Deci, fiecare test L.C.M.P. ϕ^* este nedeplasat într-un interval $[\theta_0, \theta_1]$ convenabil ales. Aceste teste sînt numite local nedeplasate. Urmează că, în presupunerile teoremei 16, $\frac{\partial}{\partial \theta} \pi_{\phi^*}(\theta_0) \geq 0$. Aceste considerații sugerează posibilitatea construirii de teste pentru ipoteza nulă simplă și alternative bilaterale, care, cel puțin pentru clasa tuturor testelor local nedeplasate, sînt L.C.M.P.

Are loc

TEOREMA 17. Fie P_Ω , μ și p_0 cu aceleași semnificații ca în teorema 16. Pentru toți θ din $(\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ și fiecare $x \in R$, cu excepția unei mulțimi de μ -măsură nulă, considerăm aplicația $\theta \rightarrow p_\theta(x)$ de două ori derivabilă. Presupunem că $\frac{\partial}{\partial \theta} p_{\theta_0}$ este μ -integrabilă și că există o funcție ψ -integrabilă definită pe R astfel că în $(\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon)$

$$(72) \quad \left| \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} p_\theta(x) \right| \leq \psi(x)$$

a.p.t. în raport cu μ . De asemenea presupunem că pentru toți l_1, l_2 reali

$$(73) \quad \mu \left\{ x : \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} p_{\theta_0}(x) = l_1 \frac{\partial}{\partial \theta} p_{\theta_0}(x) + l_2 p_{\theta_0}(x) \right\} = 0.$$

Fie ψ_α mulțimea tuturor testelor local nedeplasate pentru problema $(\alpha, \{\theta_0\}, \Omega - \{\theta_0\})$. Atunci fiecare test de forma

$$(74) \quad \phi^*(x) = \begin{cases} 1 & , \quad \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} p_{\theta_0}(x) > l_1 \frac{\partial}{\partial \theta} p_{\theta_0}(x) + l_2 p_{\theta_0}(x) \\ \text{un număr arbitrar} & , \quad \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} p_{\theta_0}(x) = l_1 \frac{\partial}{\partial \theta} p_{\theta_0}(x) + l_2 p_{\theta_0}(x) \\ \text{în } [0, 1] & \\ 0 & , \quad \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} p_{\theta_0}(x) < l_1 \frac{\partial}{\partial \theta} p_{\theta_0}(x) + l_2 p_{\theta_0}(x) \end{cases}$$

cu $-\infty < l_1, l_2 < \infty$ este L.C.M.P. în raport cu ψ_α dacă α este dat de

$$(75) \quad \alpha = M_{\theta_0}(\phi^*)$$

și dacă l_1, l_2 pot fi determinați astfel încît

$$(76) \quad \int_R \frac{\partial}{\partial \theta} p_{\theta_0} \phi^* d\mu = 0.$$

Mai mult, pentru fiecare test $\bar{\phi}$ L.C.M.P. în raport cu ψ_α , $\bar{\phi} = \phi^*$ a.p.t. în raport cu μ .

Demonstrația urmează esențial pe aceea a teoremei 16, însă trebuie să folosim teorema 2. De asemenea putem să ne restrângem atenția la submulțimea ψ'_α a mulțimii ψ_α pentru ale cărei elemente avem $M_{\theta_0}(\phi) = \alpha$. Deoarece toate testele ϕ sînt local nedeplasate funcția de putere π_ϕ are un minim local în θ_0 . Din (72), toate testele $\phi \in \psi'_\alpha$ satisfac condițiile

$$\int_R p_{\theta_0} \phi \, d\mu = \alpha, \quad \int_R \frac{\partial}{\partial \theta} p_{\theta_0} \phi \, d\mu = 0.$$

Din (75) și (76), urmează că ϕ^* satisface

$$\int_R \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} p_{\theta_0} \phi^* \, d\mu = \max_{\phi \in \psi'_\alpha} \int_R \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} p_{\theta_0} \phi \, d\mu.$$

Dacă

$$\int_R \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} p_{\theta_0} \phi^* \, d\mu > \int_R \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} p_{\theta_0} \phi \, d\mu,$$

atunci ținînd seama de (72) obținem

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (\pi_{\phi^*}(\theta_0) - \pi_\phi(\theta_0)) > 0.$$

Deoarece

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\pi_{\phi^*}(\theta_0) - \pi_\phi(\theta_0)) = 0,$$

$\pi_{\phi^*} - \pi_\phi$ are un minim local în θ_0 , ceea ce demonstrează teorema.

Exemplul 4. Fie P_{R_1} mulțimea tuturor repartițiilor normale n -dimensionale cu densitățile

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (1/\sqrt{2\pi})^n \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_1^n (x_i - \mu)^2 \right]$$

Ne propune să verificăm problema $(\alpha, \{\mu_0\}, R_1 - \{\mu_0\})$. Densitățile satisfac presupunerile teoremei 17, ceea ce se poate vedea din relația

$$\exp \left[-\frac{1}{2} \sum_1^n (x_i - \mu)^2 \right] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_1^n (x_i - \bar{x})^2 \right\} \exp \left\{ -\frac{n}{2} (\bar{x} - \mu)^2 \right\}.$$

Testul

$$\phi^*(x) = \begin{cases} 1 & n^2(\bar{x} - \mu_0)^2 - n > l_2 + l_1 n(\bar{x} - \mu_0) \\ 0 & n^2(\bar{x} - \mu_0)^2 - n < l_2 + l_1 n(\bar{x} - \mu_0) \end{cases}$$

corespunde formulei (74). Dacă l_1, l_2 sînt alese astfel încît

$$l_1 = 0 \text{ și } \sqrt{1 + l_2/n} = u_{1-\frac{\alpha}{2}},$$

atunci

$$\phi^*(x) = \begin{cases} 1, & \sqrt{n} |\bar{x} - \mu_0| > u_{1-\frac{\alpha}{2}} \\ 0, & \sqrt{n} |\bar{x} - \mu_0| < u_{1-\frac{\alpha}{2}} \end{cases}$$

și ϕ^* satisface (75), și (76).

Fie Δ_α mulțimea tuturor testelor ϕ pentru problema $(\alpha, \{\theta_0\}, R_1 - \{\theta_0\})$ a cărei funcție de putere π_ϕ este de două ori derivabilă în θ_0 și satisface

$$(77) \quad \pi_\phi(\theta_0) = \alpha, \quad \frac{d}{d\theta} \pi_\phi(\theta_0) = 1.$$

DEFINIȚIA 16 (Neyman). Un test $\phi^* \in \Delta_\alpha$ care pentru toți $\phi \in \Delta_\alpha$ satisface

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \pi_{\phi^*}(\theta_0) \geq \frac{d^2}{d\theta^2} \pi_\phi(\theta_0),$$

poartă numele de test de tipul A.

Teorema 17 stabilește că în condițiile date există întotdeauna un test de tipul A. Funcția de putere a testului de tip A are curbura maximă în θ_0 .

În cele ce urmează considerăm cazul în care θ este multidimensional. Pentru simplificarea scrierii, fie R_2 mulțimea ipotezelor admisibile și $\theta_0 \in R_2$. Fie $\Delta_\alpha^{(1)}$ mulțimea tuturor testelor ϕ pentru problema $(\alpha, \{\theta_0\}, R_2 - \{\theta_0\})$ a cărei funcții de putere π_ϕ are proprietatea:

π_ϕ posedă toate derivatele de ordinul unu și doi în θ_0

$$(78) \quad \pi_\phi(\theta_0) = \alpha,$$

$$(79) \quad \frac{\partial \pi_\phi(\theta_0)}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, 2; \quad \theta = (\theta_1, \theta_2)$$

$$(80) \quad \frac{\partial^2 \pi_\phi(\theta_0)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} = 0$$

$$(81) \quad \frac{\partial^2 \pi_\phi(\theta_0)}{\partial \theta_1^2} = \frac{\partial^2 \pi_\phi(\theta_0)}{\partial \theta_2^2}.$$

Fie $\Delta_\alpha^{(2)}$ mulțimea tuturor testelor ϕ pentru aceeași problemă ale căror funcții de putere îndeplinesc (78), (79) și în plus

$$(82) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \pi_\phi(\theta_0)}{\partial \theta_1^2} & \frac{\partial^2 \pi_\phi(\theta_0)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \\ \frac{\partial^2 \pi_\phi(\theta_0)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \frac{\partial^2 \pi_\phi(\theta_0)}{\partial \theta_2^2} \end{vmatrix} > 0$$

DEFINIȚIA 17. (Neyman, Pearson, 1938). Testul ϕ^* este de tipul C pentru problema $(\alpha, \{\theta_0\}, R_2 - \{\theta_0\})$ dacă este fie în $\Delta_\alpha^{(1)}$ și funcția sa de putere π_{ϕ^*} satisface

$$(83) \quad \frac{\partial^2 \pi_{\phi^*}(\theta_0)}{\partial \theta_1^2} \geq \frac{\partial^2 \pi_{\phi}(\theta_0)}{\partial \theta_1^2}$$

pentru toți $\phi \in \Delta_\alpha^{(1)}$ sau dacă este în $\Delta_\alpha^{(2)}$ și pentru toți $\phi \in \Delta_\alpha^{(2)}$ satisface

$$(84) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \pi_{\phi^*}(\theta_0)}{\partial \theta_1^2} : \frac{\partial^2 \pi_{\phi}(\theta_0)}{\partial \theta_1^2} &= \frac{\partial^2 \pi_{\phi^*}(\theta_0)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} : \frac{\partial^2 \pi_{\phi}(\theta_0)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} = \\ &= \frac{\partial^2 \pi_{\phi^*}(\theta_0)}{\partial \theta_2^2} : \frac{\partial^2 \pi_{\phi}(\theta_0)}{\partial \theta_2^2} = \alpha_{\phi} \geq 1. \end{aligned}$$

DEFINIȚIA 18. Die Δ_α mulțimea tuturor testelor ale căror funcții de putere posedă toate derivatele de ordinul unu și doi în θ_0 și care satisfac (78) și (79). Un test $\phi^* \in \Delta_\alpha$ este de tipul D dacă funcția sa de putere π_{ϕ^*} are curbura totală maximă în θ_0 în raport cu toate celelalte funcții de putere $\phi \in \Delta_\alpha$.

Construcția acestor teste precum și unele generalizări sînt date de Neyman (1935), Isaacson (1951) și Nandi (1951).

4.3. Familii exponențiale cu un parametru

Fie θ un parametru real și $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ un vector aleator cu densitatea

$$p_\theta(x) = C(\theta) e^{\theta T(x)} h(x)$$

în raport cu o măsură μ .

Există teste U.C.M.P. pentru verificarea ipotezei

i) $H_0: \theta \leq \theta_0$ față de $H_1: \theta \geq \theta_0$ (teorema 11)

ii) $H_0: \theta \leq \theta_1$ sau $\theta \geq \theta_2$ ($\theta_1 < \theta_2$)
față de

$$H_1: \theta_1 < \theta < \theta_2 \text{ (teorema 14)}$$

însă nu există pentru

iii) $H_0: \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ față de $H_1: \theta < \theta_1$ sau $\theta > \theta_2$.

TEOREMA 18. În cazul iii) există un test U.C.M.P. nedepășat dat de

$$(85) \quad \phi(x) = \begin{cases} 1, & T(x) < C_1 \text{ sau } > C_2 \\ \gamma_i, & T(x) = C_i; i = 1, 2 \\ 0, & C_1 < T(x) < C_2 \end{cases}$$

unde C_1, C_2 și γ_1, γ_2 sînt determinați de

$$(86) \quad M_{\theta_1} \phi(X) = M_{\theta_2} \phi(X) = \alpha.$$

Demonstrație. Funcția de putere $M_0\phi(X)$ este continuă astfel încât se poate aplica lema 5. Mulțimea ω constă din două puncte θ_1 și θ_2 și prin urmare vom considera mai întâi problema maximizării funcției $M_{\theta'}\phi(X)$ pentru θ' din afara intervalului $[\theta_1, \theta_2]$, supusă la condiția (86).

Dacă această problemă este reformulată în termeni de $1 - \phi(x)$, din partea ii) a teoremei 14 urmează că soluția sa este dată de (85) și (86). Prin urmare acest test este U.C.M.P. prin acelea care satisfac (86) și deci după lema 5 este U.C.M.P. nedeplasat.

Din partea iii) a teoremei urmează că funcția de putere a testului are un minim într-un punct între θ_1 și θ_2 , și este strict crescătoare când θ tinde de la acest minim în fiecare direcție.

TEOREMA 19. Pentru verificarea ipotezei $H_0: \theta = \theta_0$ față de alternativa $H_1: \theta \neq \theta_0$ există un test U.C.M.P. nedeplasat dat de (85) cu constantele determinate de

$$(87) \quad M_{\theta_0}\phi(X) = \alpha$$

și

$$(88) \quad M_{\theta_0}[T(X)\phi(X)] = M_{\theta_0}[T(X)]\alpha.$$

Demonstrație. Fie θ' orice valoare specificată de ipoteza H_1 . Ne restringem atenția la statistica suficientă T a cărei repartiție este de forma

$$dP_{\theta}(t) = C(\theta) e^{\theta t} dv(t).$$

Nedeplasarea testului $\psi(t)$ implică (87) cu $\phi(x) = \psi[T(x)]$; de asemenea că funcția de putere $\pi(\theta) = M_{\theta}[\psi(T)]$ trebuie să aibă un minim în $\theta = \theta_0$. Funcția $\pi(\theta)$ este derivabilă și derivata poate fi calculată prin derivarea lui $M_{\theta}\psi(T)$ sub semnul valoare medie, astfel că pentru toate testele $\psi(t)$

$$\pi'(\theta) = M_{\theta}[T\psi(T)] + \frac{C'(\theta)}{C(\theta)} M_{\theta}[\psi(T)].$$

Pentru $\psi(t) \equiv \alpha$, această ecuație devine

$$0 = M_0(T) + \frac{C'(\theta)}{C(\theta)}.$$

Ținând seama de aceasta în expresia pentru $\pi'(\theta)$, obținem

$$\pi'(\theta) = M_{\theta}[T\psi(T)] - M_{\theta}(T) M_{\theta}[\psi(T)]$$

și deci nedeplasarea implică (88).

Fie E mulțimea punctelor

$$(M_{\theta_0}[\psi(T)], M_{\theta_0}[T\psi(T)])$$

când ψ variază pe totalitatea funcțiilor critice.

Mulțimea E este convexă și conține toate punctele

$$(u, uM_{\theta_0}(T)) \text{ cu } 0 < u < 1.$$

Ea conține de asemenea punctele (α, u_2) cu $u_2 > \alpha M_{\theta_0}(T)$. Această afirmație rezultă din faptul că există teste cu

$$M_{\theta_0}[\psi(T)] = \alpha \text{ și } \pi'(\theta_0) > 0$$

Deoarece E conține punctele

$$(\alpha, u_1) \text{ cu } u_1 < \alpha M_{\theta_0}(T),$$

punctul $(\alpha, \alpha M_{\theta_0}(T))$ este un punct interior al mulțimii E . Din teorema 12 (iv) urmează că există constantele k_1 și k_2 și un test $\psi(t)$ ce satisface (87) și (88) cu $\phi(x) = \psi[T(x)]$ astfel încît $\psi(x) = 1$ cînd

$$C(\theta_0) (k_1 + k_2) e^{\theta_0 t} < C(\theta') e^{\theta' t}$$

și prin urmare, cînd

$$a_1 + a_2 t < e^{b t}$$

Această regiune este fie unilaterală sau în afara unui interval. Din teorema 10 (ii) un test unilateral are funcția de putere strict monotonă și prin urmare nu poate satisface (88). Astfel $\psi(t) = 1$ cînd $t < C_1$ sau $> C_2$ și C.M.P.T. supus condițiilor (87) și (88) este dat de (85). Acest test este nedeplasat, ceea ce rezultă prin compararea sa cu $\phi(x) \equiv \alpha$. De asemenea este U.C.M.P. nedeplasat deoarece clasa testelor ce satisfac (87) și (88) include clasa testelor nedeplasate.

Observații. i) Avem o simplificare a acestui test dacă pentru $\theta = \theta_0$ repartiția statisticii T este simetrică față de un punct a , adică dacă pentru toți u reali

$$P_{\theta_0}\{T < a - u\} = P_{\theta_0}\{T > a + u\}.$$

Orice test care este simetric față de a și satisface (87) trebuie de asemenea să satisfacă (88) deoarece

$$M_{\theta_0}[T\psi(T)] = M_{\theta_0}[(T - a)\psi(T)] + aM_{\theta_0}\psi(T) = a\alpha = M_{\theta_0}(T)\alpha.$$

Prin urmare C_1 , C_2 și γ_1 , γ_2 sînt determinate din condițiile

$$P_{\theta_0}\{T < C_1\} + \gamma_1 P_{\theta_0}\{T = C_1\} = \frac{\alpha}{2}.$$

$$C_2 = 2a - C_1, \quad \gamma_2 = \gamma_1.$$

ii) Testele pentru verificarea ipotezelor $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ și $\theta = \theta_0$ sînt *strict nedeplasate* în sensul că puterea este $> \alpha$ pentru toate alternativele θ . Pentru primul din aceste teste, dat de (85) și (86), nedeplasarea strictă este o consecință a teoremei 14 punctul iii). Aceasta stabilește că puterea testului are un minim în punctul θ_0 dintre θ_1 și θ_2 și crește strict cînd θ se îndepărtează de la θ_0 în fiecare direcție.

Al doilea test determinat de (85), (87) și (88), are funcția de putere continuă cu minimul α în $\theta = \theta_0$. Astfel există

$$\theta_1 < \theta_0 < \theta_2$$

astfel încît

$$\pi(\theta_1) = \pi(\theta_2) = C, \quad \alpha \leq C < 1.$$

Prin urmare testul coincide cu testul U.C.M.P. nedeplasat la pragul α pentru ipoteza $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ și puterea crește strict cînd θ se îndepărtează de la θ_0 în fiecare direcție. Aceasta dovedește afirmația făcută.

Exemplul 5. Fie X numărul de succese în n probe binomiale, cu probabilitatea succesului p în fiecare probă. Ne propunem să verificăm ipoteza

$$H_0: p = p_0.$$

Testul U.C.M.P. nedeplasat pentru verificarea ipotezei H_0 este dat de (S5) cu $T(X) = X$. Condiția (87) devine

$$\sum_{x=C_1+1}^{C_2-1} C_n^x p_0^x q_0^{n-x} + \sum_{i=1}^2 (1 - \gamma_i) C_n^{C_i} p_0^{C_i} q_0^{n-C_i} = 1 - \alpha,$$

și membrul stîng al acestei relații poate fi obținut din tabele.

Cu ajutorul identității

$$xC_n^x p_0^x q_0^{n-x} = np_0 C_{n-1}^{x-1} p_0^{x-1} q_0^{(n-1)-(x-1)}.$$

condiția (88) devine

$$\sum_{x=C_1+1}^{C_2-1} C_{n-1}^{x-1} p_0^{x-1} q_0^{(n-1)-(x-1)} + \sum_{i=1}^2 (1 - \gamma_i) C_{n-1}^{C_i-1} p_0^{C_i-1} q_0^{(n-1)-(C_i-1)} = 1 - \alpha$$

și membrul stîng al acestei relații poate fi obținut din tabele.

Cînd n crește, $(X - np_0)/\sqrt{np_0 q_0} \sim N(0, 1)$. Pentru selecții care nu sînt mici și valori ale lui p_0 care nu sînt apropiate de 0 sau 1, repartiția variabilei X este simetrică în raport cu originea. În acest caz, testul cu cozi egale, pentru care C_1, C_2 și γ_1, γ_2 sînt determinate din

$$\sum_{x=0}^{C_1-1} C_n^x p_0^x q_0^{n-x} + \gamma_1 C_n^{C_1} p_0^{C_1} q_0^{n-C_1} = \gamma_2 C_n^{C_2} p_0^{C_2} q_0^{n-C_2} + \sum_{x=C_2+1}^n C_n^x p_0^x q_0^{n-x} = \frac{\alpha}{2},$$

este aproximativ nedeplasat. Cînd n este suficient de mare, constantele pot fi determinate, direct cu ajutorul repartiției normale.

Exemplul 6. Fie $X_1, \dots, X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare $X \sim N(0, \sigma^2)$. $T(x) = \sum x_i^2$ este o statistică suficientă pentru σ^2 și este repartizată $\chi^2(n)$. Pentru diferite valori ale lui σ aceste repartiții formează o familie exponențială.

Regiunea de acceptare a testului U.C.M.P. nedeplasat pentru verificarea ipotezei $H_0: \sigma = \sigma_0$ este

$$C_1 \leq \sum x_i^2 / \sigma_0^2 \leq C_2$$

cu

$$\int_{c_1}^{c_2} h_n(y) dy = 1 - \alpha; \quad h_n(y) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}$$

și

$$\int_{c_1}^{c_2} y h_n(y) dy = (1 - \alpha) M_{\sigma_0}(\Sigma X_i^2) / \sigma_0^2 = n(1 - \alpha).$$

Ținînd seama că

$$y h_n(y) = n h_{n+2}(y),$$

condiția a doua se scrie

$$\int_{c_1}^{c_2} h_{n+2}(y) dy = 1 - \alpha.$$

Alternativ putem integra prin părți

$$\int_{c_1}^{c_2} y h_n(y) dy$$

și obținem pentru condiția a doua

$$C_1^{\frac{n}{2}} e^{-C_1/2} = C_2^{\frac{n}{2}} e^{-C_2/2}.$$

În afară de cazul în care n este foarte mic sau σ_0 foarte apropiat de 0 sau ∞ , testul cozilor egale dat de

$$C_1 = \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n), \quad C_2 = \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)$$

și este o aproximație bună a testului nedeplasat. Aceasta rezultă din faptul că T convenabil normalizat tinde către o variabilă normală, și deci avem o repartiție simetrică.

4.4. Similaritate

În multe probleme importante de verificare a ipotezelor statistice ipotezele privesc un singur parametru real, dar repartiția variabilelor aleatoare observate depinde în plus de anumiți parametri.

Pentru o clasă largă de astfel de probleme există teste U.C.M.P. nedeplasate și pot fi găsite prin metoda indicată în lema 5. Aceasta cere caracterizarea testului ϕ , care satisface

$$M_0 \phi(X) = \alpha$$

pentru toate repartițiile variabilei X ce aparțin la o familie dată $\mathcal{Q}_\omega^X$.

Testele care se bucură de această proprietate poartă numele de *teste similare* în raport cu $\mathfrak{E}_\omega^X$ sau ω deoarece dacă ϕ nu este aleator cu regiunea critică S , ultimul este similar cu spațiul de selecție.

Fie T o statistică suficientă pentru $\mathfrak{E}_\omega^X$ și fie $\mathfrak{E}_\omega^T$ familia repartițiilor $\{P_\theta^T, \theta \in \omega\}$ statisticii T când θ variază în ω . Atunci orice test ce satisface

$$(89) \quad M[\phi(X)|t] = \alpha \text{ a.p.t. în raport cu } \mathfrak{E}_\omega^T$$

este similar în raport cu $\mathfrak{E}_\omega^X$ deoarece atunci

$$M_\theta[\phi(X)] = M_\theta\{M[\phi(X)|T] = \alpha \text{ pentru toți } \theta \in \omega.$$

DEFINIȚIA 19. Spunem că un test are structura Neyman în raport cu T dacă satisface (89).

Testul cu structura Neyman este caracterizat prin faptul că probabilitatea de respingere condiționată este α pe fiecare suprafață $T = t$. Deoarece repartiția pe o astfel de suprafață este independentă de θ pentru $\theta \in \omega$, condiția (89) reduce problema la verificarea unei ipoteze simple pentru fiecare t . Se obține frecvent cel mai puternic test printre acelea având structura Neyman, prin rezolvarea problemei de optim pe fiecare suprafață separat. Atunci testul rezultat este cel mai puternic printre toate testele similare cu condiția ca fiecare test similar să aibe structura Neyman.

TEOREMA 20. Fie X o variabilă aleatoare cu repartiția $P \in \mathfrak{E}$ și fie T o statistică suficientă pentru $\mathfrak{E}$. Atunci o condiția necesară și suficientă pentru toate testele similare de a avea structura Neyman în raport cu T este ca familia $\mathfrak{E}^T$ a repartițiilor statisticii T să fie complet mărginită.

Demonstrație. Mai întâi presupunem că $\mathfrak{E}^T$ este complet mărginită și fie $\phi(X)$ similar în raport cu $\mathfrak{E}$. Atunci

$$M[\phi(X) - \alpha] = 0 \text{ pentru toți } P \in \mathfrak{E}$$

și deci, dacă $\psi(t)$ reprezintă media condiționată a variabilei $\phi(X) - \alpha$ dat t

$$M\psi(T) = 0 \text{ pentru } P^T \in \mathfrak{E}^T.$$

Deoarece $\psi(t)$ este mărginit din mărginirea completă $\mathfrak{E}^T$ urmează că $\psi(t) = 0$ și deci

$$M[\phi(X)|t] = \alpha \text{ a.p.t. în raport cu } \mathfrak{E}^T$$

ceea ce trebuia dovedit.

Reciproc presupunem că $\mathfrak{E}^T$ nu este mărginită complet. Atunci există o funcție f astfel încât $|f(t)| \leq M$ pentru anumiți M , că $Mf(T) = 0$ pentru toți $P^T \in \mathfrak{E}^T$ și $f(t) \neq 0$ cu probabilitate pozitivă pentru anumiți $P^T \in \mathfrak{E}^T$. Fie

$$\phi(t) = cf(t) + \alpha,$$

unde $c = \min(\alpha, 1 - \alpha)/M$. Atunci ϕ este o funcție critică deoarece $0 \leq \phi(t) \leq 1$ și este similar deoarece $M\phi(T) = \alpha$ pentru toți $P^T \in \mathfrak{E}^T$. Dar ϕ nu are structura Neyman deoarece $\phi(T) \neq \alpha$ cu probabilitate pozitivă pentru cel puțin o repartiție din $\mathfrak{E}^T$.

4.5. Teste U.C.M.P. nedepasate pentru familii exponențiale cu mai mulți parametri

Fie X repartizată în concordanță cu

$$(90) \quad dP_{\theta, \vartheta}^X(x) = C(\theta, \vartheta) \exp \left[\theta U(x) + \sum_{i=1}^k \vartheta_i T_i(x) \right] d\mu(x), (\theta, \vartheta) \in \Omega$$

unde

$$\vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_k) \text{ și } T = (T_1, \dots, T_k).$$

Vom considera verificarea ipotezei

H_0	față de	H_1
i) $\theta \leq \theta_0$		$\theta > \theta_0$
ii) $\theta \leq \theta_1$ sau $\theta \geq \theta_2$		$\theta_1 < \theta < \theta_2$
iii) $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$		$\theta < \theta_1$ sau $\theta > \theta_2$
iv) $\theta = \theta_0$		$\theta \neq \theta_0$

Vom presupune că spațiul parametrilor Ω este convex și că este de dimensiune $k + 1$, adică că nu este conținut într-un spațiu liniar de dimensiune $< k + 1$. În particular acesta este cazul cînd Ω este spațiul parametrilor naturali ai familiei exponențiale. Vom presupune de asemenea că în Ω există puncte cu θ mai mic sau mai mare decît θ_0, θ_1 și respectiv θ_2 .

Ne puteam restrînge atenția la statisticile suficiente (U, T) care au repartiția comună

$$dP_{\theta, \vartheta}^{U, T}(u, t) = C(\theta, \vartheta) \exp \left(\theta u + \sum_{i=1}^k \vartheta_i t_i \right) dv(u, t), (\theta, \vartheta) \in \Omega$$

Cînd $T = t$ este dat, U este singura variabilă rămasă și repartiția variabilei U dat t constituie o familie exponențială

$$dP_{\theta}^{U|t}(u) = C_t(\theta) \exp(\theta u) dv_t(u).$$

În aceste condiții, după teorema 11, pentru verificarea ipotezei i) există un test U.C.M.P. cu funcția critică ϕ_1 ce satisface

$$(91) \quad \phi(u, t) = \begin{cases} 1 & , u > C_0(t) \\ \gamma_0(t), & u = C_0(t) \\ 0 & , u < C_0(t) \end{cases}$$

unde funcțiile C_0 și γ_0 sînt determinate de

$$(93) \quad M_{\theta_1} [\phi_1(U, T) | t] = \alpha \text{ pentru toți } t.$$

Pentru verificarea ipotezei ii) după teorema 14, în familia condiționată există un test U.C.M.P. cu funcția critică

$$(94) \quad \phi(u, t) = \begin{cases} 1 & , C_1(t) < u < C_2(t) \\ \gamma_i(t), & u = C_i(t), i = 1, 2 \\ 0, & u < C_1(t) \text{ sau } > C_2(t) \end{cases}$$

unde $C_1, C_2, \gamma_1, \gamma_2$ sînt determinați din

$$(95) \quad M_{\theta_1} [\phi_2(U, T) | t] = M_{\theta_2} [\phi_2(U, T) | t] = \alpha.$$

Considerăm testul ϕ_3 care satisface

$$(96) \quad \phi(u, t) = \begin{cases} 1 & , u < C_1(t) \text{ sau } > C_2(t) \\ \gamma_i(t), & u = C_i(t), i = 1, 2 \\ 0 & , C_1(t) < u < C_2(t) \end{cases}$$

unde C_1, C_2 și γ_1, γ_2 sînt determinați de

$$(97) \quad M_{\theta_1} [\phi_3(U, T) | t] = M_{\theta_2} [\phi_3(U, T) | t] = \alpha.$$

Cînd $T = t$ este dat, acesta este un test U.C.M.P. nedeplasat pentru verificarea ipotezei iii) și U.C.M.P. pentru toate testele ce satisfac (97).

Fie ϕ_4 funcția critică ce satisface (96) cu C_1, C_2 și γ_1, γ_2 determinați de

$$(98) \quad M_{\theta_0} [\phi_4(U, T) | t] = \alpha$$

și

$$(99) \quad M_{\theta_0} [U \phi_4(U, T) | t] = \alpha M_{\theta_0} [U | t]$$

Atunci dat $T = t$ urmează că ϕ_4 este U.C.M.P. nedeplasat pentru verificarea ipotezei iv) și U.C.M.P. pentru toate testele ce satisfac (98) și (99).

TEOREMA 21. (Lehmann, Scheffé (1950), (1955)). *Considerăm funcțiile critice: ϕ_1 definită de (92) și (93); ϕ_2 de (94) și (95), ϕ_3 de (96) și (97); ϕ_4 de (96), (98) și (99). Acestea constituie teste U.C.M.P. nedeplasate la pragul de semnificație α pentru verificarea ipotezelor i), ..., respectiv iv) cînd repartiția comună a variabilelor U și T este dată de (91).*

Demonstrație. (Lehmann (1959)) Statistica T este suficientă pentru ϑ dacă θ are orice valoare fixată, și deci T este suficientă pentru fiecare

$$\omega_j = \{(\theta, \vartheta) : (\theta, \vartheta \in \Omega, \theta = \theta_j) \quad j = 0, 1, 2.$$

Familia de repartiții asociate lui T este dată de

$$dP_{\theta_j, \vartheta}^T(t) = C(\theta_j, \vartheta) \exp \left(\sum_{i=1}^k \vartheta_i t_i \right) d\nu_0(t) \quad (\theta_j, \vartheta) \in \omega_j; \quad j = 0, 1, 2.$$

Deoarece prin ipoteză Ω este convexă și de dimensiune $k+1$ și conține puncte de ambele părți ale lui $\theta = \theta_j$, urmează că ω_j este convexă și de dimensiune k . Astfel ω_j conține dreptunghiuri k -dimensionale; după teorema VIII.4 familia

$$\mathfrak{P}_j^T = \{P_{\theta_j, \vartheta}^T; (\theta, \vartheta) \in \omega_j\}$$

este completă; similaritatea testului ϕ pe ω_j implică

$$M_{0,j} [\phi(U, T)|t] = \alpha.$$

(1) Mai întâi considerăm H_1 . Funcția de putere a tuturor testelor este continuă pentru o familie exponențială. Prin urmare este suficient să dovedim că ϕ_1 este U.C.M.P. printre toate testele care sînt similare pe ω_0 (lema 5) și deci printre acelea care satisfac (93). Pe de altă parte, puterea testului ϕ față de alternativa (θ, ϑ) este

$$(100) \quad M_{\theta, \vartheta} [\phi(U, T)] = \int \left[\int \phi(u, t) dP_{\theta}^{U|t}(u) \right] dP_{\theta, \vartheta}^T(t).$$

Prin urmare maximizăm puterea prin maximizarea puterii testului condiționat (dată de expresia din paranteza pătrată) separat pentru fiecare t . Deoarece ϕ_1 are proprietatea că maximizează puterea condiționată față de orice $\theta > \theta_0$ supus la condiția (93), rezultatul dorit este stabilit.

(2) Demonstrația pentru H_2 și H_3 este complet analogă. După lema 5 este suficient să dovedim că ϕ_2 și ϕ_3 sînt U.C.M.P. printre toate testele care sînt similare atât de ω_1 cît și pe ω_2 și deci pentru toate testele care satisfac (95). Pentru fiecare t , ϕ_2 și ϕ_3 maximizează puterea condiționată pentru problemele respective supuse la această condiție și prin urmare și puterea necondiționată.

(3) Nedeplasarea testului pentru ii) implică similaritatea pe ω_0 și

$$\frac{\partial}{\partial \theta} [M_{\theta, \vartheta} \phi(U, T)] = 0 \text{ pe } \omega_0.$$

Se poate deriva sub semnul medie și obținem

$$M_{\theta, \vartheta} [U\phi(U, T) - \alpha U] = 0 \text{ pe } \omega_0.$$

Prin urmare, deoarece $\mathcal{E}_0^T$ este completă, nedeplasarea implică (98) și (99). Testul care în plus satisface (96) este U.C.M.P. printre toate testele ce satisfac aceste două condiții. Ca în demonstrația lemei 5, prin comparare cu testul $\phi(u, t) \equiv \alpha$, urmează că acest test este U.C.M.P. nedeplasat.

(4) Funcțiile ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 și ϕ_4 au fost obținute anterior pentru fiecare t fixat ca funcții de u . Pentru a demonstra complet teorema este necesar să arătăm că ele sînt măsurabile în u și t , astfel ca media (100) să existe.

Arătăm acest lucru pentru ϕ_1 .

Pentru a arăta măsurabilitatea funcției ϕ_1 arătăm că funcțiile $C_0(t)$ și $\gamma_0(t)$ definite de (92), și (93) sînt t -măsurabile. Omitînd indicile 0 și notînd funcția de repartiție a lui U dat $T = t$ și pentru $\theta = \theta_0$ prin

$$F_t(u) = P_{\theta_0} \{U \leq u | t\}$$

(93) se poate scrie ca :

$$F_t(C) - \gamma[F_t(C) - F_t(C - 0)] = 1 - \alpha.$$

În acest caz $C = C(t)$ este astfel încît

$$F_t(C - 0) \leq 1 - \alpha \leq F_t(C)$$

și deci

$$C(t) = F_t^{-1}(1 - \alpha)$$

unde

$$F_t^{-1}(y) = \inf \{u : F_t(u) \geq y\}.$$

Urmează că $C(t)$ și $\gamma(t)$ vor fi amîndouă măsurabile cu condiția ca $F_t(u)$ și $F_t(u - 0)$ sînt măsurabile în u și t și $F_t^{-1}(1 - \alpha)$ este măsurabilă în t .

Pentru fiecare u fixat funcția $F_t(u)$ este o funcție măsurabilă de t și pentru fiecare t fixat este o funcție de repartiție și prin urmare nedescrescătoare și continuă la dreapta. Din a doua proprietate urmează că $F_t(u) \geq c$ dacă și numai dacă pentru fiecare n există un număr rațional r astfel încît :

$$u \leq r < u + \frac{1}{n} \text{ și } F_t(r) \geq c.$$

Prin urmare, dacă numerele raționale sînt notate prin $r_1, r_2, \dots$

$$\{(u, t) : F_t(u) \geq c\} = \bigcap_n \bigcup_i \left\{ (u, t) : 0 \leq r_i - u < \frac{1}{n}, F_t(r_i) \geq c \right\}.$$

Aceasta arată că $F_t(u)$ este măsurabilă în u și t . Demonstrația pentru $F_t(u - 0)$ este analogă. Deoarece $F_t^{-1}(y) \leq u$ dacă și numai dacă $F_t(u) \geq y$, $F_t^{-1}(y)$ este t -măsurabilă pentru orice y fixat. Urmează că ϕ_1 este măsurabilă în u și t .

Observație. De asemenea dacă Ω este înlocuit prin $\Omega^1 = \Omega \cap \{(\theta, v) : \theta \geq \theta_0\}$ testul ϕ_1 este U.C.M.P. nedeplasat pentru verificarea ipotezei $\theta = \theta_0$ față de ipoteza alternativă $\theta > \theta_0$. Presupunerea că Ω conține puncte cu $\theta < \theta_0$ a fost folosită numai pentru a arăta că mulțimea mărginită ω_0 conține dreptunghiuri k -dimensionale și aceasta rămâne adevărată dacă Ω este înlocuit de Ω' .

Arătăm că funcția ϕ_3 definită de (96) și (97) este măsurabilă în u și t .

Cu $C_1 = v$ și $C_2 = w$ ecuațiile ce determină pe v, w, γ_1 și γ_2 sînt

$$(101) \quad F_t(v-) + [1 - F_t(w)] + \gamma_1[F_t(v) - F_t(v-)] + \\ + \gamma_2[F_t(w) - F_t(w-)] = \alpha$$

și

$$(102) \quad G_t(v-) + [1 - G_t(w)] + \gamma_1[G_t(v) - G_t(v-)] + \\ + \gamma_2[G_t(w) - G_t(w-)] = \alpha$$

unde

$$(103) \quad F_t(u) = \int_{-\infty}^u C_t(\theta_1) e^{\theta_1 v} dv_t(y), \quad G_t(u) = \int_{-\infty}^u C_t(\theta_2) e^{\theta_2 v} dv_t(y)$$

reprezintă funcțiile de repartiție ale variabilei U dat t cînd $\theta = \theta_1$ și respectiv $\theta = \theta_2$.

(1) Pentru fiecare $0 \leq y \leq \alpha$ fie

$$v(y, t) = F_t^{-1}(y) \text{ și } w(y, t) = F_t^{-1}(1 - \alpha + y).$$

Definim $\gamma_1(y, t)$ și $\gamma_2(y, t)$ astfel că pentru $v = v(y, t)$ și $w = w(y, t)$,

$$F_t(v-) + \gamma_1[F_t(v) - F_t(v-)] = y$$

$$1 - F_t(w) + \gamma_2[F_t(w) - F_t(w-)] = \alpha - y$$

(2) Fie $H(y, t)$ membrul stîng al relației (102) cu $v = v(y, t)$ $w = w(y, t)$. Atunci

$$H(0, t) > \alpha \text{ și } H(\alpha, t) < \alpha.$$

Aceasta urmează din teorema 10 din faptul că

$$v(0, t) = -\infty \text{ și } w(\alpha, t) = \infty$$

(care arată că testele condiționate corespunzătoare la $y = 0$ și $y = \alpha$ sînt unilaterale) și că membrul stîng al relației (102) pentru orice y este puterea acestui test condiționat.



Pentru t fixat, funcțiile

$$H_1(y, t) = G_t(v -) + \gamma_1[G_t(v) - G_t(v -)]$$

și

$$H_2(y, t) = 1 - G_t(w) + \gamma_2[G_t(w) - G_t(w -)]$$

sînt funcții continue de y . Aceasta este o consecință a faptului, care urmează din (103), că a.p.t. în raport cu $\mathbb{R}^T$ discontinuitățile funcțiilor F_t și G_t coincid.

(4) Funcția $H(y, t)$ este măsurabilă în y și t . Aceasta urmează din continuitatea funcției H (printr-o argumentație similară folosită în demonstrația măsurabilității funcției $F_t(u)$). Fie

$$y(t) = \inf \{y : H(y, t) < \alpha\}$$

și $v(t) = v[y(t), t]$. Atunci (101) și (102) sînt satisfăcute pentru toți t . Măsurabilitatea funcțiilor

$$v(t), w(t), \gamma_1(t) \text{ și } \gamma_2(t)$$

definite în acest mod urmează din măsurabilitatea funcțiilor $y(t)$ și $F_t^{-1}y(t)$ în t . Aceasta este o consecință a relațiilor

$$\{t : y(t) < c\} = \bigcup_{r < c} \{t : H(r, t) < \alpha\}$$

unde r indică un număr rațional, și

$$\{t : F_t^{-1}[y(t)] \leq c\} = \{t : y(t) - F_t(c) \leq 0\}$$

care au loc pentru toți c reali.

Observație. Cu excepția următoarelor puncte

— faptul că repartiția variabilei U dat de $F = t$ constituie o familie exponențială.

— familia repartițiilor lui T este completă,

— derivata funcției $M_{0,0}\phi(U, T)$ există și poate fi calculată prin derivare sub semnul medie,

— funcțiile ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 și ϕ_4 sînt măsurabile,

demonstrația teoremei 21 este elementară.

Teorema 21 poate fi extinsă în ipoteze privind parametrii de forma

$$\theta^* = a_0\theta + \sum_1^k a_i \vartheta_i, \quad a_0 \neq 0.$$

Acastă transformare este formal dată de următoarea leamnă.

LEMA 6. Familia de repartiții exponențiale (90) poate fi scrisă ca

$$dP_{0,0}^X(x) = K(\theta^*, \vartheta) \exp [\theta^* U^*(x) + \sum \vartheta_i T_i^*(x)] d\mu(x)$$

unde

$$U^* = \frac{U}{a_0}, \quad T_i^* = T_i - \frac{a_i}{a_0} U.$$

§ 5. Cele mai stringente teste. Teste invariante

5.1. Cele mai stringente teste

Wald (1943) introduce o clasificare a testelor care s-a dovedit a fi importantă și care generalizează noțiunea de C.M.P. test. Fie $(\alpha, \Omega_0, \Omega - \Omega_0)$ o problemă de verificat și ϕ_α mulțimea tuturor testelor pentru această problemă. Pentru fiecare $\theta \in \Omega - \Omega_0$ fie

$$\Pi(\theta) = \sup_{\phi \in \phi_\alpha} \pi_\phi(\theta).$$

DEFINIȚIA 20. Testul $\phi_0 \in \phi_\alpha$ este cel mai stringent dacă satisface condiția

$$(104) \quad \sup_{\theta \in \Omega - \Omega_0} [\Pi(\theta) - \pi_{\phi_0}(\theta)] \leq \sup_{\theta \in \Omega - \Omega_0} [\Pi(\theta) - \pi_\phi(\theta)]$$

pentru fiecare $\phi \in \phi_\alpha$.

Acest concept este legat de conceptul de test maximin.

Dacă există un test $\phi_0 \in \phi_\alpha$ pentru care $\Pi(\theta) = \pi_{\phi_0}(\theta)$ pentru fiecare $\theta \in \Omega - \Omega_0$, atunci ϕ_0 este cel mai stringent. Avem

TEOREMA 22. Dacă pentru problema $(\alpha, \Omega_0, \Omega - \Omega_0)$ există C.M.P. test, atunci el este cel mai stringent.

TEOREMA 23. Fie ϕ_α mulțimea tuturor testelor pentru problema $(\alpha, \Omega_0, \Omega - \Omega_0)$, K o mulțime arbitrară de indici, Ω_k , $k \in K$ submulțimi disjuncte nevide ale mulțimii $\Omega - \Omega_0$ cu $\bigcup_{k \in K} \Omega_k = \Omega - \Omega_0$, $\Pi(\theta) = \sup_{\phi \in \phi_\alpha} \pi_\phi(\theta)$ pentru fiecare $\theta \in \Omega - \Omega_0$ și fie Π constant pe Ω_k pentru fiecare $k \in K$. Presupunem că există $\phi_0 \in \phi_\alpha$ pentru care

$$(105) \quad \inf_{\theta \in \Omega_k} \pi_{\phi_0}(\theta) = \sup_{\phi \in \phi_\alpha} \inf_{\theta \in \Omega_k} \pi_\phi(\theta)$$

pentru fiecare $k \in K$. Atunci ϕ_0 este cel mai stringent pentru problema $(\alpha, \Omega_0, \Omega - \Omega_0)$.

Demonstrație. Avem

$$\sup_{\theta \in \Omega - \Omega_0} [\Pi(\theta) - \pi_{\phi_0}(\theta)] = \sup_{k \in K} \sup_{\theta \in \Omega_k} (\Pi(\theta) - \pi_{\phi_0}(\theta)).$$

Deoarece pentru fiecare θ_k arbitrar, $\theta_k \in \Omega_k$, Π este o constantă pe Ω_k , avem

$$\sup_{\theta \in \Omega - \Omega_0} (\Pi(\theta) - \pi_{\phi_0}(\theta)) = \sup_{k \in K} (\Pi(\theta_k) - \inf_{\theta \in \Omega_k} \pi_{\phi_0}(\theta))$$

De asemenea, din (105), pentru fiecare $\phi \in \phi_\alpha$

$$(106) \quad \sup_{k \in K} (\Pi(\theta_k) - \inf_{\theta \in \Omega_k} \pi_{\phi_k}(\theta)) \leq \sup_{k \in K} (\Pi(\theta_k) - \inf_{\theta \in \Omega_k} \pi_{\phi}(\theta)).$$

Membrul drept al relației (106) este

$$\sup_{k \in K} \sup_{\theta \in \Omega_k} (\Pi(\theta) - \pi_{\phi}(\theta)) = \sup_{\theta \in \Omega - \Omega_0} (\Pi(\theta) - \pi_{\phi}(\theta)),$$

ceea ce demonstrează teorema.

5.2. Principiu de invarianță

Definiția celui mai stringent test este legată de principiul de invarianță.

Fie $\mathcal{G}$ un grup arbitrar multiplicativ și $(R, \mathfrak{S})$ un spațiu măsurabil. Presupunem că putem aplica elementele lui $\mathcal{G}$ în $(R, \mathfrak{S})$, adică : se definește pe $(\mathcal{G} \times R)$ o aplicație în R astfel : dacă $g \in \mathcal{G}$ și $x \in R$ și y este imaginea lui (g, x) , atunci putem să scriem

$$gx = y.$$

Pentru $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ și $x \in R$ presupunem că avem întotdeauna

$$(107) \quad (g_1 g_2)x = g_1(g_2 x).$$

Dacă e este elementul unitate al grupului $\mathcal{G}$

$$(108) \quad ex = x$$

pentru fiecare $x \in R$.

Cerem ca aplicația $x \rightarrow gx$, pentru fiecare $g \in \mathcal{G}$, să fie o transformare $(\mathfrak{S}, \mathfrak{S})$ măsurabilă de la R în ea însăși, adică imaginea inversă a fiecărei $M \in \mathfrak{S}$ este din nou în $\mathfrak{S}$ prin această aplicație.

Din (107) și (108) urmează că această imagine inversă este dată de $g^{-1}M$. De asemenea urmează că pentru fiecare $g \in \mathcal{G}$ și pentru toate $M \in \mathfrak{S}$ avem $gM \in \mathfrak{S}$. Mai mult aplicația $x \rightarrow gx$ este biunivocă pentru fiecare $x \in \mathcal{G}$. Fie P_Ω mulțimea măsurilor probabilistice definite pe $(R, \mathfrak{S})$. Pentru fiecare $\theta \in \Omega$ și fiecare $g \in \mathcal{G}$ definim o măsură probabilistică $P_{\bar{g}\theta}$ prin

$$(109) \quad P_{\bar{g}\theta}(A) = P_\theta(g^{-1}A)$$

pentru fiecare $A \in \mathfrak{S}$.

Înlocuind A prin gA , se observă că (109) este echivalentă cu

$$(110) \quad P_{\bar{g}\theta}(gA) = P_\theta(A).$$

Urmează că $P_{\bar{g}\theta}$ este o măsură probabilistică. Notăția folosită aici pentru măsura probabilistică $P_{\bar{g}\theta}$ definită de (109) devine mai semnificativă dacă cerem ca $\bar{g}\Omega \subseteq \Omega$.

Vom spune atunci că P_Ω este invariantă în raport cu $\mathcal{Q}$.
Atunci

$$\begin{aligned} P_{(\bar{g}_1 \bar{g}_2)0}(A) &= P_0((g_1 g_2)^{-1} A) = P_0(g_1^{-1} g_2^{-1} A) = \\ &= P_{\bar{g}_1, 0}(g_2^{-1} A) = P_{\bar{g}_1 \bar{g}_2, 0}(A) \end{aligned}$$

pentru fiecare $0 \in \Omega$, $A \in \mathcal{S}$ și $g_1, g_2 \in \mathcal{Q}$. Astfel $\overline{g_1 g_2} = \bar{g}_1 \bar{g}_2$.
Mai mult

$$P_{\bar{g}^{-1}0}(A) = P_{\bar{g}}(gA).$$

Definind $(\bar{g})^{-1}$ prin $(\bar{g})^{-1} \bar{g} = \bar{e}$, se observă că $(\bar{g})^{-1}$ există întotdeauna și coincide cu $\overline{g^{-1}}$. Într-adevăr :

$$P_{\bar{e}0}(A) = P_0(A) = P_0(g^{-1}gA) = P_{\bar{g}0}(gA) = P_{\bar{g}^{-1}\bar{g}0}(A).$$

Mulțimea $\bar{g}$ a tuturor $\bar{g}$ este astfel un grup. Vom spune că este admisibil pentru problema de verificat.

Ținând seama de cele introduse anterior putem da

DEFINIȚIA 21. Problema de verificat (Ω_0, Ω) este invariantă în raport cu un grup admisibil $\mathcal{Q}$ dacă

$$(111) \quad \bar{g} \Omega_0 = \Omega_0$$

și

$$(112) \quad \bar{g}(\Omega - \Omega_0) = \Omega - \Omega_0$$

pentru fiecare $g \in \mathcal{Q}$.

Un test ϕ este invariant în raport cu $\mathcal{Q}$ dacă

$$\phi(gx) = \phi(x)$$

pentru toți $g \in \mathcal{Q}$ și fiecare $x \in R$.

Această definiție a invarianței nu se mărginește numai la teste și poate fi aplicată în mod analog la aplicații arbitrare de la R într-o mulțime oarecare.

Exemplul 7. Fie $\mathcal{Q}$ grupul aditiv al numerelor reale. Fie

$$gx = (x_1 + g, \dots, x_n + g)$$

pentru $x \in R^n$ și fiecare număr real $g \in \mathcal{Q}$. Fie p_i , $i = 1, 2$ densități în R^n . Considerăm mulțimea tuturor măsurilor probabilistice pe $(R^n, \mathfrak{B}_n)$ ale căror densități, pentru fiecare $x \in R^n$, sînt date de

$$p_i(x_1 + \theta, \dots, x_n + \theta), \quad i = 1, 2, \quad -\infty < \theta < \infty.$$

Definim Ω_0 ca mulțimea tuturor perechilor de forma $(\theta, 1)$, și $\Omega - \Omega_0$ ca mulțimea tuturor perechilor de forma $(\theta, 2)$ $\theta \in R_1$, unde (θ, i) este asociat cu măsura $P_{(\theta, i)}$ cu densitatea

$$x \rightarrow p_i(x_1 + \theta, \dots, x_n + \theta), \quad i = 1, 2.$$

Vom cere ca $P_{\Omega_0} \cap P_{\Omega - \Omega_0} = \phi$. Pentru toate $A \in \mathfrak{B}_n$

$$\begin{aligned} P_{\bar{g}(\theta, 1)}(A) &= P_{(\theta, 1)}(-g + A) = \int_{-g+A} p_1(x_1 + \theta, \dots, x_n + \theta) dx_1 \dots dx_n = \\ &= \int_A p_1(x_1 + \theta - g, \dots, x_n + \theta - g) dx_1 \dots dx_n = P_{(\theta - g, 1)}(A). \end{aligned}$$

Astfel $\bar{g}\Omega_0 = \Omega_0$. Analog obținem

$$\bar{g}(\Omega - \Omega_0) = \Omega - \Omega_0,$$

astfel că $\mathcal{Q}$ lasă problema de verificat invariantă. Fiecare funcție definită pe R^n de forma

$$x \rightarrow \phi(x_1 - x_n, \dots, x_{n-1} - x_n), \quad 0 \leq \phi \leq 1$$

este un test invariant.

5.3. Legătura dintre cele mai stringente teste și principiul de invarianță

(110) se mai poate scrie

$$\int_R I_{gA} dP_{\bar{g}\theta} = \int_R I_A dP_\theta$$

sau

$$(113) \quad \int_R I_A(g^{-1}x) dP_{\bar{g}\theta}(x) = \int_R I_A dP_\theta$$

deoarece pentru $x \in R$, $I_{gA}(x) = I_A(g^{-1}x)$.

Astfel din (109) sau (113), pentru fiecare funcție pP_θ integrabilă, urmează că

$$(114) \quad \int_R p(g^{-1}x) dP_{\bar{g}\theta}(x) = \int_R p(x) dP_\theta(x).$$

Putem să demonstrăm

TEOREMA 24. Fie $(\alpha, \Omega_0, \Omega - \Omega_0)$ o problemă de verificat invariantă în raport cu grupul $\mathcal{Q}$. Fie ϕ_α mulțimea tuturor testelor pentru această problemă,

$$\Pi(\theta) = \sup_{\phi \in \phi_\alpha} \pi_\phi(\theta).$$

Atunci Π este invariant față de grupul $\bar{\mathcal{G}}$ generat de $\mathcal{G}$.

Demonstrație. Dacă $\phi \in \phi_\alpha$, atunci pentru fiecare $g \in \mathcal{G}$, aplicația

$$x \rightarrow \phi(g^{-1}x)$$

apartine de asemenea mulțimii ϕ_α . Aceasta rezultă ca o aplicație a relației (114) la ϕ și în presupunerea că (111) este adevărată. Mai departe, pentru fiecare $\bar{g} \in \bar{\mathcal{G}}$

$$\begin{aligned}\Pi(\theta) &= \sup_{\phi \in \phi_\alpha} \int_R \phi(x) dP_\theta(x) = \sup_{\phi \in \phi_\alpha} \int_R \phi(gx) dP_\theta(x) = \\ &= \sup_{\phi \in \phi_\alpha} \int_R \phi(x) dP_{\bar{g}\theta}(x) = \Pi(\bar{g}\theta),\end{aligned}$$

ceea ce trebuia arătat.

TEOREMA 25. *Presupunem că problema de verificat $(\alpha, \Omega_0, \Omega - \Omega_0)$ este invariantă față de grupul $\mathcal{G}$. Fie ϕ un test pentru această problemă care satisface următoarea condiție:*

pentru fiecare $g \in \mathcal{G}$, fie $\phi(gx) = \phi(x)$ a.p.t. în raport cu $P_{\Omega - \Omega_0}$, unde mulțimea poate depinde de g .

Atunci funcția de putere π_ϕ este invariantă în raport cu $\bar{\mathcal{G}}$ pe $\Omega - \Omega_0$

COROLARUL 1. *Presupunerile teoremei 25 sînt satisfăcute pentru Ω_0 în loc de $\Omega - \Omega_0$. Dacă există $\theta \in \Omega_0$ astfel încît*

$$\{\bar{g}\theta : \bar{g} \in \bar{\mathcal{G}}\} = \Omega_0$$

atunci ϕ este similar în raport cu Ω_0 .

Fie $\mathcal{G}$ un grup și G σ -algebra submulțimilor lui $\mathcal{G}$. Pentru fiecare $B \in G$ și $g \in \mathcal{G}$ presupunem că gB și Bg sînt în G .

DEFINIȚIA 22. O măsură ν pe G este invariantă dacă

$$(115) \quad \nu(gB) = \nu(B) = \nu(Bg)$$

pentru toți $B \in G$ și fiecare $g \in \mathcal{G}$.

Atunci pentru toate aplicațiile p de la $\mathcal{G}$ în R_1 , G -măsurabile și ν -integrabile, avem

$$\begin{aligned}(116) \quad \int_{\mathcal{G}} p(g^{-1}g_1) d\nu(g_1) &= \int_{\mathcal{G}} p(g_1g^{-1}) d\nu(g_1) = \\ &= \int_{\mathcal{G}} p(g_1) d\nu(g_1) \text{ pentru toți } g \in \mathcal{G}.\end{aligned}$$

Cu această terminologie putem să demonstrăm

TEOREMA 26. *Fie $(\alpha, \Omega_0, \Omega - \Omega_0)$ o problemă de verificat invariantă în raport cu grupul $\mathcal{G}$. Fie P_Ω o măsură probabilistică dominată de μ . Dacă $N \in \mathfrak{S}$ și $\mu(N) = 0$, atunci presupunem că pentru fiecare $g \in \mathcal{G}$ are loc de*

asemenea $\mu(gN) = 0$. Pe $(\mathcal{G}, G)$ există o măsură probabilistică ν invariantă. Presupunem că

— aplicația $(g, x) \rightarrow gx$ definită pe $\mathcal{G} \times R$ este $(\mathcal{S}, G \otimes \mathcal{S})$ — măsurabilă

— există un test invariant ϕ_0 care este C.M.P. în raport cu submulțimea tuturor testelor invariante în ϕ_α pe $\Omega - \Omega_0$.

Atunci ϕ_0 este cel mai stringent pentru problema $(\alpha, \Omega_0, \Omega - \Omega_0)$.

Demonstrație. Folosim teorema 23. Fie

$$\Omega_k = \{\theta_k : \theta_k = \bar{g}\theta, \bar{g} \in \mathcal{G}\}$$

pentru fiecare $\theta \in \Omega - \Omega_0$. Pentru $k \neq k_1$, avem fie

$$\Omega_k = \Omega_{k_1} \text{ sau } \Omega_k \cap \Omega_{k_1} = \emptyset$$

Deci

$\Omega - \Omega_0 = \bigcup_{k \in K} \Omega_k$ cu $\Omega_k \cap \Omega_{k'} = \emptyset$ pentru $k, k' \in K, k \neq k'$ dacă mulțimea de indici K este convenabil aleasă. După teorema 24 Π este constant pe fiecare Ω_k .

Trebuie să arătăm că pentru $k \in K$,

$$\inf_{\theta \in \Omega_k} \pi_{\phi_0}(\theta) = \sup_{\phi \in \phi_\alpha} \inf_{\theta \in \Omega_k} \pi_\phi(\theta)$$

Pentru fiecare $\varepsilon > 0$, există un test $\phi_\varepsilon \in \phi_\alpha$ astfel încît

$$(117) \quad \inf_{\theta \in \Omega_k} \pi_{\phi_\varepsilon}(\theta) + \varepsilon \geq \sup_{\phi \in \phi_\alpha} \inf_{\theta \in \Omega_k} \pi_\phi(\theta).$$

$(g, x) \rightarrow \phi_\varepsilon(gx)$ este $G \otimes \mathcal{S}$ — măsurabilă și

$$\int_R \int_{\mathcal{G}} \phi_\varepsilon(gx) d\nu(g) d\mu(x)$$

are sens. Astfel, aplicația $\mathcal{S}$ — măsurabilă

$$\psi : x \rightarrow \int_{\mathcal{G}} \phi_\varepsilon(gx) d\nu(g)$$

există a.p.t. în raport cu μ . Mulțimea excepțională este notată prin N . ψ este un test pentru problema $(\alpha, \Omega_0, \Omega - \Omega_0)$. Într-adevăr $0 \leq \psi \leq 1$ a.p.t. în raport cu μ . Mai mult, pentru $\theta \in \Omega_0$

$$\begin{aligned} M_{P_\theta}(\psi) &= \int_R \int_{\mathcal{G}} \phi_\varepsilon(gx) d\nu(g) dP_\theta(x) = \int_{\mathcal{G}} \int_R \phi_\varepsilon(gx) dP_\theta(x) d\nu(g) = \\ &= \int_{\mathcal{G}} \int_R \phi_\varepsilon(x) dP_{\bar{g}\theta}(x) d\nu(g) \leq \alpha \end{aligned}$$

deoarece problema de verificat este invariantă în raport cu Q și $\phi_\varepsilon \in \phi_\alpha$.
În plus, pentru fiecare $g_1 \in Q$ și toți $x \in g_1^{-1}N$,

$$\psi(g_1x) = \int_Q \phi_\varepsilon(g(g_1x)) \, dv(g) = \int_Q \phi_\varepsilon(gx) \, dv(g)$$

cînd aplicăm (116). Dar atunci pentru toți $x \notin N \cup g_1^{-1}N$

$$(118) \quad \psi(g_1x) = \psi(x)$$

și, prin ipoteză, $\mu(N \cup g_1^{-1}N) = 0$, astfel încît

$$P_{\Omega - \Omega_0}(N \cup g_1^{-1}N) = 0.$$

Astfel putem aplica teorema 25 și pentru fiecare $\theta \in \Omega_k$ obținem :

$$(119) \quad \inf_{\theta \in \Omega_k} \pi_\psi(\theta) = \int_R \psi(x) \, dP_\theta(x) = \int_Q \int_R \phi_\varepsilon(gx) \, dP_\theta(x) \, dv(g) = \\ = \int_Q \int_R \phi_\varepsilon(x) \, dP_{g^{-1}\theta}(x) \, dv(g) \geq \int_Q \inf_{\theta \in \Omega_k} M_\theta(\phi_\varepsilon) \, dv(g) = \inf_{\theta \in \Omega_k} \pi_{\phi_\varepsilon}(\theta).$$

Definim $\psi(x) = 0$ pentru $x \in N$ și observăm că

$(g, x) \rightarrow \psi(gx)$ este $G \otimes \mathbb{S}$ — măsurabilă.

Deoarece aplicația $(g, x) \rightarrow \psi(x)$ este de asemenea $G \otimes \mathbb{S}$ — măsurabilă

$$\int_Q \int_R |\psi(gx) - \psi(x)| \, d\mu(x) \, dv(g)$$

există și, după (118), această integrală se anulează. Prin urmare avem de asemenea

$$\int_R \int_Q |\psi(gx) - \psi(x)| \, dv(g) \, d\mu(x) = 0$$

astfel încît trebuie să avem

$$\int_Q |\psi(gx) - \psi(x)| \, dv(g) = 0$$

a.p.t. în raport cu μ .

Atunci pentru toți x

$$(120) \quad \psi(gx) = \psi(x) \text{ a.p.t. în raport cu } \nu.$$

Deci

$$(121) \quad \psi_1(x) = \int_{\mathcal{G}} \psi(gx) d\nu(g)$$

este definită a.p.t. în raport cu μ . ψ_1 este invariantă

$$\int_{\mathcal{G}} \psi(gg_1x) d\nu(g) = \int_{\mathcal{G}} \psi(x) d\nu(g) = \int_{\mathcal{G}} \psi(gx) d\nu(g) = \psi_1(x)$$

a.p.t. în raport cu μ .

Astfel $\psi_1(g_1x)$ este definită pentru toți $g_1 \in \mathcal{G}$ și toți $x \in R - M$ și avem $\psi_1(x) = \psi_1(g_1x)$. Din (121) pentru $\theta \in \Omega - \Omega_0$

$$(122) \quad \pi_{\psi_1}(\theta) = \pi_{\psi}(\theta)$$

(122) și (119) împreună cu (117) și presupunerile asupra lui ϕ_0 conduc la

$$\begin{aligned} \inf_{\theta \in \Omega_k} \pi_{\phi_0}(\theta) + \varepsilon &\geq \inf_{\theta \in \Omega_k} \pi_{\psi_1}(\theta) + \varepsilon \geq \\ &\geq \inf_{\theta \in \Omega_k} \pi_{\phi_\varepsilon}(\theta) + \varepsilon \geq \sup_{\phi \in \phi_\varepsilon} \inf_{\theta \in \Omega_k} \pi_\phi(\theta) \end{aligned}$$

și deoarece ε (mic) este arbitrar, teorema este demonstrată.

Observație. Pentru aplicarea acestei teoreme este esențial existența măsurii invariante pe $\mathcal{G}$.

§ 6. Șir consistent de teste

Fie $(R^{(n)}, \mathcal{S}^{(n)})$ pentru $n = 1, 2, \dots$, un spațiu măsurabil și $P^{(n)}$ o mulțime de măsuri pe $(R^{(n)}, \mathcal{S}^{(n)})$, unde Ω este mulțimea ipotezelor admisibile și nu depinde de n . Putem omite această ultimă presupunere și să presupunem (Neyman, Scott (1948)) că mulțimea ipotezelor admisibile Ω_n este asociată cu fiecare n și că

$$\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \dots$$

are loc. În cele ce urmează nu vom considera, totuși, o astfel de generalizare. Vom considera o problemă de forma $(\Omega_0, \Omega - \Omega_0)$ astfel că avem de comparat șirul de teste $\{\phi_n\}$. În acest caz, pentru fiecare $n \geq 1$, ϕ_n este o funcție $\mathcal{S}^{(n)}$ -măsurabilă definită pe $R^{(n)}$. Sîntem interesați în comportarea testului ϕ_n pentru valori mari ale lui n în care scop dăm o definiție care este bazată pe ideea că pentru selecții cu volumul $\rightarrow \infty$ nu respingem niciodată ipoteza nulă adevărată și nu acceptăm niciodată o ipoteză falsă.

DEFINIȚIA 23. (Wald, Wolfowitz (1940)). Un șir de teste $\{\phi_n\}$ este un șir consistent de teste pentru problema $(\Omega_0, \Omega - \Omega_0)$ dacă

$$(123) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} M_{\theta}^{(n)}(\phi_n) = \int_{R^n} \phi_n dP_{\theta}^{(n)} = \begin{cases} 0, & \theta \in \Omega_0 \\ 1, & \theta \in \Omega - \Omega_0 \end{cases}$$

În cele mai importante cazuri practice, nu avem șir complet arbitrar de spații de selecție $(R^{(n)}, \mathfrak{S}^{(n)})$, însă $R^{(n)}$ este R_n și $\mathfrak{S}^{(n)}$ este σ -algebra $\mathfrak{B}_n$. Pentru fiecare $0 \in \Omega$, $P_0^{(n)}$ pe $(R_n, \mathfrak{B}_n)$ este dată de $\prod_{i=1}^n P_{0,i}$ cu $P_{0,i} = P_0$, $1 \leq i \leq n$, $n \geq 1$. Ca spațiu de probabilitate luăm $(R_\infty, \mathfrak{B}_\infty, \prod_{i=1}^\infty P_{0,i})$.

Berger (1951), Kraft (1955) arată că cel puțin cînd Ω_0 și $\Omega - \Omega_0$ sînt numărabile se poate construi întotdeauna un șir consistent de teste. Prezentăm (Kakutani (1948)) numai cazul cînd Ω_0 și $\Omega - \Omega_0$ sînt simple. Mai întii demonstrăm

LEMA 7. Fie P_1 și P_2 măsuri probabilistice pe $(R, \mathfrak{S})$. Fie μ o măsură probabilistică care domină P_1 și P_2 . Fie p_1 și p_2 densitățile Radon-Nicodým corespunzătoare și

$$(124) \quad \rho(P_1, P_2) = \int_R (p_1 p_2)^{1/2} d\mu.$$

Atunci

$$(125) \quad 0 \leq \rho(P_1, P_2) \leq 1,$$

$\rho(P_1, P_2) = 1$ dacă $P_1 = P_2$ și $\rho(P_1, P_2) = 0$ dacă P_1 și P_2 sînt măsuri ortogonale.

Demonstrație. (125) rezultă din inegalitatea lui Schwarz. $\rho(P_1, P_2) = 1$ are loc dacă inegalitatea lui Schwarz se transformă în egalitate. Aceasta este adevărat dacă $p_1 = p_2$ a.p.t. în raport cu μ . Fie P_1 și P_2 ortogonale. Atunci există $M \in \mathfrak{S}$ cu $P_1(M) = 1$, $P_2(M) = 0$. Aceasta implică

$$\begin{aligned} \rho(P_1, P_2) &= \int_R I_M(p_1 p_2)^{1/2} d\mu + \int_{R-M} I_{R-M}(p_1 p_2)^{1/2} d\mu \leq \\ &\leq \left(\int_R p_1 d\mu \right)^{1/2} \left(\int_R I_M p_2 d\mu \right)^{1/2} + \\ &+ \left(\int_{R-M} I_{R-M} p_1 d\mu \right)^{1/2} \left(\int_{R-M} p_2 d\mu \right)^{1/2} = 0. \end{aligned}$$

TEOREMA 27. Fie $P_{0,0}$ și $P_{0,1}$ măsuri probabilistice pe $(R_1, \mathfrak{B}_1)$. Considerăm șirul de spații de selecție $\{(R_n, \mathfrak{B}_n)\}$ și pe ele măsurile produs $P_{0,i}^{(n)} = \prod_{j=1}^n P_{0,i,j}$ cu $P_{0,i,j} = P_{0,i}$, $1 \leq j \leq n$, $i = 0, 1$. Atunci există întotdeauna un șir consistent de teste pentru problema $(\{0_0\}, \{0_1\})$.

Demonstrație. Fie μ măsura care domină $P_{0,0}$ și $P_{0,1}$. Fie $p_{0,i}$, $i = 0, 1$ densitățile Radon-Nicodým în raport cu μ ale măsurilor $P_{0,i}$. $\prod_{j=1}^n \mu_j$ cu $\mu_j = \mu$, $1 \leq j \leq n$ este dată de

$$(126) \quad (x_1, \dots, x_n) \rightarrow \prod_{j=1}^n p_{0,i_j}(x_j).$$

Deci

$$\rho(P_{0_0}^{(n)}, P_{0_1}^{(n)}) = \int_{R_n} \left(\prod_{j=1}^n p_{0_0}(x_j) p_{0_1}(x_j) \right)^{1/2} d\mu(x_1) \dots d\mu(x_n) =$$

(127)

$$= \prod_{j=1}^n \int_{R_1} (p_{0_0}(x_j) p_{0_1}(x_j))^{1/2} d\mu(x_j)$$

și astfel

$$(128) \quad \rho(P_{0_0}^{(n)}, P_{0_1}^{(n)}) = \rho^n(P_{0_0}, P_{0_1}).$$

Deoarece $P_{0_0} \neq P_{0_1}$, din (128) cu ajutorul lemei 7 avem

$$\rho(P_{0_0}^{(n)}, P_{0_1}^{(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

În continuare alegem un șir de numere reale $\{k_n\}$ și numerele reale c_1, c_2 cu $0 < c_1 \leq c_2$ astfel încît, pentru $n = 1, 2, \dots$ are loc :

$$(129) \quad 0 < c_1 \leq k_n \leq c_2.$$

Pentru $n \geq 1$, fie

$$(130) \quad \phi_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \prod_{j=1}^n (p_{0_1}(x_j))^{1/2} > k_n \prod_{j=1}^n (p_{0_0}(x_j))^{1/2} \\ 0, & \prod_{j=1}^n (p_{0_1}(x_j))^{1/2} \leq k_n \prod_{j=1}^n (p_{0_0}(x_j))^{1/2} \end{cases}$$

Atunci

$$\begin{aligned} M_{0_0}(\phi_n) &= \int_{R_n} \phi_n(x_1, \dots, x_n) \prod_{j=1}^n p_{0_0}(x_j) d\mu(x_1) \dots d\mu(x_n) \leq \\ &\leq \frac{1}{k_n} \int_{R_n} \left(\prod_{j=1}^n p_{0_0}(x_j) \prod_{j=1}^n p_{0_1}(x_j) \right)^{1/2} d\mu(x_1) \dots d\mu(x_n) = \\ &= \frac{1}{k_n} \rho(P_{0_0}^{(n)}, P_{0_1}^{(n)}) \end{aligned}$$

și ținînd seama de (129), avem

$$M_{0_0}(\phi_n) \leq \frac{1}{c_1} \rho(P_{0_0}^{(n)}, P_{0_1}^{(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Analog, găsim :

$$\begin{aligned} M_{0_1}(1 - \phi_n) &\leq k_n \int_{R_n} \left(\prod_{j=1}^n p_{0_0}(x_j) \prod_{j=1}^n p_{0_1}(x_j) \right)^{1/2} d\mu(x_1) \dots d\mu(x_n) \leq \\ &\leq c_2 \rho(P_{0_0}^{(n)}, P_{0_1}^{(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Teorema este demonstrată.



§ 7. Eficiența estimatorilor și a testelor

7.1. Eficiența în sensul lui Pitman. Estimator asimptotic eficient

1.1. Conceptul de eficiență asimptotică relativă, introdus de Pitman (1949) are drept scop compararea, în cazul selecțiilor de volum mare, a puterii a două șiruri de teste. O expunere a acestei lucrări, împreună cu unele dezvoltări se găsesc în Noether (1955), Hoeffding și Rosenblatt (1955), Kendall și Stuart (1961).

DEFINIȚIA 24. Dacă pentru o statistică t_N există funcțiile $\psi_N(\theta)$ și $\sigma_N(\theta)$ astfel încît pentru θ în vecinătatea lui zero

$$(131) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} P \left(\frac{t_N - \psi_N(\theta)}{\sigma_N(\theta)} < u \right) = \Phi(u), \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sigma_N(\theta_N)}{\sigma_N(0)} = 1$$

atunci

$$(132) \quad E_T = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{\psi_N(\theta_N) - \psi_N(0)}{\theta_N \sqrt{N} \sigma_N(0)} \right]^2 \text{ cu } \theta_N = 0 \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \right)$$

(dacă există) poartă numele de eficacitatea testului T bazat pe șirul de statistici $\{t_N\}$.

Compararea a două șiruri de teste $\{T^*\}$ și $\{T\}$ se reduce la compararea a două șiruri de volume de selecții $\{N^*\}$ și $\{N\}$ cu proprietatea că la același prag de semnificație α , testele $\{T^*\}$ și $\{T\}$ bazate pe statisticile $\{t_N^*\}$ și respectiv $\{t_N\}$ au aceeași putere pentru alternative în care θ are valori apropiate de zero.

Fie π o putere specifică cu $\alpha < \pi < 1$. Considerăm șirul de alternative $\{\theta_N\}$ astfel încît

$$(133) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \pi_N(\theta_N) = \pi$$

și șirul $\{N^*\}$ astfel încît

$$(134) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \pi_{N^*}^*(\theta_N) = \pi.$$

DEFINIȚIA 25. (Pitman (1946)). Dacă

$$(135) \quad e(T^*, T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{N^*}$$

există și este independentă de α , π și de șirurile particulare $\{N\}$, $\{N^*\}$, atunci $e(T^*, T)$ poartă numele de eficiența asimptotică a testului T^* relativă la testul T .

Reformulăm definiția 25.

Presupunem că

— funcția de repartiție a variabilei aleatoare X depinde de un parametru real θ necunoscut,

— pentru fiecare întreg pozitiv N , T_N și T_N^* sînt două teste cu același prag de semnificație α ($0 < \alpha < 1$) pentru verificarea ipotezei

$$(136) \quad H_0: \theta = \theta_0$$

față de ipoteza alternativă.

$$(137) \quad H_1: \theta > \theta_0$$

bazate pe o selecție de volum N asupra variabilei X .

Fie

- $\pi_N(\theta)$ și $\pi_N^*(\theta)$ funcțiile de putere ale testelor T_N și respectiv T_N^*
- π un număr fixat, $\alpha < \pi < 1$
- $\{\theta_N\}$ un șir de numere astfel încît $\theta_N \downarrow \theta$

și

- $E_1(\theta_N)$ [$E_2(\theta_N)$] cel mai mic întreg pentru care

$$(138) \quad \pi(E_1(\theta_N)) \geq \pi[\pi^*(E_2(\theta_N)) \geq \pi].$$

DEFINIȚIA 26. Eficiența asimptotică a testului T_N relativă la T_N^* pentru șirul de alternative $\{\theta_N\}$ este

$$(139) \quad e(T_N, T_N^*) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E_2(\theta_N)}{E_1(\theta_N)}$$

(dacă există) și nu depinde de α și π ($0 < \alpha < \pi < 1$)

Dixon 1953, 1954 consideră următoarea definiție

DEFINIȚIA 27. Fie T un test pentru care probabilitatea erorii de ordinul 1 este α și puterea în punctul θ pentru o selecție de volum N este $\pi_T(N, \alpha, \theta)$. Dacă T^* este un alt test pentru care probabilitatea erorii de ordinul 1 este α și N^* este volumul selecției necesar pentru obținerea în punctul θ a aceleiași puteri, atunci eficiența testului T^* relativă la testul T este

$$(140) \quad e_{T^*, T}(N, \alpha, \theta) = \frac{N}{N^*}.$$

Observații. i) Compararea completă a testului T^* cu T va necesita evaluarea lui (140) pentru toate valorile celor trei argumente.

ii) În general nu va exista un întreg N^* astfel încît

$$\pi_{T^*}(N^*, \alpha, \theta) = \pi_T(N, \alpha, \theta)$$

dar va exista un N_0 astfel încît

$$\pi_{T^*}(N_0, \alpha, \theta) < \pi_T(N, \alpha, \theta) < \pi_{T^*}(N_0 + 1, \alpha, \theta)$$

Pentru definirea lui N^* se folosește interpolarea lui N^* față de $\Phi^{-1}(\pi_{T^*}(N^*, \alpha, \theta))$

$$\text{iii) } e(T^*, T) = \lim_{N \rightarrow \infty} e_{T^*, T}(N, \alpha, \theta_N)$$

unde θ_N satisface (133).

1.2. Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare X avind densitatea de repartiție f și $t_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$ o statistică avind densitatea f_{t_n} .

În condițiile

$$e_1: \frac{\partial P}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} \text{ există pentru orice } \theta \text{ și sînt continui}$$

$$e_2: \frac{\partial}{\partial \theta} \int P dv = \int \frac{\partial P}{\partial \theta} dv$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \int P dv = \int \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} dv \Rightarrow M_\theta \left[\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \theta} \right)^2 \right] = - M_\theta \left(\frac{\partial^2 \ln P}{\partial \theta^2} \right) = I_n(\theta)$$

$$e_3: I_n(\theta) \text{ este continuă în } \theta \text{ și}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(\theta) = \infty, \text{ pentru orice } \theta$$

$$I_n(\theta) > 0 \text{ oricare ar fi } n \in N^* \text{ și oricare ar fi } \theta$$

$$e_4: \text{repartiția asimptotică a vectorului aleator } (A_n, t_n^*), \text{ unde}$$

$$A_n(\theta) = \frac{1}{I_n^{1/2}(\theta)} \frac{\partial \ln P}{\partial \theta}, \quad t_n^* = \frac{1}{I_n^{1/2}(\theta)} (t_n - \theta)$$

admite momente finite de ordinul 1 și 2, atunci au loc

PROPOZIȚIA 1. Dacă t_n este un estimator nedeplasat pentru θ , atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho^2(A_n(\theta), t_n^*(\theta)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{t_n}(\theta)}{I_n(\theta)}$$

Demonstrație. Pentru orice n avem

$$I_{t_n}(\theta) = M_{\theta_0} \left[\left(\frac{\partial \ln f_{t_n}}{\partial \theta} \right)^2 \right] \leq I_n(\theta)$$

Fie

$$B_n(\theta) = \frac{1}{I_{t_n}^{1/2}(\theta)} \cdot \frac{\partial \ln f_{t_n}}{\partial \theta}, \quad t_n^{k*} = \begin{cases} t_n^*, & |t_n| \leq k \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Avem

$$\begin{aligned} & D^2(t_n^{k*}) D_0^2 \left\{ \left(\frac{I_{t_n}(\theta)}{I_n(\theta)} \right)^{1/2} B_n(\theta) \right\} \geq \\ & \geq \left\{ M_\theta \left(\frac{I_{t_n}(\theta)}{I_n(\theta)} \right)^{1/2} t_n^{k*}(\theta) B_n(\theta) \right\}^2 = M_\theta^2 [A_n(\theta) t_n^{k*}(\theta)], \end{aligned}$$

de unde

$$\frac{M_0^2[A_n(\theta) t_n^{k*}(\theta)]}{M_0\{[t_n^{k*}(\theta)]^2\}} \leq \frac{I_{t_n}(\theta)}{I_n(\theta)} D_0^2[B_n(\theta)] = \frac{I_{t_n}(\theta)}{I_n(\theta)},$$

ceea ce demonstrează propoziția.

PROPOZIȚIA 2. Testul avînd regiunea critică

$$A_n(\theta_0) \geq c_1 (A_n(\theta_0) \leq c_2)$$

este L.C.M.P. pentru verificarea ipotezei $H_0: \theta = \theta_0$ față de

$$H_1: \theta > \theta_0 (H_1: \theta < \theta_0)$$

unde $c_1(c_2)$ se alege astfel încît testul să aibe pragul dorit.

PROPOZIȚIA 3. Testul avînd regiunea critică

$$|A_n(\theta_0)| > c$$

este L.C.M.P. nedeplasat pentru verificarea ipotezei $H_0: \theta = \theta_0$ față de ipoteza alternativă $H_1: \theta \neq \theta_0$.

DEFINIȚIA 28. Vom spune că estimatorul t_n este asimptotic eficient pentru parametrul θ dacă este satisfăcută una din condițiile

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{t_n}(\theta)}{I_n(\theta)} = 1$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(A_n(\theta), t_n^*(\theta)) = 1$$

3) Există două constante a și b ($b \neq 0$) astfel încît

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|A_n - a - bt_n^*| < \varepsilon) = 1$$

PROPOZIȚIA 4. 3) $\Rightarrow$ 2)

Fie $\tau = \tau_0(t_n, \varepsilon)$ soluția ecuației

$$1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\tau}\right) = \frac{1}{2} P_0(|t_n - g(\theta)| \geq \varepsilon)$$

pentru orice $\varepsilon > 0$.

În cazul în care t_n este un estimator pentru $g(\theta)$, g o funcție reală, Bahadur (1960, b) numește τ abaterea standard efectivă.

DEFINIȚIA 29. Vom spune că estimatorul t_n este asimptotic eficient pentru parametrul θ , dacă

$$(141) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tau^2(n, \varepsilon)}{\tau^2(t_n, \varepsilon)} = 1$$

sau

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2 \lg P(|t_n - \theta| > \varepsilon)}{\varepsilon^2 I_n} = 1.$$

Observații. i) Astfel se compară dispersia efectivă a unui estimator t_n pentru θ cu $\tau^2(n, \varepsilon)$ dispersia funcției de verosimilitate care este $I_n^{-1}(\theta)$.
ii) Dacă

$$(142) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2 \lg P(|t_n - \theta| > \varepsilon)}{\varepsilon^2 I_n} = 1,$$

cînd

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta_0} \left(\left| t_n - \theta_0 - \frac{1}{I_n(\theta_0)} \cdot \frac{\partial \ln P}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} \right| > \frac{1}{I_n(\theta_0)} \cdot \frac{\partial \ln P}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} \right) = 0,$$

atunci t_n este un estimator puternic eficient de primul ordin.

iii) Dacă $\{u_n\}$ este un șir consistent de estimatori pentru parametrul θ , atunci (Bahadur) eficiența asimptotică a estimatorului t_n relativă la estimatorul u_n este

$$(143) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tau^2(t_n, \varepsilon)}{\tau^2(u_n, \varepsilon)}$$

Prin urmare Bahadur consideră drept criteriu de optimalitate al unui estimator concentrația estimatorului în jurul valorii adevărate a parametrului în intervale fixate, cînd volumul selecției tinde către ∞ .

iv) Dacă t_n este eficient în sensul definiției 29, atunci este eficient și în sensul lui Bahadur.

TEOREMA 28. Dacă t_n este un estimator puternic eficient de primul ordin pentru θ , atunci t_n este eficient în sensul definiției 29.

1.3. Cu definiția 26 teorema lui Noether (1955) capătă forma

TEOREMA 29. Fie t_N statistica pe care se bazează testul T_N pentru verificarea ipotezei (136) față de (137).

Fie

$$(144) \quad \theta_N = \theta_0 + \frac{k}{\sqrt{N}}$$

unde k este o constantă pozitivă independentă de N și funcțiile $\psi_N(\theta)$ și $\sigma_N(\theta)$ cu următoarele proprietăți

A. $\psi'_N(\theta_0)$ există pentru toți N

$$\left(A \Rightarrow \frac{\psi_N(\theta) - \psi_N(\theta_0)}{\theta - \theta_0} = \psi'_N(\theta_0) + \varepsilon(N, \theta) \right)$$

unde pentru N fixat, $\varepsilon(N, \theta)$ este $o(1)$ cînd $\theta \downarrow \theta_0$

$$B. \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\psi'_N(\theta_0)}{\sqrt{N} \sigma_N(\theta_0)} = c > 0$$

C. pentru fiecare x

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\frac{t_N - \psi_N(\theta)}{\sigma_N(\theta)} < x\right) = \Phi(x)$$

pentru $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + d, d > 0$, convergența avînd loc uniform în θ

$$D. \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sigma_N(\theta_N)}{\sigma_N(\theta_0)} = 1$$

$$E. \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon(N, \theta)}{\sqrt{N} \sigma_N(\theta)} = 0.$$

În aceste condiții

a) puterea testului T_N în θ_N tinde către

$$(145) \quad 1 - \Phi(z_{1-\alpha} - kc)$$

unde $\Phi(z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$

b) dacă $\theta_n \downarrow \theta_0$, $\theta_N - \theta_0 = O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$, atunci puterea testului T_N în θ_N tinde către α

c) dacă $\{T_N\}$ și $\{T_N^*\}$ sînt două șiruri de teste, satisfăcînd condițiile A — E și dacă $c, c^* > 0$, atunci eficiența asimptotică a testului T_N relativă la testul T_N^* este

$$(146) \quad e(T, T^*) = \frac{E_{T_N}}{E_{T_N^*}} = \left(\frac{c}{c^*}\right)^2$$

unde $E_{T_N}(E_{T_N^*})$ sînt definite ca în (132) (sau același lucru $E_{T_N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{[\psi'_N(\theta_0)]^2}{\sigma_N^2(\theta_0)}$).

Observații. i) Proprietatea $B \Rightarrow \psi'_N(0) > 0$, însă nu necesar ca $\lim_{N \rightarrow \infty} \psi'_N(\theta_0) > 0$.

ii) În proprietatea C, convergența uniformă în θ (urmînd Parzen (1954)) atrage după sine convergența uniformă în θ și x .

Noether (1955), Kendall și Stuart (1961) arată că dacă t este un estimator eficient și $g(t')$ este un estimator consistent, atunci la limită pătratul coeficientului de corelație este egal cu $e(T', T)$.

Fie $\mathcal{C}$ clasa testelor pentru verificarea ipotezei H_0 (136) bazate pe statistica t_N ce satisface condițiile A — E ale teoremei 29 și care conține o statistică $t_{N_{\max}}$ care se bucură de proprietatea că pentru orice α și k dați nu există nici un alt test în clasa $\mathcal{C}$ a cărui putere asimptotică să fie mai mare decît a testului bazat pe statistica $t_{N_{\max}}$; $c_{\max} \geq c$ pentru toate testele din clasa $\mathcal{C}$.

TEOREMA 30. Dacă
a) repartiția vectorului aleator

$$\left(\frac{t_N - \psi_N(\theta)}{\sigma_N(\theta)}, \frac{t_{N_{\max}} - \psi_{N_{\max}}(\theta)}{\sigma_{N_{\max}}(\theta)} \right)$$

este normală bidimensională.

$$b) \lim_{N \rightarrow \infty} \rho_{H_0}(t_N, t_{N_{\max}}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \rho_{\theta_N}(t_N, t_{N_{\max}}) = \rho,$$

atunci

$$(147) \quad \rho^2 = e(T, T_{N_{\max}})$$

7.2. Eficiența în sensul lui Hodges și Lehmann

7.2.1. DEFINIȚIA 30 (Hodges și Lehmann (1956)). Eficiența testului T^* relativă la testul T este

$$(148) \quad e_{T^*, T}(\infty, \alpha, \theta),$$

unde (Definiția 26)

$$e_{T^*, T}(N, \alpha, \theta) = \frac{N}{N^*}$$

este eficiența testului T^* relativă la testul T propusă de Dixon (1953, 1954).

7.2.2. Fie $\{v_n\}$ un șir de statistici, astfel încît șirul statisticilor normalizate $\{t_n\}$, $t_n = \frac{v_n - \mu_n(\theta)}{\sigma_n(\theta)}$ satisface condițiile :

$$c_1 : \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta}(t_n < x) = \Phi(x)$$

$$c_2 : \lim_{n \rightarrow \infty} n \sigma_n^2(\theta) = \sigma^2(\theta) > 0$$

$$c_3 : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n(\theta) - \mu_n(\theta_0)}{\sqrt{n} \sigma_n(\theta)} = c(\theta) > 0,$$

pentru $\theta > \theta_0$.

Vom folosi șirul de statistici t_n pentru verificarea ipotezei (136) față de ipoteza alternativă (137), în care scop vom respinge ipoteza (136) dacă

$$t_n > u_{1-\alpha} \quad 0 < \alpha < 1.$$

În acest caz

$$(149) \quad \alpha_n = P_{\theta_0}(t_n > u_{1-\alpha}) \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$$

$$1 - \pi_n(\theta) = P_\theta(t_n < u_{1-\alpha})$$

și asimptotic

$$(150) \quad 1 - \pi_n(\theta) = \Phi \left(\frac{\mu_n(\theta_0) - \mu_n(\theta)}{\sigma_n(\theta)} + \frac{\sigma_n(\theta_0)}{\sigma_n(\theta_1)} u_{1-\alpha} \right).$$

Ținînd seama că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln [1 - \Phi(x)] = -\frac{x^2}{2}$$

avem

$$(151) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{2}{n} \ln [1 - \pi_n(\theta)] \right\} = c^2(\theta).$$

DEFINIȚIA 31. Vom numi $c^2(\theta)$ pantă aproximativă.

Panta aproximativă este o măsură a ratei convergenței către zero a puterii testului considerat.

Fie $\{T'_n\}$ și $\{T''_n\}$ două șiruri de teste bazate pe șirul de statistici $\{t'_n\}$ și respectiv $\{t''_n\}$ ce satisfac condițiile c_1, c_2, c_3 cu $\alpha_n^1, \alpha_n^2 \rightarrow \alpha$.

DEFINIȚIA 32. Eficiența asimptotică a testului T''_n relativă la testul T'_n este

$$(152) \quad c_1^2(\theta)/c_2^2(\theta).$$

DEFINIȚIA 33. Vom spune că șirul de teste $\{T''_n\}$ este mai eficient decît șirul de teste $\{T'_n\}$ dacă

$$(153) \quad c_1^2(\theta) < c_2^2(\theta).$$

TEOREMA 31. Fie $\mathcal{C}$ clasa statisticilor convexe care satisfac condițiile c_1, c_2 și c_3 și care conține o statistică $t_{n,\max}$ cu cea mai mare pantă aproximativă.

Dacă pentru orice $t_n \in \mathcal{C}$, vectorul aleator $(t_n, t_{n,\max})$ are asimptotic o repartiție $N(\mu, \Sigma)$ unde

$$(154) \quad \mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(t_n, t_{n,\max}) > 0,$$

atunci $c^2(\theta)/c_{\max}^2(\theta) = \rho^2(\theta)$.

Demonstrație. Pentru statistica

$$t_n(\lambda) = \frac{\lambda}{\sigma_n(\theta_0)} v_n + \frac{1-\lambda}{\sigma_{n\max}(\theta_0)} v_{n\max} \in \mathcal{C}$$

avem

$$(155) \quad \mu_{n,\lambda}(\theta) = \frac{\lambda}{\sigma_n(\theta_0)} \mu_n(\theta) + \frac{1-\lambda}{\sigma_{n\max}(\theta_0)} \mu_{n\max},$$

și

$$\sigma_{n,\lambda}^2(\theta) = \lambda^2 \frac{\sigma_n^2(\theta)}{\sigma_n^2(\theta_0)} + (1-\lambda)^2 \frac{\sigma_{n\max}^2(\theta)}{\sigma_{n\max}^2(\theta_0)} + 2\lambda(1-\lambda) \frac{\text{COV}(v_n, v_{n\max})}{\sigma_n(\theta_0) \sigma_{n\max}(\theta_0)}.$$

Deoarece $\text{cov}(t_n, t_{n\max}) = \text{COV}(v_n, v_{n\max}) = \rho_n \sigma_n \sigma_{n\max}$,

$$(156) \quad \sigma_{n,\lambda}^2(\theta) = \lambda^2 \frac{\sigma_n^2(\theta)}{\sigma_n^2(\theta_0)} + (1-\lambda)^2 \frac{\sigma_{n\max}^2(\theta)}{\sigma_{n\max}^2(\theta_0)} + 2\lambda(1-\lambda) \rho_n \frac{\sigma_n(\theta) \sigma_{n\max}(\theta)}{\sigma_n(\theta_0) \sigma_{n\max}(\theta_0)}$$

Din c_3 , (155) și (156), obținem

$$(157) \quad c_\lambda(\theta) = \frac{\lambda \frac{\mu(\theta) - \mu(\theta_0)}{\sigma(\theta_0)} + (1-\lambda) \frac{\mu_{\max}(\theta) - \mu_{\max}(\theta_0)}{\sigma_{\max}}}{\lambda^2 \frac{\sigma^2(\theta)}{\sigma^2(\theta_0)} + (1-\lambda)^2 \frac{\sigma_{\max}^2(\theta)}{\sigma_{\max}^2(\theta_0)} + 2\lambda(1-\lambda) \rho \frac{\sigma(\theta) \sigma_{\max}(\theta)}{\sigma(\theta_0) \sigma_{\max}(\theta_0)}}.$$

Deoarece $c_\lambda^2(\theta)/c_{\lambda\max}^2 \leq 1$, urmează că pentru orice λ real

$$\begin{aligned} & \left[\lambda \frac{\mu(\theta) - \mu(\theta_0)}{\sigma(\theta_0)} + (1-\lambda) \frac{\mu_{\max}(\theta) - \mu_{\max}(\theta_0)}{\sigma_{\max}(\theta_0)} \right]^2 \leq \\ & \leq \left[\frac{\mu_{\max}(\theta) - \mu_{\max}(\theta_0)}{\sigma_{\max}(\theta_0)} \right]^2 \frac{\sigma_{\max}^2(\theta_0)}{\sigma_{\max}^2(\theta)} \left[\lambda^2 \frac{\sigma^2(\theta)}{\sigma^2(\theta_0)} + \right. \\ & \left. + (1-\lambda)^2 \frac{\sigma_{\max}^2(\theta)}{\sigma_{\max}^2(\theta_0)} + 2\lambda(1-\lambda) \rho(\theta) \frac{\sigma(\theta) \sigma_{\max}(\theta)}{\sigma(\theta_0) \sigma_{\max}(\theta_0)} \right]. \end{aligned}$$

Pentru ca forma pătratică în λ să fie pozitivă, trebuie ca

$$\left[\frac{\mu(\theta) - \mu(\theta_0)}{\sigma(\theta_0)} + \rho(\theta) \frac{\mu_{\max}(\theta) - \mu_{\max}(\theta_0)}{\sigma_{\max}(\theta_0)} \cdot \frac{\sigma(\theta) \sigma_{\max}(\theta_0)}{\sigma(\theta_0) \sigma_{\max}(\theta)} \right]^2 \leq 0,$$

și $\rho^2(\theta) = c^2(\theta)/c_{\max}^2(\theta)$

Observații. i) $(c_1^2(\theta)/c_2^2(\theta)) \geq (\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(t_n^{(1)}, t_{n\max}))^2$ unde $t_n^{(1)}$ și $t_n^{(2)}$ satisfac condițiile teoremei 31.

ii) Dacă $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \frac{\sigma^2(\theta)}{\sigma^2(\theta_0)} = 1$, atunci $c_1^2(\theta)/c_2^2(\theta)$ pentru $\theta \rightarrow \theta_0$, tinde către eficiența Pitman a testului bazat pe $t_n^{(1)}$ relativă la $t_n^{(2)}$.

7.3. Eficiența în sensul lui Bahadur

Fie $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ un șir de variabile aleatoare pentru care $P(X_n < x) = F_{X_n}(x; \theta)$, $\theta \in \Omega = [\theta_0, \infty)$, $\theta_0 \in R$ și

1. $\varphi_{X_n}(t)$ există pentru $t \in (a, b)$

2. Pentru $t \in [0, b)$ există

$$\tau_0(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \psi_{X_n}(t), \quad \psi_{X_n}(t) = \ln \varphi_{X_n}(t)$$

3. Pentru $t \in [0, b)$ există

$$\tau_j(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d^j}{dt^j} \psi_{X_n}(t), \quad j = 1, 2$$

astfel încît

3.1. pentru t fixat $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{d}{dt} \psi_{X_n}(t) - n \tau_1(t) \right| = 0$

3.2. $\tau_2(t) > 0$

4. Pentru $t \in [0, b)$ și $\{t_n\}$ un șir arbitrar de numere din (a, b) convergent către t

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{d^3}{dt^3} \psi_{X_n}(t) = 0$$

5. $M_\theta(X_n) = n\mu(\theta)$

unde $\mu(\theta)$ este o funcție crescătoare de θ .

6. $D_\theta^2(X_n) = nb_n(\theta)$

$$\lim_n b_n(\theta) = b(\theta), \quad 0 < b(\theta) < \infty.$$

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{X_n - n\mu(\theta)}{\sqrt{nb_n(\theta)}} < x\right) = \Phi(x).$

Vom respinge ipoteza

$$H_0: \theta = \theta_0$$

față de ipoteza alternativă

$$H_1: \theta > \theta_0$$

dacă pentru fiecare n , valoarea observată a variabilei X_n este mai mare decît valoarea critică x_n ; deci testul propus are regiunea critică

$$(158) \quad W_n = \{\omega : X_n(\omega) > x_n\}$$

(a nu se confunda x_n cu $X_n(\omega)$).

Fie $\theta > \theta_0$ (θ fixat) și un șir de valori critice astfel încît

$$(159) \quad x_n > n\mu(\theta); \quad \frac{x_n - n\mu(\theta)}{\sqrt{n}} = \varepsilon_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < \infty.$$

Pentru un astfel de șir de valori critice, ținînd seama că

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \pi(W_n, \theta) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P_0(X_n > x_n) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n < x_n) = \\ (160) \quad &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(Z_n < \frac{x_n - n\mu(\theta)}{\sqrt{nb(\theta)}}\right) = \\ &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n < \varepsilon_n / \sqrt{b(\theta)}) = 1 - \Phi(\varepsilon / \sqrt{b(\theta)}) \end{aligned}$$

puterea $\pi(W_n, \theta)$ este întotdeauna mărginită sau de 0 sau de 1. Pentru a folosi acest rezultat pentru determinarea vitezei de convergență către zero a pragului de semnificație al testului introducem notația

$$I = \{\tau_1(t); t \in (0, b)\} \text{ și } e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$$

astfel încît

$$(161) \quad e_n = e + \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{n}}$$

unde $e \in I$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = e$ și demonstrăm teoremele.

TEOREMA 32. Dacă Y_n este variabila aleatoare avînd funcția de repartiție

$$(162) \quad \frac{1}{\varphi_{X_n}(t)} \int_{-\infty}^y \exp(iku) dF_{X_n}(u), \quad 0 < k < b$$

atunci

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} M(Y_n) = ie \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} |M(Y_n) - nie| = 0 \end{aligned}$$

$$\text{ii)} \quad D^2(Y_n) = n\tau_n = \sigma_n^2$$

unde $\tau_n > 0$ pentru toți n și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \tau_2(k) > 0$$

iii) Variabila aleatoare $Z_n = (Y_n - ne) / \sqrt{n}$ are la limită o repartiție $N[0, \tau_2(k)]$.

TEOREMA 33. Avem

$$(163) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{n} P(X_n > ne_n) \right] = k(\theta) - \tau_0(k).$$

Marginea regiunii critice $W_n : x_n$, ținând seama de (159) se scrie

$$(164) \quad x_n = n\mu(\theta) + \sqrt{n} \varepsilon_n.$$

Dacă $\mu(\theta) \in I$, atunci din teorema 33

$$(165) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{n} \ln P_{\theta_0}(X_n > x_n) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n} \ln \alpha_n \right) = \\ = k(\theta) \mu(\theta) - \tau_0[k(\theta)] = c(\theta)$$

unde $k(\theta) \in (0, b)$ este soluția ecuației $\tau_1[k(\theta)] = \mu(\theta)$.

Funcția $c(\theta)$ definită de ecuația (165) dă o măsură a vitezei de convergență a pragului de semnificație al testului către zero.

DEFINIȚIA 34. (Bahadur (1967)). $2c(\theta)$ poartă numele de panta lui X_n .

Fie $\{X_{n,1}\}, \{X_{n,2}\}$ două șiruri de statistici pentru verificarea ipotezei H_0 față de H_1 și c_1 și c_2 limitele din (165)

DEFINIȚIA 35. (Bahadur (1960)). Eficiența asimptotică a șirului de teste bazat pe $\{X_{n,1}\}$ relativă la șirul de teste bazat pe $\{X_{n,2}\}$ este

$$(166) \quad \varphi_{1,2}(\theta) = c_1(\theta)/c_2(\theta).$$

Pentru $\alpha \in (0,1)$ fie $N(\alpha, \theta)$ cel mai mic întreg m astfel încît

$$(167) \quad \alpha_m(\theta) \leq \alpha.$$

Avem (Bahadur (1967))

$$(168) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} -\frac{1}{N(\alpha, \theta)} \cdot \ln \alpha = c(\theta),$$

relația ce rezultă din (165) și din inegalitățile

$$\alpha_{N(\alpha, \theta)}(\theta) \leq \alpha \leq \alpha_{N(\alpha, \theta)-1}(\theta).$$

Dacă pentru fiecare șir $\{X_{n,1}\}, \{X_{n,2}\}$ și $\alpha \in (0, 1)$ considerăm întregii $N_1(\alpha, \theta), N_2(\alpha, \theta)$ definiții ca în (167) atunci

$$(169) \quad \varphi_{1,2}(\theta) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{N_2(\alpha, \theta)}{N_1(\alpha, \theta)}$$

relație ce rezultă din (168).

Demonstrăm teorema 32

i) rezultă din condiția 3 și din faptul că

$$(170) \quad \psi'_{Y_n}(0) = \psi'_{X_n}(k) = iM(Y_n).$$

ii) rezultă din condiția 3, din faptul că

$$(171) \quad \psi''_{Y_n}(0) = \psi''_{X_n}(k) = i^2 D^2(Y_n)$$

și ținînd seama că $n\tau_n$ este dispersia unei variabile nedegenerate, $\tau_n > 0$.

iii) Avem

$$\varphi_{Z_n}(t) = \exp(-itc\sqrt{n})\varphi_{Y_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \exp(-itc\sqrt{n})\varphi_{X_n}\left(k + \frac{t}{\sqrt{n}}\right) / \varphi_{X_n}(k)$$

$$\psi_{Z_n}(t) = -itc\sqrt{n} + \psi_{X_n}\left(k + \frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \psi_{X_n}(k).$$

Dezvoltînd $\psi_{X_n}\left(k + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ în serie Taylor în jurul punctului k , găsim

$$(172) \quad \psi_{Z_n}(t) = t\sqrt{n}\left[\frac{1}{n}\psi'_{X_n}(k) - ie\right] + \frac{t^2}{2n}\psi''_{X_n}(k) + \frac{t^3}{3n\sqrt{n}}\psi'''_{X_n}(k_n),$$

unde k_n este situat între k și $k + \frac{t}{\sqrt{n}}$.

$$\text{Din punctul i)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \psi'_{X_n}(t) - ie \right] = 0.$$

$$\text{Din (171)} \quad \frac{t^2}{2n} \psi''_{X_n}(t) = -\frac{t^2}{2n} D^2(Y),$$

iar din punctul ii)

$$\frac{t^2}{2n} \psi'''_{X_n}(t) = -\frac{t^2}{2} \tau_n.$$

Cu acestea (172) se scrie

$$\psi_{Z_n}(t) = -\frac{t^2}{2} \tau_n + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = k$ și are loc condiția 4).

Deci

$$\psi_{z_n}(t) = -\frac{t^2 \tau_2(k)}{2}$$

ceea ce demonstrează teorema.

Demonstrăm teorema 33.

Folosind relația

$$(173) \quad F_{X_n}(y) = \varphi_{X_n}(k) \int_{-\infty}^y \exp(-iku) dF(u),$$

găsim

$$(174) \quad P(X_n > ne_n) = \varphi_{X_n}(k) \int_{ne_n}^{\infty} \exp(-iku) dF(u).$$

Din teorema 32 pct. ii), făcînd transformarea $(u - ne)/\sigma_n = z$, iar apoi ținînd seama de (161), găsim (după logaritmare)

$$(175) \quad -\frac{1}{n} \ln P(X_n > ne_n) = -\frac{1}{n} \psi_{X_n}(k) + ike - \\ -\frac{1}{n} \int_{\varepsilon_n/\sqrt{\tau_n}}^{\infty} \exp(-ik\sigma_n z) dF(\sigma_n z + ne)$$

Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{\tau_n}}$ este finită ((161) și teorema 32 pct. ii) există

N, l_1 și l_2 astfel încît pentru $n > N$

$$l_1 < l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{\tau_n}} < l_2.$$

Pentru

$$A(n) = \int_{\varepsilon_n/\sqrt{\tau_n}}^{\infty} \exp(-ik\sigma_n z) dF(\sigma_n z + ne)$$

au loc inegalitățile

$$(176) \quad A(n) \leq \int_{l_1}^{\infty} \exp(-ik\sigma_n z) dF(\sigma_n z + ne) \leq \exp(-ik\sigma_n l_1) P\left(\frac{Y_n - ne}{\sigma_n} < l_1\right)$$

$$(177) \quad A(n) \geq \int_{l_2}^{l_2+1} \exp(-ik\sigma_n z) dF(\sigma_n z + ne) \geq \exp(-ik\sigma_n(l_2 + \\ + 1)) P\left(l_2 < \frac{Y_n - ne}{\sigma_n} < l_2 + 1\right).$$

Din teorema 32 pct. iii)

$$(178) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{Y_n - ne}{\sigma_n} > l_1\right) = 1 - \Phi(l_1) > 0$$

și

$$(179) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(l_2 < \frac{Y_n - ne}{\sigma_n} < l_2 + 1\right) = \Phi(l_2 + 1) - \Phi(l_2) > 0$$

Pentru $n > N' > N$, din (176) și (177), obținem

$$(180) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{n} ikl_1 \sigma_n - \frac{1}{n} \ln[1 - \Phi(l_1)] \leq -\frac{1}{n} \ln A(n) \leq \\ & \leq \frac{1}{n} k(l_2 + 1) \sigma_n - \frac{1}{n} \ln[\Phi(l_2 + 1) - \Phi(l_2)]. \end{aligned}$$

Din pct. ii) teorema 32, (180) devine

$$\begin{aligned} & ikl_1 \sqrt{\frac{\tau_n}{n}} - \frac{1}{n} \ln[1 - \Phi(l_1)] \leq -\frac{1}{n} \ln A(n) \leq \\ & \leq ik(l_2 + 1) \sqrt{\frac{\tau_n}{n}} - \frac{1}{n} \ln[\Phi(l_2 + 1) - \Phi(l_2)]. \end{aligned}$$

Din pct. ii) teorema 32, din (178) și (179)

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ ikl_1 \sqrt{\frac{\tau_n}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \ln[1 - \Phi(l_1)] \right\} = 0 \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ ik(l_2 + 1) \sqrt{\frac{\tau_n}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \ln[\Phi(l_2 + 1) - \Phi(l_2)] \right\} = 0 \end{aligned}$$

Urmează că

$$(181) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{\sqrt{n}} \ln A(n) = 0.$$

Ținând seama în (175) de (181) găsim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{n} \ln P(X_n > ne_n) \right] = ike - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \psi_{X_n}(k) = ike - \tau_0(k),$$

ceea ce demonstrează teorema.

7.4. Compararea eficiențelor

Fie $X_1, X_2, \dots, X_N$ o selecție asupra unei variabile aleatoare $X \sim N(\theta, 1)$.

Folosind statisticile

$$(182) \quad t_{N,1} = \sqrt{N} |\bar{X}_N|$$

și

$$(183) \quad t_{N,2} = \begin{cases} \sqrt{N - [Np]} \bar{Y}_{N-[Np]}, & \bar{X}_{[Np]} \geq 0 \\ -\sqrt{N - [Np]} \bar{Y}_{N-[Np]}, & \bar{X}_{[Np]} < 0 \end{cases}$$

unde: p este constantă, $0 < p < 1$, $[Np]$ partea întreagă a numărului Np și N mare astfel încât $1 < [Np] < N$,

$$\bar{Y}_{N-[Np]} = \frac{1}{N - [Np]} \sum_{j=[Np]+1}^N X_j$$

ne propunem să verificăm ipoteza

$$H_0: \theta = 0$$

față de ipoteza alternativă

$$H_1: \theta \neq 0.$$

Vom respinge ipoteza H_0 pentru valori mari ale statisticii $t_{N,i}$, $i = 1, 2$.

Deoarece statistica $t_{N,1}$ are proprietăți optime, vom considera eficiența statisticii $t_{N,2}$ relativă la $t_{N,1}$.

Alegem și fixăm α și β , $0 < \alpha < 1 - \beta < 1$.

Pe baza statisticii $t_{N,i}$ ($i = 1, 2$) construim un test la pragul de semnificație α și de puterea $\pi = 1 - \beta$ (pentru $\theta \neq 0$ dat).

Deci, pentru fiecare N

$$(184) \quad P(t_{N,i} > c_i | \theta = 0) = \alpha$$

Din

$$P[t_{N,1} > c_1 | \theta = 0] = 1 - P[t_{N,1} \leq c_1 | \theta = 0],$$

ținând seama că $\sqrt{N} \bar{X}_N$ (în ipoteza H_0) $\sim N(0, 1)$ găsim

$$(185) \quad P[t_{N,1} > c_1 | \theta = 0] = 1 - [\Phi(c_1) - \Phi(-c_1)] = 2[1 - \Phi(c_1)].$$

Din (184) și (185) obținem

$$(186) \quad c_1 = z_{1-\frac{\alpha}{2}}.$$



Pentru α , N și $\theta \neq 0$ dați, puterea testului pentru verificarea ipotezei H_0 față de ipoteza alternativă H_1 , bazat pe statistica $t_{N,1}$, este

$$\begin{aligned} \pi_{N,1} &= P(t_{N,1} > z_{1-\frac{\alpha}{2}} | \theta) = \\ (187) \quad &= 1 - [\Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}} - \sqrt{N}\theta) - \Phi(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} - \sqrt{N}\theta)], \end{aligned}$$

sau ținând seama că $-z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{\alpha}{2}}$.

$$\begin{aligned} \pi_{N,1} &= 1 - [1 - \Phi(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} + \sqrt{N}\theta) - \Phi(z_{\frac{\alpha}{2}} - \sqrt{N}\theta) = \\ (188) \quad &= \Phi(z_{\frac{\alpha}{2}} + \sqrt{N}\theta) + \Phi(z_{\frac{\alpha}{2}} - \sqrt{N}\theta). \end{aligned}$$

Din $P[t_{N,2} > c_2 | \theta = 0] = 1 - P[t_{N,2} \leq c_2 | \theta = 0]$, ținând seama că $\sqrt{N - [Np]} \bar{Y}_{N-[Np]} \sim N(0, 1)$ și independentă de $\bar{X}_{[Np]} \sim N(0, 1/[Np])$: găsim

$$\begin{aligned} P[t_{N,2} > c_2 | \theta = 0] &= \\ &= 1 - \{\Phi(c_2) [1 - \Phi(0)] + \Phi(c_2)\Phi(0)\}, \end{aligned}$$

sau ținând seama că $\Phi(0) = \frac{1}{2}$

$$(189) \quad P[t_{N,2} > c_2 | \theta = 0] = 1 - \Phi(c_2).$$

Din (184) și (189) obținem

$$(190) \quad c_2 = z_{1-\alpha}$$

Pentru α , N și $\theta \neq 0$ dați, puterea testului pentru verificarea ipotezei H_0 față de ipoteza alternativă H_1 , bazat pe statistica $t_{N,2}$ este

$$\begin{aligned} \pi_{N,2} &= P(t_{N,2} > z_{1-\alpha} | \theta) = \\ &= 1 - [\Phi(z_{1-\alpha} - \sqrt{N - [Np]}\theta) [1 - \Phi(-\sqrt{[Np]}\theta)] + \\ &+ [1 - \Phi(z_{1-\alpha} - \sqrt{N - [Np]}\theta)\Phi(-\sqrt{[Np]}\theta)], \end{aligned}$$

sau

$$\begin{aligned} \beta_{N,2} &= \Phi(z_{1-\alpha} - \sqrt{N - [Np]}\theta) \Phi(\sqrt{[Np]}\theta) + \\ (191) \quad &+ \Phi(z_{1-\alpha} + \sqrt{N - [Np]}\theta) \Phi(-\sqrt{[Np]}\theta) \end{aligned}$$

Pentru fiecare i ,

(192) $N_i = N_i(\alpha, \beta, \theta)$, $\theta > 0$ prin simetrie este cel mai mic N astfel încît

$$(193) \quad P(t_{N,i} \geq c_i | \theta) \geq 1 - \beta.$$

DEFINIȚIA 36. Eficiența statisticii $t_{N,2}$ relativă la $t_{N,1}$ este

$$(194) \quad e(\alpha, \beta, \theta) = \frac{N_1(\alpha, \beta, \theta)}{N_2(\alpha, \beta, \theta)}.$$

În cazul particular studiat, eficiența Pitman (s-o notăm prin e_1) poate fi exprimată ca

$$(195) \quad e_1 = \lim_{\theta \rightarrow 0} e(\alpha, \beta, \theta).$$

Considerăm ipotezele alternative

$$H_N : \theta_N = \frac{k_1}{\sqrt{N}}, \quad N = 1, 2,$$

unde k_1 este astfel încît pentru fiecare N

$$\beta_{N,1} = \beta \text{ pentru alternativa } H_N.$$

Fie $q = 1 - p$ și k_2 astfel încît

$$(196) \quad \beta = \Phi(z_{1-\alpha} - \sqrt{q}k_2) \Phi(\sqrt{p}k_2) + \Phi(z_{1-\alpha} + \sqrt{q}k_2) \Phi(-\sqrt{p}k_2).$$

Urmează că

$$(197) \quad e_1 = \left(\frac{k_1}{k_2} \right)^2.$$

e_1 nu este independentă de α și β și aceasta se explică prin faptul că condițiile (C) și (D) ale teoremei 29 nu sînt satisfăcute.

Eficiența Hodges-Lehmann (s-o notăm prin e_2) se exprimă ca

$$(198) \quad e_2 = \lim_{\beta \rightarrow 0} e(\alpha, \beta, \theta)$$

și are loc

TEOREMA 34.

$$(199) \quad e_2 = \min(p, q).$$

Demonstrație. Dacă $\theta > 0$, din (187) găsim

$$(200) \quad \beta_{N,1} \simeq \Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}} - \sqrt{N}\theta)$$

iar din (191) și (196)

$$(201) \quad \beta_{N,2} = \Phi(z_{1-\alpha} - \sqrt{Nq} \theta) + \Phi(-\sqrt{Np} \theta).$$

Deoarece

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lg \Phi(z_{1-\alpha} - \sqrt{Nq} \theta) = -q \frac{\theta^2}{2},$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lg \Phi(-\sqrt{Np} \theta) = -p \frac{\theta^2}{2},$$

urmează că

$$(202) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} -\frac{2}{N} \lg \beta_{N,1} = \theta^2, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} -\frac{2}{N} \lg \beta_{N,2} = \theta^2 \min(p, q),$$

ceea ce demonstrează teorema.

Observație. Cazul $\theta < 0$ rezultă prin simetrie.

În cazul particular studiat, eficiența Bahadur (s-o notăm prin e_3) poate fi exprimată ca

$$(203) \quad e_3 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} e(\alpha, \beta, \theta)$$

și are loc

TEOREMA 35. Din (193) și (194) urmează că, pentru $\theta \neq 0$ și oricare ar fi $\varepsilon > 0$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{N}} t_{N,1} - |\theta|\right| < \varepsilon\right) = 1$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{N}} t_{N,2} - \sqrt{q} |\theta|\right| < \varepsilon\right) = 1$$

ceea ce arată că $\frac{1}{\sqrt{N}} t_{N,1} = |\bar{X}_N|$ și $\frac{1}{\sqrt{Nq}} t_{N,2}$ sînt estimatori consistenți pentru $|\theta|$.

Pentru $0 < u < \infty$ și $\theta = 0$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} -\frac{2}{N} \lg P(t_{N,1} > \sqrt{N} u) = u^2$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} -\frac{2}{N} \lg P(t_{N,2} > \sqrt{N} u) = u^2.$$

Deoarece panta exactă a testului bazat pe statistica $t_{N,1}(t_{N,2}) = \theta^2(\theta^2 q)$ rezultă teorema.

Observație. (197), teorema 34 și teorema 35 arată că eficiențele asimptotice propuse de Pitman, Hodges și Lehmann și Bahadur a tes-

tului bazat pe statisticile $t_{N,1}$ relativă la testul bazat pe statistica $t_{N,2}$ pentru verificarea ipotezei H_0 față de H_1 nu concordă nici pentru valori ale parametrului, sub H_1 , apropiate de zero.

Cu toate acestea are loc

TEOREMA 36. Dacă $\theta > 0$ (θ are semnul necunoscut) și $\bar{Y}_{N-[Np]}$ ($|Y_{N-[Np]}|$) este comparată cu $\bar{X}_N$ ($|\bar{X}_N|$) atunci

$$e_1(\alpha, \beta) = e_2(\alpha, \theta) = e_3(\beta, \theta) = q$$

pentru toți α, β și $\theta \neq 0$.

§ 8. Relația dintre intervalele de încredere și verificarea ipotezelor statistice

Ne vom ocupa de legătura dintre problema găsirii unui interval de încredere pentru θ_1 și problema verificării ipotezei :

$$H_0 : \theta_1 = \theta_1^0 \text{ față de alternativa } H_1 : \theta_1 \neq \theta_1^0.$$

Vom arăta că dacă există un interval de încredere pentru θ_1 , avînd coeficientul de încredere $1-\alpha$, atunci pentru fiecare θ_1 există o regiune critică $W(\theta_1^0)$ pentru verificarea ipotezei $H_0 : \theta_1 \neq \theta_1^0$ față de alternativa $H_1 : \theta_1 \neq \theta_1^0$ cu pragul de semnificație α , adică

$$P(x \in W(\theta_1^0) | \theta_1^0, \theta_2, \dots, \theta_k) = \alpha.$$

Am presupus că repartiția depinde de k , parametrii $\theta_1, \dots, \theta_k$. Dacă ipoteza H_0 este adevărată și dacă pentru θ_1 există un interval de încredere cu coeficientul de încredere $1 - \alpha$, atunci probabilitatea ca acest interval să conțină o valoare incorectă pentru θ_1 trebuie să fie mică, adică dacă θ_1^0 este valoarea adevărată a parametrului θ_1 și $\theta_1' \neq \theta_1^0$ va trebui ca

$$P(\underline{\theta}_1 \leq \theta_1' \leq \bar{\theta}_1 | \theta_1^0, \theta_2, \dots, \theta_k)$$

să fie mică.

DEFINIȚIA 37. Să presupunem că există un interval de încredere $[\underline{\theta}_1, \bar{\theta}_1]$ și pentru orice θ_1 , definim o submulțime $A(\theta_1)$, a mulțimii valorilor de selecție astfel

$$A(\theta_1) = \{x; \underline{\theta}_1 < \theta_1 < \bar{\theta}_1\}.$$

Mulțimea $A(\theta_1)$ poartă numele de regiune de acceptare pentru parametrul θ_1 .

Fie

$$\Omega_1 = \{\theta_1 : (\theta_1, \dots, \theta_k) \in \Omega\}$$

și $\mathcal{S}(\Omega)$ spațiul de selecție al tuturor vectorilor x pentru toți vectorii $(\theta_1, \dots, \theta_k) \in \Omega$.

TEOREMA 37. Pentru fiecare $\theta_1 \in \Omega_1$

$$\{x \in A(\theta_1)\} = \{\theta_1(x) < \theta_1 < \bar{\theta}_1(x)\}.$$

TEOREMA 38. Dacă există un interval de încredere cu coeficientul de încredere $1 - \alpha$ pentru θ_1 , atunci pentru fiecare $\theta_1^0 \in \Omega_1$ există o regiune critică pentru verificarea ipotezei

$$H: \theta_1 = \theta_1^0 \text{ față de alternativa } H_1: \theta_1 \neq \theta_1^0$$

cu pragul de semnificație α .

Demonstrație. Pentru orice $\theta_1 \in \Omega_1$

$$P(x \in A(\theta_1) \mid \theta_1, \dots, \theta_k) = 1 - \alpha$$

și pentru orice $\theta_1^0 \in \Omega_1$ și $(\theta_1^0, \theta_2, \dots, \theta_k) \in \Omega$.

$$P(x \in CA(\theta_1^0) \mid \theta_1^0, \theta_2, \dots, \theta_k) = \alpha,$$

unde $CA(\theta_1^0)$, complementarea mulțimii $A(\theta_1^0)$ față de $\mathcal{S}(\Omega)$, este regiunea critică pentru verificarea ipotezei $H_0: \theta_1 = \theta_1^0$ față de alternativa $H_1: \theta_1 \neq \theta_1^0$ cu pragul de semnificație α .

Pentru orice $\theta_1' \neq \theta_1^0$, probabilitatea

$$P(x \in A(\theta_1') \mid \theta_1^0, \theta_2, \dots, \theta_k)$$

trebuie să fie mică, sau

$$P(x \in CA(\theta_1') \mid \theta_1^0, \theta_2, \dots, \theta_k)$$

trebuie să fie mare. Dacă $k = 1$, atunci $CA(\theta_1)$ este o regiune critică pentru verificarea unei ipoteze simple, față de o alternativă compusă; dacă $k > 1$, există o regiune critică pentru verificarea unei ipoteze compuse față de o alternativă compusă.

TEOREMA 39. Familia complementarelor regiunilor de acceptare ale unui interval de încredere cu pragul de semnificație α este o regiune critică uniform cea mai bună, dacă și numai dacă $[\theta_1, \bar{\theta}_1]$ este un interval de încredere uniform cel mai bun, cu coeficientul de încredere $1 - \alpha$.

Demonstrație. Fie $\{A(\theta_1): \theta_1 \in \Omega_1\}$ familia regiunilor de acceptare determinate de $\theta_1, \bar{\theta}_1$ și $\{B(\theta_1): \theta_1 \in \Omega_1\}$ familia regiunilor de acceptare determinate de $\varphi_1, \bar{\varphi}_1$. Atunci, condiția ca $[\theta_1, \bar{\theta}_1]$ să fie interval de încredere uniform cel mai bun este ca

$$P(x \in A(\theta_1) \mid \theta_1^0) \leq P(x \in B(\theta_1') \mid \theta_1')$$

pentru fiecare θ_1^0 și fiecare θ_1' sau

$$P(x \in CA(\theta_1^0) \mid \theta_1') \geq P(x \in CB(\theta_1') \mid \theta_1'),$$

ceea ce ne spune că $CA(\theta_1^0)$ este o regiune critică uniform cea mai bună pentru verificarea ipotezei $H_0: \theta_1 = \theta_1^0$ față de alternativa $H_1: \theta = \theta_1'$ cu pragul de semnificație α .

În cele ce urmează vom da condiții necesare și suficiente ca o familie de mulțimi $\{A(\theta_1): \theta_1 \in \Omega_1\}$ să fie o familie de regiuni de acceptare pentru orice interval de încredere $[\underline{\theta}_1, \bar{\theta}_1]$.

TEOREMA 40. Dacă $[\underline{\theta}_1, \bar{\theta}_1]$ este un interval de încredere cu coeficientul de încredere $1 - \alpha$, pentru θ_1 , cu regiunea de acceptare $\{A(\theta_1): \theta_1 \in \Omega_1\}$, atunci

$$1) \quad P(x \in A(\theta_1) | \theta_1, \dots, \theta_k) = 1 - \alpha$$

oricare ar fi $(\theta_1, \dots, \theta_k) \in \Omega$;

2) pentru orice $x \in \mathcal{S}(\Omega)$ mulțimea

$$S(x) = \{\theta_1: x \in A(\theta_1)\}$$

este un interval închis și $\mathcal{S}(x) \subset \Omega_1$.

Demonstrație. Proprietatea 1) este o consecință a definiției intervalului de încredere și a teoremei 37. Fie $x \in \mathcal{S}(\Omega)$. Atunci din definiția intervalului de încredere, $\underline{\theta}_1(x) < \bar{\theta}_1(x)$. Să alegem drept θ_1 un număr din intervalul închis $[\underline{\theta}_1, \bar{\theta}_1]$; atunci $\theta_1 \in \Omega_1$ și deci $x \in A(\theta_1)$, ceea ce dovedește că mulțimea $S(x)$ nu este vidă. Din definiția mulțimii $S(x)$ și a regiunii de acceptare

$$S(x) = \{\theta_1 | \underline{\theta}_1(x) < \theta_1 < \bar{\theta}_1(x)\} = [\underline{\theta}_1(x), \bar{\theta}_1(x)]$$

ceea ce demonstrează teorema.

TEOREMA 41. Fie $\{A(\theta_1); \theta_1 \in \Omega_1\}$ o familie de părți din R^n care satisfac condițiile 1) și 2) din teorema 40. În aceste condiții există un interval de încredere cu coeficientul de încredere $1 - \alpha$, $[\underline{\theta}_1, \bar{\theta}_1]$ a cărei regiune de acceptare este tocmai această familie de mulțimi.

Demonstrație. Pentru fiecare $x \in \mathcal{S}(\Omega)$ definim funcțiile

$$\underline{\theta}_1(x) = \inf S(x), \quad \bar{\theta}_1(x) = \sup S(x),$$

unde $S(x) = \{\theta_1: x \in A(\theta_1)\}$. Atunci din proprietatea 2), teorema precedentă rezultă că mulțimea $S(x)$ nu este vidă și este un interval închis, iar mărimile $\underline{\theta}_1, \bar{\theta}_1$ sînt bine definite. Avem

$$[\underline{\theta}_1(x), \bar{\theta}_1(x)] = S(x) \subset \Omega_1.$$

Fie $x^0 = \{x: \underline{\theta}_1(x) < \theta_1 < \bar{\theta}_1(x)\}$; atunci $\theta_1(x^0) < \theta_1 < \bar{\theta}_1(x^0)$ și cum $S(x)$ este un interval închis rezultă că $x^0 \in A(\theta_1)$, adică $x^0 \in \{x: x \in A(\theta_1)\}$. Pe de altă parte, dacă $x^0 \in \{x: x \in A(\theta_1)\}$, atunci $\theta^0 \in A(\theta_1)$ și deci $\theta_1 \in S(x^0)$; rezultă atunci că $\underline{\theta}_1(x^0) < \theta_1 < \bar{\theta}_1(x^0)$ și

$$\{x: x \in A(\theta_1)\} = \{x: \underline{\theta}_1(x) < \theta_1 < \bar{\theta}_1(x)\}.$$

Pentru obținerea unui test trebuie să se verifice numai dacă are loc condiția 2) din teorema 41.

Probleme

1. Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare X repartizate uniform pe $(0, \theta)$

Să se arate că:

a) pentru verificarea ipotezei

$$H_0: \theta \leq \theta_0 \text{ față de } H_1: \theta > \theta_0$$

orice test pentru care

$$M_{\theta_0} \phi(X) = \alpha, M_{\theta} \phi(X) \leq \alpha \text{ pentru } \theta \leq \theta_0$$

și $\phi(x) = 1$ cind $\max(x_1, \dots, x_n) > \theta_0$,

este U.C.M.P. la pragul de semnificație α . (am notat $X = (X_1, \dots, X_n)$).

b) pentru verificarea ipotezei

$$H_0: \theta = \theta_0 \text{ față de } \theta \neq \theta_0,$$

există un test U.C.M.P. unic, care este dat de

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \max(x_1, \dots, x_n) > \theta_0 \text{ sau} \\ & \max(x_1, \dots, x_n) \leq \theta_0 \sqrt[n]{\alpha} \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Neyman, Pearson (1933)

2. Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ o selecție asupra unei variabile cu densitatea $a \exp[-a(x-b)]$, $x \geq b$.

Să se determine

a) testul U.C.M.P. pentru verificarea ipotezei

$$H_0: b = b_0 \text{ față de } H_1: b \neq b_0$$

cind a este cunoscut.

b) testul U.C.M.P. pentru verificarea ipotezei

$$H_0: a = a_0, b = b_0$$

față de alternativele

$$H_1: a > a_0, b < b_0$$

Neyman, Pearson (1936 b).

3. a) Dacă există derivata mixtă de ordinul doi $\partial^2 \ln p_{\theta}(x) / \partial \theta \partial x$, atunci condiția necesară și suficientă pentru ca densitățile $p_{\theta}(x)$ să aibă raportul de verosimilități monoton în x , este ca această derivată să fie ≥ 0 pentru toți θ și toți x .

b) O condiție echivalentă este ca

$$p_{\theta}(x) \frac{\partial^2 p_{\theta}(x)}{\partial \theta \partial x} \geq \frac{\partial p_{\theta}(x)}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial p_{\theta}(x)}{\partial x}$$

pentru toți θ și toți x .

Lehmann (1959)

4. Densitatea de repartiție $p_{\theta}(x)$ a variabilei aleatoare X are raportul de verosimilități monoton în $T(x)$. Dacă T are o repartiție continuă, pragul de semnificație α al testului pentru verificarea ipotezei

$$H_0: \theta \leq \theta_0 \text{ față de } \theta > \theta_0$$

este dat de

$$\hat{\alpha} = P_{\theta_0}\{T \geq t\},$$

unde t este valoarea observată a statisticii T . Dacă pentru testele aleatoare $\hat{\alpha}$ este definit ca cel mai mic prag de semnificație la care ipoteza H_0 este respinsă cu probabilitatea 1, afirmația anterioară este de asemenea adevărată fără presupunerea de continuitate.

Lehmann (1959)

5. Fie p_n densitatea repartiției uniforme pe $[0, 1 + 1/n]$ și p_0 densitatea repartiției uniforme pe $(0, 1)$. Să se arate că

a) p_0 este linear independentă de $(p_1, p_2, \dots)$, adică nu există constantele $c_1, c_2, \dots$ astfel încît $p_0 = \sum c_n p_n$.

b) nu există un test ϕ astfel încît $\int \phi p_n = \alpha$, pentru $n = 1, 2, \dots$, însă $\int \phi p_0 > \alpha$.

Lehman (1959)

6. Considerăm o familie de teste pentru verificarea ipotezei $H_0: \theta = \theta_0$ (sau $\theta \leq \theta_0$), cu pragul de semnificație α și regiunile critice W_α astfel încît:

i) $P_{\theta_0}\{X \in W_\alpha\} = \alpha$ pentru toți $0 < \alpha < 1$

și

ii) $W_{\alpha_0} = \bigcap_{\alpha > \alpha_0} W_\alpha$ pentru toți $0 < \alpha_0 < 1$ (care în particular implică $W_\alpha \subset W_{\alpha'}$, pentru $\alpha < \alpha'$).

Să se arate că

a) pragul critic $\hat{\alpha}$ este dat de $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(x) = \inf\{\alpha, x \in W_\alpha\}$

b) pentru $\theta = \theta_0$ repartiția lui $\hat{\alpha}$ este uniform pe $(0, 1)$.

c) dacă testele W_α sint nedeplasate, repartiția lui $\hat{\alpha}$ în orice ipoteză alternativă θ satisface

$$P_\theta\{\hat{\alpha} \leq \alpha\} \geq P_{\theta_0}\{\hat{\alpha} \leq \alpha\} = \alpha.$$

d) dacă găsim în urma unui număr de experiențe independente valorile critice, acestea pot fi combinate (b) și c)) pentru obținerea testului ipotezei.

Wallis (1942), Birnbaum (1954),
Lehmann (1959)

7. Fie $X \sim P_0(\lambda)$ și ipoteza $H_0: \lambda = \lambda_0$. Să se arate că condiția (88) se reduce la

$$\sum_{x=c_1+1}^{c_2-1} \frac{\lambda_0^{x-1}}{(x-1)!} e^{-\lambda_0} + \sum_{i=1}^2 (1 - \gamma_i) \frac{\lambda_0^{c_i-1}}{(c_i-1)!} e^{-\lambda_0} = 1 - \alpha.$$

8. Fie X și Y variabile aleatoare independente astfel încît repartiția lor comună este dată de

$$dP_{\theta_1, \theta_2}(x, y) = c(\theta_1) e^{\theta_1 T(x)} d\mu(x) K(\theta_2) e^{\theta_2 U(y)} dv(y).$$

Să se arate că nu există un test U.C.M.P. nedeplasat pentru verificarea ipotezei

$$H_0: \theta_1 = a, \quad \theta_2 = b$$

față de alternativele

$$H_1: \theta_1 \neq a \text{ sau } \theta_2 \neq b.$$

C.M.P. test nedeplasat față de alternativele

$$\theta_1 \neq a, \quad \theta_2 = b \text{ și } \theta_1 = a, \quad \theta_2 \neq b$$

au regiunile de acceptare

$$C_1 < T(x) < C_2 \text{ și respectiv } K_1 < U(y) < K_2.$$

9. Vectorul aleator (X, Y) are repartiția

$$dP_{\theta_1, \theta_2}(x, y) = C(\theta_1, \theta_2) e^{\theta_1 x + \theta_2 y} d\mu(x, y).$$

Să se arate că singurul test nedeplasat pentru verificarea ipotezei $H_0: \theta_1 \leq a, \theta_2 \leq b$ față de $H_1: \theta_1 > a$ sau $\theta_2 > b$ sau amândouă este $\phi(x, y) \equiv \alpha$.

Lehmann (1952)

10. Fie θ un parametru real, $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vector cu densitatea

$$p_\theta(x) = c(\theta) e^{\theta T(x) h(x)}$$

și e mulțimea tuturor testelor ce satisfac (85) și (87) cu $-\infty \leq C_1 \leq C_2 < \infty$ și $0 \leq \gamma_1, \gamma_2 \leq 1$, pentru verificarea ipotezei $H_0: \theta = \theta_0$.

Să se arate că

a) e este completă în sensul că dat orice test ϕ_0 cu pragul α pentru H_0 există $\phi \in \mathcal{E}$ astfel încît ϕ este uniform cel puțin la fel de puternic ca ϕ_0 .

b) dacă $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{E}$ atunci nici unul dintre aceste teste nu este uniform mai puternic decît celălalt.

Lehmann (1947)

11. Fie X și Y două variabile aleatoare independente $X \sim P_\theta(\lambda)$ și $Y \sim P_\theta(\mu)$.

Să se arate că

$$a) P(X = x, Y = y) = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{x! y!} \exp \left[y \ln \frac{\mu}{\lambda} + (x + y) \ln \lambda \right]$$

b) folosind teorema 21 există teste U.C.M.P. nedeplasate pentru ipotezele H_i, H_{ii}, H_{iii} și H_{iv} privind parametrul $\theta = \ln(\mu/\lambda)$ sau echivalent privind raportul $\rho = \mu/\lambda$. [Acestea includ în particular ipotezele $\mu \leq \lambda$ (sau $\mu = \lambda$) față de alternativele $\mu > \lambda$ și $\mu = \lambda$ față de $\mu \neq \lambda$]

Comparînd repartiția vectorului (X, Y) cu (90) găsim $U = Y$ și $T = X + Y$.

$$c) P\{Y = y | X + Y = t\} = C_t^y \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^y \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^{t-y}, y = 0, 1, \dots, t$$

sau cu alte cuvinte $Y | X + Y \sim \text{Bi} \left(t, p = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)$.

Prin urmare ipotezele inițiale se reduc la ipoteze privind parametrul p . De exemplu ipoteza $H_0: \mu \leq a\lambda$ se reduce la $H_0: p \leq a/(a+1)$ care este respinsă cînd Y este mare.

12. Fie X și Y două variabile aleatoare independente, $X \sim \text{Bi}(m, p_1)$ și $Y \sim \text{Bi}(n, p_2)$.

Să se arate că

$$a) P(X = x, Y = y) = C_m^x p_1^x q_1^{m-x} C_n^y p_2^y q_2^{n-y} =$$

$$= C_m^x C_n^y q_1^m q_2^n \exp \left[y \left(\ln \frac{p_2}{q_2} - \ln \frac{p_1}{q_1} \right) + (x + y) \ln \frac{p_1}{q_1} \right].$$

b) folosind teorema 21 există teste U.C.M.P. nedeplasate privind parametrul $\theta = \ln \left(\frac{p_2}{q_2} / \frac{p_1}{q_1} \right)$ sau echivalent privind raportul $\rho = \frac{p_2}{q_2} / \frac{p_1}{q_1}$. [Acestea includ în particular verificarea ipotezelor $H'_1: p_2 \leq p_1$ față de $p_2 > p_1$ și $H'_{iv}: p_2 = p_1$ față de $p_2 \neq p_1$].

Comparînd repartiția vectorului (X, Y) cu (90) găsim $U = Y$ și $T = X + Y$ și testul este obținut în termeni de repartiția variabilei Y condiționate de faptul că $X + Y = t$.

$$c) P\{Y = y | X + Y = t\} = C_t^y(\rho) C_m^{t-y} C_n^y \rho^y, y = 0, 1, \dots, t$$

$$\text{unde } C_t(\rho) = 1 / \sum_{y'=0}^t C_m^{t-y'} C_n^{y'} \rho^{y'}$$

d) în cazul particular al ipotezelor H'_i și H'_{iv} , valoarea θ_0 în (93), (98) și (99) este zero și că valoarea corespunzătoare a lui ρ este $\rho_0 = 1$.

Capitolul XIV

TESTUL RAPORTULUI DE VEROSIMILITĂȚI

§ 1. Introducere

Testul raportului de verosimilități, formulat de Neyman și Pearson (1928, 1933), servește pentru verificarea ipotezelor compuse.

Pentru selecții având volumul mare, în aceleași condiții în care ecuația de verosimilitate maximă are o soluție asimptotic normală, testul raportului de verosimilități are proprietăți optime. Rezultatele pe care le vom prezenta se datoresc lui Wilks (1938) și Wald (1941 a, 1941 b).

§ 2. Definiția testului

Fie $(X_1, \dots, X_n)$ o selecție asupra unei variabile aleatoare X cu densitatea de repartiție $f(x, \theta)$ unde θ este un vector, r dimensional. Pentru simplificare vom considera că X este unidimensională rezultatele extinzându-se cu mici modificări de notație în cazul în care X este un vector aleator k -dimensional.

Dacă θ_0 este valoarea adevărată a parametrului θ care intră în $f(x, \theta)$ considerăm problema $(\Omega_0, \Omega - \Omega_0)$ unde atât Ω_0 cât și $\Omega - \Omega_0$ sînt ipoteze compuse (în acest capitol vom mai folosi pentru problema $(\Omega_0, \Omega - \Omega_0)$ și notația $H(\Omega_0, \Omega)$). Fie:

$$(P)_{\Omega_0} = \sup_{\theta \in \Omega_0} P(x_1, \dots, x_n, \theta),$$

$$(P)_{\Omega} = \sup_{\theta \in \Omega} P(x_1, \dots, x_n, \theta).$$

În aplicații $(P)_{\Omega_0} [(P)_{\Omega}]$ este maximul funcției P obținut prin diferite procedee pentru $\theta \in \Omega_0$ [$\theta \in \Omega$].

DEFINIȚIA 1. Raportul de verosimilități pentru problema $(\Omega_0, \Omega - \Omega_0)$ este

$$(1) \quad l = \frac{(P)_{\Omega_0}}{(P)_{\Omega}}$$

sau în cuvinte raportul a două funcții de verosimilitate $(P)_{\Omega_0}$ și $(P)_{\Omega}$ cînd parametrii lor au fost înlocuiți prin estimatorii lor de verosimilitate maximă.



Observație. Deoarece estimatorii de maximă verosimilitate sînt funcții de $X_1, \dots, X_n$, raportul l este funcție de $X_1, \dots, X_n$ și prin urmare este o statistică. $(\bar{P})_\Omega$ este maximul funcției de verosimilitate în raport cu toți parametrii, iar $(P)_{\Omega_0}$ — maximul funcției de verosimilitate în raport cu anumiți parametri sau toți parametrii supuși condiției H . Prin urmare, numărătorul nu poate depăși ca valoare numitorul, deci l poate să ia valori numai între 0 și 1.

O valoare a lui l apropiată de 1(0) corespunde intuitiv la întărirea convingerii în valabilitatea (arată nejustețea) ipotezei H .

Prin urmare, dacă valorile mari ale lui l sînt considerate ca corespunzînd la creșterea gradului de încredere în valabilitatea ipotezei, atunci l poate servi ca o statistică pentru verificarea ipotezei H , valorile mici ale lui l conducînd la respingerea ipotezei H .

DEFINIȚIA 2. Dacă $g(l)$ este densitatea variabilei l , atunci regiunea critică de volum α pentru problema $(\Omega_0, \Omega - \Omega_0)$ cu ajutorul statisticii l este intervalul $0 \leq l \leq l_\alpha$, unde

$$(2) \quad \int_0^{l_\alpha} g(l) dl = \alpha.$$

Prin urmare vom respinge ipoteza H , dacă și numai dacă valoarea l satisface inegalitatea $l \leq l_\alpha$ unde l_α este dat de (2).

Se observă că există o mare asemănare între metodele folosite la obținerea C.M.P. test și a testului raportului de verosimilități întrucît ambele metode folosesc raportul a două funcții de verosimilitate ca bază a luării deciziei.

Exemplul 1. Fie $X_1, X_2, \dots, X_N$ o selecție asupra vectorului aleator $\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Ne propunem să verificăm ipoteza $H_0: \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$. Avem

$$(3) \quad P(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{2\pi^{Np/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{N/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}_j - \boldsymbol{\mu}) \right].$$

Va trebui să determinăm maximul funcției de verosimilitate P în raport cu $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}^{-1})$ și cu $(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}^{-1})$. Pentru ca funcția de verosimilitate să-și atingă valoarea maximă este necesar ca

$$(4) \quad \frac{\partial \ln P}{\partial \boldsymbol{\mu}} = 0, \quad \frac{\partial \ln P}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} = 0$$

unde matricele nule sînt de ordinul $p \times 1$ și respectiv $p \times p$.

Vectorul coloană al derivatelor în raport cu $\boldsymbol{\mu}$ este

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \boldsymbol{\mu})$$

și acesta este egal cu zero dacă luăm ca estimator al vectorului $\boldsymbol{\mu}$

$$(5) \quad \hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{x}_j = \bar{\mathbf{x}}.$$

Pentru a obține estimatorul matricei de covarianțe procedăm după cum urmează. Avem

$$\frac{\partial \ln P(\mu, \Sigma)}{\partial \sigma_{ii}} = -\frac{1}{2} N \sigma^{ii} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mu)' \Sigma^{-1} \mathbf{J}_{ii} \Sigma^{-1} (\mathbf{x}_j - \mu) \quad i = 1, 2, \dots, p$$

și

$$\frac{\partial \ln P(\mu, \Sigma)}{\partial \sigma_{ik}} = -N \sigma^{ik} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{J}_{ik} + \mathbf{J}_{ki}) \Sigma^{-1} (\mathbf{x}_j - \mu), \quad i < k$$

unde σ^{ik} este elementul ik al matricei Σ^{-1} și $\mathbf{J}_{ik}$ este matricea de ordinul $p \times p$ cu elementul unitate pe poziția ik și zero în rest. Egalind aceste derivate cu zero, ecuațiile rezultate se pot pune sub o singură formă

$$(6) \quad -N \sigma^{ik} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{J}_{ik} + \mathbf{J}_{ki}) \Sigma^{-1} (\mathbf{x}_j - \mu) = 0.$$

Aceste $p(p+1)/2$ ecuații, matricial se pot pune sub forma

$$(7) \quad -N \Sigma^{-1} + \Sigma^{-1} \mathbf{B} \Sigma^{-1} = 0,$$

unde

$$\mathbf{B} = \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mu) (\mathbf{x}_j - \mu)'$$

Dacă înlocuim vectorul medie μ prin estimatorul său, $\bar{\mathbf{x}}$ în ecuația ce determină pe $\mathbf{B}$, rezultă

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}) (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})' = \sum_{j=1}^N \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j' - N \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{x}}' = (N-1) \mathbf{S}.$$

Din ecuația

$$-N \Sigma^{-1} + \Sigma^{-1} \mathbf{A} \Sigma^{-1} = 0$$

obținem

$$(8) \quad \hat{\Sigma}_{\Omega} = \frac{1}{N} \mathbf{A} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}) (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})'$$

Deci

$$(P)_{\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^{Np/2} |\hat{\Sigma}_{\Omega}|^{N/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})' \hat{\Sigma}_{\Omega}^{-1} (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}) \right]$$

și cum

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})' \hat{\Sigma}_\Omega^{-1} (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}) &= \text{Ur} \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}) (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})' \hat{\Sigma}_\Omega^{-1} = \\ &= N \text{Ur} \hat{\Sigma}_\Omega \hat{\Sigma}_\Omega^{-1} = Np \end{aligned}$$

urmează că

$$(9) \quad (P)_\Omega = \frac{1}{(2\pi)^{Np/2} |\hat{\Sigma}_\Omega|^{N/2}} \exp \left(-\frac{1}{2} Np \right).$$

Deoarece Ω_0 este submulțimea spațiului parametrilor pentru care $\mu = \mu_0$, atunci

$$(10) \quad (P)_{\Omega_0} = \frac{1}{(2\pi)^{Np/2} |\hat{\Sigma}_{\Omega_0}|^{N/2}} \exp \left(-\frac{1}{2} Np \right)$$

unde

$$(11) \quad \hat{\Sigma}_{\Omega_0} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mu_0) (\mathbf{x}_j - \mu_0)'.$$

Ținând seama de (9) și (10), raportul de verosimilități este egal cu

$$(12) \quad l = \frac{(P)_{\Omega_0}}{(P)_\Omega} = \frac{|\hat{\Sigma}|^{N/2}}{|\hat{\Sigma}_\Omega|^{N/2}} = \frac{|\mathbf{A}|^{N/2}}{|\mathbf{A} + N(\bar{\mathbf{x}} - \mu_0)(\bar{\mathbf{x}} - \mu_0)'|^{N/2}}.$$

Aplicînd de două ori descompunerea

$$\begin{vmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{E} & \mathbf{F} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{E} & \mathbf{F} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 - \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D} & \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E} & \mathbf{F} - \mathbf{E} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D} \end{vmatrix} = |\mathbf{C}| |\mathbf{F} - \mathbf{E} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D}|$$

obținem

$$\begin{aligned} (12') \quad l^{2/N} &= \frac{|\mathbf{A}|}{|\mathbf{A} + [\sqrt{N}(\bar{\mathbf{x}} - \mu_0)] [\sqrt{N}(\bar{\mathbf{x}} - \mu_0)]'|} = \\ &= \frac{|\mathbf{A}|}{\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{N}(\bar{\mathbf{x}} - \mu_0)' \\ -\sqrt{N}(\bar{\mathbf{x}} - \mu_0) & \mathbf{A} \end{vmatrix}} = \frac{1}{1 + \frac{T^2}{N-1}} \end{aligned}$$

unde

$$(13) \quad T^2 = N(\bar{x} - \mu_0)' S^{-1} (\bar{x} - \mu_0) = (N - 1) N (\bar{x} - \mu_0)' A^{-1} (\bar{x} - \mu_0).$$

Deci testul raportului de verosimilități determină regiunea critică

$$l < l_\alpha$$

unde l_α se alege astfel încît

$$P(l < l_\alpha) = \alpha.$$

Prin urmare, dacă $x_1, \dots, x_N$ este o selecție asupra vectorului aleator $X \sim N(\mu, \Sigma)$ testul raportului de verosimilități pentru verificarea ipotezei $H_0: \mu = \mu_0$ este caracterizat de regiunea critică

$$(14) \quad T^2 \geq T_\alpha^2$$

unde

$$T^2 = N(\bar{x} - \mu_0)' S^{-1} (\bar{x} - \mu_0) \text{ și } T_\alpha^2 = (N - 1) (l^{-2/N} - 1).$$

Raportului

$$l^{2/N} = \frac{\sum_{j=1}^N (\bar{x}_j - \bar{x}) (\bar{x}_j - \bar{x})'}{\left| \sum_{j=1}^N (x_j - \mu_0) (x_j - \mu_0)' \right|}$$

i se poate da următoarea interpretare geometrică.

În spațiul p -dimensional, numărătorul (numitorul) acestui raport poate fi considerat ca fiind suma pătratelor volumelor tuturor paralelipipedelor, ale căror muchii sînt vectori p -dimensionali, cu originea în $x(\mu_0)$ și extremitatea în x_j .

Dacă numărătorul este mult mai mic decît numitorul atunci respingem ipoteza conform căreia μ_0 este valoarea medie a vectorului studiat.

§ 3. Repartiția asimptotică a raportului de verosimilități pentru selecții mari

Adeseori l are o formă complicată, avînd o repartiție ce se obține mai greu. În astfel de cazuri ne vom folosi de aproximații ale repartiției. Deoarece $0 \leq l \leq 1$, pentru orice constantă $c > 0$, fixată, $-2c \ln l$ va fi repartizat în intervalul $(0, \infty)$. Deci vom căuta o aproximație a acestei repartiții prin χ^2 care este de asemenea repartizată în $(0, \infty)$, alegîndu-l pe c astfel încît aproximația să fie cît mai precis. Dacă valorile lui n

sînt foarte mari, repartiția lui $-2 \ln l$ tinde către repartiția χ^2 . Prin urmare, valorile critice ale lui l pot fi obținute din valorile critice ale lui χ^2 .

TEOREMA 1. Dacă $\hat{\theta}$ este asimptotic repartizată normal (teorema IX.7) atunci

$$(15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta_0}(-2 \ln l < u) = P[\chi^2(1) < u].$$

Demonstrație. Deoarece $\hat{\theta}$ converge aproape sigur către θ_0 cînd $n \rightarrow \infty$, (teorema IX.5) urmează că pentru orice $\varepsilon > 0$ arbitrar există n_ε , astfel încît pentru $n > n_\varepsilon$,

$$(16) \quad P\left(\sum_1^n \ln f(x_i, \theta_0) = \sum_1^n \ln f(x_i, \hat{\theta}) + \frac{1}{2} \sum_1^n \left[\frac{\partial^2 \ln f(x_i, \theta)}{\partial \theta^2} \right]_{\theta^*} (\theta_0 - \hat{\theta})^2 \geq 1 - \varepsilon,\right.$$

unde θ^* este o variabilă aleatoare astfel încît

$$|\theta_0 - \theta^*| < |\theta_0 - \hat{\theta}|.$$

Relația (16) se mai poate scrie

$$(17) \quad P\left\{-2 \sum_1^n \ln \frac{f(x_i, \theta_0)}{f(x_i, \hat{\theta})} = -\frac{1}{n} \sum_1^n \left(\frac{\partial^2 \ln f(x_i, \theta)}{\partial \theta^2} \right)_{\theta=\theta^*} [\sqrt{n}(\theta_0 - \hat{\theta})]^2 \geq 1 - \varepsilon,\right.$$

ceea ce arată că membrul drept și membrul stîng al egalității din acolada inegalității (17) converg împreună în repartiție către o variabilă χ^2 . De asemenea

$$-\frac{1}{n} \sum_1^n \left[\frac{\partial^2 \ln f(x_i, \theta)}{\partial \theta^2} \right]_{\theta=\theta^*} \xrightarrow{P} -I(\theta_0) = M \left[\left(\frac{\partial \ln P(x, \theta)}{\partial \theta} \right)_{\theta_0}^2 \right]$$

și

$$\sqrt{-nI(\theta_0)}(\theta_0 - \hat{\theta}) \rightarrow N(0, 1).$$

Astfel $-2 \sum_1^n \ln \frac{f(x_i, \theta_0)}{f(x_i, \hat{\theta})} = -2 \ln l$ converge în probabilitate către o variabilă avînd o repartiție $\chi^2(1)$, ceea ce demonstrează teorema.



TEOREMA 2. Dacă θ este un parametru r -dimensional, dacă $f(x, \theta)$ posedă derivatele de ordinul 1 și 2 regulate și dacă vom considera ipoteza simplă $H(\theta_0, \Omega_r)$ unde $\theta_0 = (\theta_{10}, \dots, \theta_{r0})$ și Ω_r este orice mulțime în spațiul euclidian R^r , care conține un interval deschis Ω_{r0} care la rândul său conține pe θ_0 atunci

$$(18) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (P - 2 \ln l_r < u) = P[\chi^2(r) < u].$$

Să presupunem că ω_k este o mulțime cilindrică ce constă în puncte de forma $(\theta_1, \dots, \theta_k, \theta_{k+10}, \dots, \theta_{r0})$, $\theta_{k+10}, \dots, \theta_{r0}$ avînd valori fixate. Considerăm ipoteza compusă

$$H(\omega_k; \Omega_r) = H_{r-k}.$$

În selecții mari prezintă importanță numai acea parte a lui Ω_r , care conține un interval $r - k$ -dimensional Ω_{r0} deschis, conținînd punctul parametric adevărat $(\theta_{10}, \dots, \theta_{r0})$. Astfel pentru selecții mari, ipoteza compusă este $H(\omega_{k0}; \Omega_{r0})$, unde $\omega_{k0} = \omega_k \cap \Omega_{r0}$.

TEOREMA 3. (Wilks (1938)). Dacă $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ este o selecție asupra unei variabile cu densitatea $f(x, \theta)$ unde θ este r -dimensional și dacă $f(x, \theta)$ admite derivate de ordinul 1 și 2 regulate, atunci

$$(19) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(-2 \ln l_{r-k} < u | \theta \in \omega_{k0}) = P[\chi^2(r - k) < u].$$

Demonstrație. Fie $\hat{\theta}'_1, \dots, \hat{\theta}'_k$ soluțiile ecuațiilor

$$\frac{\partial \ln P(x, \theta)}{\partial \theta_i} = 0, \quad 1 \leq i \leq k$$

în raport cu $\theta_1, \dots, \theta_k$ adică $\hat{\theta}'_1, \dots, \hat{\theta}'_k$ sînt estimatorii de maximă verosimilitate pentru $\theta_1, \dots, \theta_k$ celelalte componente $\theta_{k+10}, \dots, \theta_{r0}$ rămî-nînd fixe.

Din teorema IX.10 urmează că vectorul aleator $(\hat{\theta}'_1, \dots, \hat{\theta}'_k)$ este asimptotic repartizat

$N(\theta_{10}, \dots, \theta_{k0}, \Sigma)$, unde $(\Sigma_{i_1, i_2}^{-1})_{1 \leq i_1, i_2 \leq k}$ este dată de (IX.39).

Pentru $\varepsilon > 0$, există n_ε astfel că probabilitatea ca următoarele egalități

$$\begin{aligned} \zeta_i &= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial \ln P(x, \theta)}{\partial \theta_i} = \sum_{j=1}^r \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial^2 \ln P(x, \theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \bigg|_{\theta_0} (\theta_{j0} - \hat{\theta}_j) = \\ &= \sum_{j=1}^r A_{ij}(\theta^*) \eta_j, \quad i = 1, \dots, r \end{aligned}$$

$$\zeta_{i_1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial \ln P(x, \theta)}{\partial \theta_{i_1}} = \sum_{j_1=1}^k \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial^2 \ln P(x, \theta)}{\partial \theta_{i_1} \partial \theta_{j_1}} \Big|_{\theta^*} (\theta_{j_{10}} - \hat{\theta}_{j_1}) =$$

$$= \sum_{j_1=1}^k A'_{i_1 j_1}(\theta^*) \eta'_{j_1}, \quad i_1 = 1, \dots, k$$

$$(20) \quad \sum_1^n \ln f(x_i, \theta_0) = \sum_1^n \ln f(x_i, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_r) + \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^r A_{ij}(\theta_1^*) \eta_i \eta_j,$$

$$(21) \quad \sum_1^n \ln f(x_i, \theta_0) = \sum_1^n \ln f(x_i, \hat{\theta}'_1, \dots, \hat{\theta}'_k, \theta_{k+10}, \dots, \theta_{r0}) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^k A_{i_1 j_1}(\theta^{*'}_1) \eta'_{i_1} \eta'_{j_1}$$

să aibă loc, este cel puțin $1 - \varepsilon$, pentru toți $n > n_\varepsilon$, θ^* și θ_1^* sînt puncte din Ω_{r0} situate între θ_0 și $\hat{\theta}$, în timp ce $\theta^{*'}$ și $\theta_1^{*'}$ sînt puncte din ω_{k0} între θ_0 și $(\hat{\theta}'_1, \dots, \hat{\theta}'_k, \theta_{k+10}, \dots, \theta_{r0})$. η_j și η'_{j_1} pot fi puse sub forma

$$(22) \quad \eta_j = \sum_{i=1}^r A^{ij}(\theta^*) \zeta_i,$$

$$\eta'_{j_1} = \sum_{i_1=1}^k A'^{i_1 j_1}(\theta^{*'}) \zeta_{i_1},$$

unde

$$(A^{ij}(\theta^*)) = (A_{ij}(\theta^*))^{-1} \text{ și } (A'^{i_1 j_1}(\theta^{*'})) = (A'_{i_1 j_1}(\theta^{*'}))^{-1}.$$

Deoarece

$$(23) \quad -2 \ln l_{r-k} = -2 \left[\sum_1^n \ln f(x_i, \hat{\theta}'_1, \dots, \hat{\theta}'_k, \theta_{k+10}, \dots, \theta_{r0}) - \right.$$

$$\left. - \sum_1^n \ln f(x_i, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_r) \right],$$

și cum relațiile (20) și (21) au în partea stîngă aceeași cantitate, urmează, că pentru toți $n > n_\varepsilon$, probabilitatea ca

$$(23') \quad -2 \ln l_{r-k} = \sum_{i_1, j_1=1}^k A_{i_1 j_1}(\theta_1^{*'}) \eta'_{i_1} \eta'_{j_1} - \sum_{i, j=1}^r A_{ij}(\theta_1^*) \eta_i \eta_j,$$

este cel puțin $1 - \varepsilon$.

Dacă $\theta_0 \in \omega_{k0}$ este valoarea adevărată a lui θ , atunci $(\zeta_1, \dots, \zeta_r)$ $n = 1, 2, \dots$ este un șir de variabile aleatoare care converge în repartiție către vectorul $N(\mathbf{0}, (\Sigma_{ij}^{-1}))$

$$(A_{ij}(\theta^*)), (A_{ij}(\theta_1)) \xrightarrow{P} (-\Sigma_{ij}^{-1})/n$$

$$(A_{i,j_1}(\theta^*)), (A_{i,j_1}(\theta_1)) \xrightarrow{P} (-\Sigma_{i,j_1}^{-1})/n.$$

Ambii membri ai egalității (23') converg în repartiție către repartiția variabilei aleatoare

$$Q = \sum_{i,j=1}^r \Sigma_{ij} y_i y_j - \sum_{i,j_1=1}^k \Sigma_{i,j_1} y_i y_{j_1},$$

unde $(y_1, \dots, y_r) \sim N(\mathbf{0}, (\Sigma_{ij}^{-1}/n))$.

Dacă $\theta_0 \in \omega_{k0}$, $Q \sim \chi^2(r-k)$ și cum variabila aleatoare $-2 \ln l_{r-k}$ converge în repartiție către aceeași repartiție ca Q , teorema este demonstrată.

Exemplul 2. Fie k selecții de volume $n_i (1 \leq i \leq k, n_i > 2)$ asupra variabilelor independente $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ și ipoteza

$$H_0: \sigma_1^2 = \dots = \sigma_k^2.$$

Fie x_{ij} valoarea variabilei X_i în observația de ordinul j și $\sum_{j=1}^{n_i} n_i = n$.

Deoarece

$$f(x_{i1}, \dots, x_{in_i}, \mu_i, \sigma_i^2) = \frac{1}{\sigma_i^{n_i} (2\pi)^{\frac{n_i}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\frac{x_{ij} - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 \right].$$

funcția de verosimilitate se scrie

$$(24) \quad P(x, \mu, \sigma) = \prod_{i=1}^k f(x_{i1}, \dots, x_{in_i}, \mu_i, \sigma_i) = \\ = \frac{\exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \left(\frac{x_{ij} - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 \right]}{(2\pi)^{n/2} \prod_{i=1}^k \sigma_i^{n_i}}.$$

Dacă ipoteza H_0 este adevărată, atunci

$$(25) \quad P(x, \mu, \sigma^2) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \left(\frac{x_{ij} - \mu_i}{\sigma} \right)^2 \right],$$

unde am notat prin σ^2 valoarea comună a dispersiilor σ_i^2 .

Pentru a calcula pe l este necesar să maximizăm relațiile (24) și (25) în raport cu parametrii lor.

$$\frac{\partial \ln P}{\partial \mu_i} = \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \mu_i) = 0 \Rightarrow \hat{\mu}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} = \bar{x}_i,$$

$$\frac{\partial \ln P}{\partial \sigma_i} = -\frac{n_i}{\sigma_i} + \frac{1}{\sigma_i^3} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \mu_i)^2 = 0 \Rightarrow \hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \mu_i)^2 = s_i^2,$$

de unde

$$(P)_\Omega = \frac{\exp \left[-\frac{1}{2} \sum_1^k n_i \right]}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \prod_1^k s_i^{n_i}} = \frac{e^{-\frac{n}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \prod_1^k s_i^{n_i}}.$$

Dacă ipoteza H_0 este adevărată, atunci

$$\frac{\partial \ln P}{\partial \mu_i} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \mu_i) = 0 \Rightarrow \hat{\mu}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} = \bar{x}_i$$

$$\frac{\partial \ln P}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \mu_i)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \mu_i)^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n_i} n_i s_i^2$$

de unde

$$(P)_{\Omega_0} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \frac{n_i s_i^2}{n} \right)^{-\frac{n}{2}} \exp \left(-\frac{n}{2} \right).$$

Ținând seama de cele de mai sus, obținem

$$(26) \quad l = \frac{(P)_{\Omega_0}}{(P)_\Omega} = \frac{\prod_1^k s_i^{n_i}}{\left(\sum_1^k \frac{n_i s_i^2}{n} \right)^{-\frac{n}{2}}}$$

sau

$$-2 \ln l = n \ln s^2 - \sum_1^k n_i \ln s_i^2$$

unde

$$s^2 = \sum_1^k \frac{n_i s_i^2}{n}.$$

Dacă ipoteza H_0 este adevărată, fiecare dintre statisticile $\frac{n_i s_i^2}{2\sigma^2}$ are o repartiție Gama de parametrul $\frac{1}{2}(n_i - k)$, iar suma lor $\frac{ns^2}{2\sigma^2}$ are aceeași repartiție de parametru $\frac{1}{2}(n - k)$.

Dacă se consideră statistica (26) în care n_i este înlocuit prin gradele de libertate $v_i = n_i - 1$, atunci

$$l^* = \prod_1^k \left(\frac{s_i^2}{s^2} \right)^{v_i/2}; \quad s_i^2 = \frac{1}{v_i} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2; \quad s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k v_i s_i^2$$

n fiind înlocuit prin $v = \sum_1^k (n_i - 1) = n - k$ și

$$(27) \quad {}^* \chi^2 = \frac{-2 \ln l^*}{1 + \frac{1}{3(k-1)} \left(\sum_1^k \frac{1}{v_i} - \frac{1}{v} \right)} \sim \chi^2(k-1).$$

Aceasta este o modificare a testului propusă de J. Neyman și E. S. Pearson și dată de M. S. Bartlett.

Exemplul 3. Fie $X_1, X_2, \dots, X_N$ o selecție asupra unui vector X p -dimensional $N(\mu, \Sigma)$. Ne propunem să verificăm ipoteza

$$H_0: \mathcal{C} = I, \quad (28)$$

sau, echivalent, că matricea Σ este diagonală. Ipoteza alternativă este

$$H_1: \mathcal{C} \neq I,$$

adică cel puțin o covarianță sau un coeficient de corelație este diferit de zero. Am folosit notația

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1p} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{p1} & \rho_{p2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Spațiul parametrilor Ω este porțiunea din spațiul euclidian $p(p+3)/2$ dimensional în care componentele lui μ sînt finite, Σ este o matrice pozitiv definită, iar Ω_0 este subspațiul lui Ω cu $2p$ dimensiuni în care

$$-\infty < \mu_i < \infty, \quad 0 < \sigma_i^2 < \infty \text{ și } \text{cov}(x_i, x_j) = 0 \text{ pentru } i \neq j.$$

Ca și în exemplul 1

$$(P)_{\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^{Np/2} |\Sigma|^{N/2}} \exp(-Np/2)$$

iar

$$(P)_{\Omega_0} = \frac{1}{(2\pi)^{Np/2} \left(\prod_1^p \hat{\sigma}_i^2 \right)^{N/2}} \exp(-Np/2).$$

Avem

$$(28) \quad l = \frac{(P)_{\Omega_0}}{(P)_{\Omega}} = \frac{|\hat{\Sigma}|^{N/2}}{\left(\prod_1^p \hat{\sigma}_i^2 \right)^{N/2}} = |R|^{N/2}.$$

Deoarece diferența dimensiunilor lui Ω și Ω_0 este $p(p-1)/2$, urmează că $-2 \ln l$ va fi repartizat χ^2 , și deci, putem accepta sau respinge ipoteza de independență la pragul de semnificație ales. Bartlett folosește ca aproximație a repartiției statistice

$$(29) \quad \chi^2 = - \left(N - 1 - \frac{2p+5}{6} \right) \ln |R|.$$

Numărul gradelor de libertate rămân neschimbate; acceptăm ipoteza H_0 la pragul de semnificație α , dacă

$$(30) \quad \chi^2 < \chi_{\alpha}^2(p(p-1)/2),$$

în celelalte cazuri o respingem.

§ 4. Consistența testului raportului de verosimilități

TEOREMA 4. Dacă $f(x, \theta)$ admite derivate de ordinul 1 și 2 în raport cu θ regulate și dacă W_{α} este mulțimea din R^n pentru care

$$(31) \quad -2 \ln l > \chi_{1-\alpha}^2(1)$$

atunci testul raportului de verosimilități definit de (31) este consistent pentru $H(\theta_0, \Omega_0)$.

Demonstrație. Avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(W_{\alpha} | \theta_0) = \alpha$$

Fie $\theta_1 \neq \theta_0$ un punct din Ω_0 . Putem scrie

$$l = l' \tau$$

unde

$$l' = \prod_1^n \frac{f(x_i, \theta_1)}{f(x_i, \hat{\theta})}, \quad \tau = \prod_1^n \frac{f(x_i, \theta_0)}{f(x_i, \theta_1)}$$

Dacă

$$-2 \ln l' = u_n, \quad -2 \ln \tau = n v_n$$

atunci W_α este mulțimea din R^n pentru care

$$u_n + n v_n > \chi_{1-\alpha}^2(1) \quad (1)$$

Dacă valoarea adevărată a lui θ este θ_1 , atunci din (15), cu θ_0 înlocuit prin θ_1 , urmează că $u_n, n = 1, 2, \dots$ este un șir de variabile aleatoare care converge în repartiție către o variabilă $\chi^2(1)$.

Putem scrie

$$v_n = 2 \left[\frac{1}{n} \sum_1^n \ln f(x_i, \theta_1) - \frac{1}{n} \sum_1^n \ln f(x_i, \theta_0) \right].$$

Dacă θ_1 este valoarea adevărată a parametrului θ , atunci

$$\frac{1}{n} \sum_1^n \ln f(x_i, \theta_1) \xrightarrow{P} \int_R (\ln f(x, \theta_1)) f(x, \theta_1) dx,$$

$$\frac{1}{n} \sum_1^n \ln f(x_i, \theta_0) \xrightarrow{P} \int_R (\ln f(x, \theta_0)) f(x, \theta_1) dx,$$

și

$$\int_R (\ln f(x, \theta_1)) f(x, \theta_1) dx > \int_R (\ln f(x, \theta_1)) f(x, \theta_0) dx.$$

Prin urmare șirul de variabile aleatoare $(v_n)_{1 \leq n < \infty}$ converge în probabilitate către numărul pozitiv

$$v_0 = 2 \left[\int_R (\ln f(x, \theta_1)) f(x, \theta_1) dx - \int_R (\ln f(x, \theta_1)) f(x, \theta_0) dx \right].$$

Deci $(u_n)_{1 \leq n < \infty}$ converge în repartiție către o variabilă $\chi^2(1)$, adică

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(u_n + n v_n > \chi_{1-\alpha}^2(1)) = 1,$$

care este echivalentă cu (XIII. 123) ceea ce demonstrează consistența testului raportului de verosimilități.

Prin urmare

$$(32) \quad p(W_\alpha | \theta) \rightarrow \gamma(\theta) = \begin{cases} \alpha, & \theta = \theta_0, \\ 1, & \theta \neq \theta_0. \end{cases}$$

Observație. Dacă (11) este adevărată, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(-2 \ln l_{r-k} > \chi^2_{1-\alpha}(1) | \theta \in \Omega_{r_0} - \Omega_{k_0}) = 1$$

ceea ce arată că testul raportului de verosimilități pentru H_{r-k} este consistent.

§ 5. Puterea asimptotică a testului raportului de verosimilități

Fie $(X_1, \dots, X_n)$ o selecție asupra unei variabile aleatoare având funcția de repartiție $F(x, \theta)$.

DEFINIȚIA 3. Vom spune că $g(x_1, \dots, x_n; \theta)$ este o funcție de estimare regulată pentru θ dacă sînt îndeplinite condițiile:

$$\int_{R^n} [\sqrt{n}g(x_1, \dots, x_n; \theta)]^j \prod_1^n f(x_i, \theta) dx_i = \begin{cases} 0, & j = 1, \\ 1, & j = 2. \end{cases}$$

2. Dacă θ_0 este valoarea adevărată a parametrului θ , atunci

$$\sqrt{n}g(x_1, \dots, x_n; \theta_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} U \sim N(0, 1).$$

3. Derivata în raport cu θ a funcției $g(x_1, \dots, x_n; \theta)$ există și este continuă pentru $\theta \in \Omega_0$ în toate punctele din spațiul de selecție R^n exceptînd o mulțime de măsură nulă.

4. Dacă θ_0 este valoarea adevărată a parametrului θ , atunci $g'_n(x_1, \dots, x_n; \theta)$ converge în probabilitate către $J(\theta_0, \theta)$ uniform în raport cu θ în Ω_0 , $J(\theta_0, \theta)$ fiind mărginită în Ω_0 și $J(\theta_0, \theta) \neq 0$ unde

$$I(\theta', \theta) = \int_{R^n} g(x_1, \dots, x_n; \theta') \prod_1^n f(x_i, \theta) dx_i,$$

$$J(\theta', \theta) = I'_0(\theta', \theta) = \int_{R^n} g'(x_1, \dots, x_n; \theta') \prod_1^n f(x_i, \theta) dx_i,$$

$$I(\theta, \theta) = 0 \text{ pentru } \theta \text{ în } \Omega_0.$$

Șirul de variabile aleatoare

$$ng^2(x_1, \dots, x_n; \theta_0) \quad n = 1, 2,$$

converge în repartiție către o variabilă repartizată $\chi^2(1)$, fapt ce rezultă din condiția 2.

TEOREMA 5. Fie $(X_1, \dots, X_n)$ o selecție asupra unei variabile cu densitatea $f(x, \theta)$ ce admite derivate de ordinul 1 și 2 în raport cu θ regulată în Ω_0 . Fie W_α regiunea critică de volum α definită în (31), $g_n(x_1, \dots, x_n, \theta)$ o funcție de estimare regulată pentru θ și W_α^* definită de

$$(33) \quad ng^2(x_1, \dots, x_n; \theta_0) > \chi_{1-\alpha}^2.$$

În aceste condiții pentru verificarea ipotezei $H(\theta_0, \Omega_0)$, testul bazat pe regiunea critică W_α este mai puternic decât testul bazat pe regiunea critică W_α^* .
Demonstrație. Avem

$$(34) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta_0}(W_\alpha^*) = \alpha.$$

Dacă $\theta_1 \neq \theta_0$ este valoarea adevărată a parametrului θ , unde θ_1 este un punct din Ω_0 , șirul

$$u_n^* = [g'(x_1, \dots, x_n; \tilde{\theta}^*) / \sqrt{n}(\theta_1 - \tilde{\theta})]^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

converge în repartiție către o variabilă $\chi^2(1)$; $\tilde{\theta}(x_1, \dots, x_n)$, $n = n_0, n_0 + 1, \dots$ sînt soluțiile ecuațiilor

$$g(x_1, \dots, x_n; \theta) = 0, \quad n = n_0, n_0 + 1,$$

iar $\tilde{\theta}^*$ satisface inegalitatea $|\theta_0 - \tilde{\theta}^*| \leq |\theta_0 - \tilde{\theta}|$.

Fie

$$W_n^* = \{g'(x_1, \dots, x_n; \tilde{\theta}^*)[\sqrt{n}(\theta_1 - \tilde{\theta}) + \sqrt{n}(\theta_0 - \theta_1)]\}^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

și

$$v_n^2 = \frac{1}{n} [W_n^* - u_n^*].$$

Atunci

$$(v_n^*) \xrightarrow{P} J^{*2}(\theta_1, \theta_1)(\theta_0 - \theta_1)^2 = v_0^*, \quad \text{cînd } n \rightarrow \infty,$$

Deoarece $\theta_1 \neq \theta_0$ și $J^{*2}(\theta_1, \theta_1) > 0$ urmează că $v_0^* > 0$. Deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(u_n^* + nv_n^* > \chi_{1-\alpha}^2) = 1$$

ceea ce este echivalent cu

$$(35) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta_1}(W_\alpha^*) = 1.$$

Relațiile (34) și (35) arată că testul avînd regiunea critică definită de (32) este consistent pentru verificarea ipotezei $H(\omega_0, \Omega_0)$.

Problema comparării puterii testului raportului de verosimilitate bazat pe regiunea critică W_α dată de inegalitatea (32) și testul arbitrar bazat pe regiunea critică W_α^* dată de inegalitatea (32) este complicată datorită faptului că amândouă testele sînt consistente și deoarece au aceeași putere limită $\gamma(\theta)$ dată de (32) cînd $n \rightarrow \infty$.

Considerăm regiunile critice $W_{c\alpha}$ și $W_{c\alpha}^*$ definite de inegalitățile

$$u_n + cv_n > \chi_{1-\alpha}^2$$

și respectiv

$$u_n^* + cv_n^* > \chi_{1-\alpha}^2$$

unde $c > 0$ este arbitrar. Deoarece $u_n, u_n^* \geq 0$, pentru $n > c$

$$W_{c\alpha} \subset W_\alpha \text{ și } W_{c\alpha}^* \subset W_\alpha^*$$

Pentru orice $c > 0$, $W_{c\alpha}$ este asimptotic mai bună decît W_α^* pentru verificarea ipotezei H .

Avem

$$\begin{aligned} \int_R \ln f(x, \theta_0) f(x, \theta_1) dx &= \int_R \ln f(x, \theta_1) f(x, \theta_1) dx + \\ &+ \left(\int_R \ln f(x, \theta_1) f(x, \theta_1) dx \right)' (\theta_0 - \theta_1) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\int_R \ln f(x, \theta_1^*) f(x, \theta_1) dx \right)'' (\theta_0 - \theta_1)^2, \end{aligned}$$

unde $|\theta_0 - \theta_1^*| < |\theta_0 - \theta_1|$. Deoarece

$$\left(\int_R \ln f(x, \theta_1) f(x, \theta_1) dx \right)' = 0,$$

$$\begin{aligned} 2 \left\{ \int_R [\ln f(x, \theta_1) - \ln f(x, \theta_0)] f(x, \theta_1) dx \right\} &= \\ &= - \left(\int_R \ln f(x, \theta_1^*) f(x, \theta_1) dx \right)'' (\theta_0 - \theta_1)^2. \end{aligned}$$

Cum

$$- \left(\int_R (\ln f(x, \theta_1)) f(x, \theta_1) dx \right)'' = \int_R \left(\frac{\partial \ln f(x, \theta_1)}{\partial \theta_1} \right)^2 f(x, \theta_1) dx = R^2(\theta_1)$$

avem

$$(36) \quad \frac{J^{*2}(\theta_1, \theta_1)}{R^2(\theta_1)} \leq 1.$$

Deoarece

$$\left(\int_R (\ln f(x, \theta)) f(x, \theta_1) dx \right)''$$

este continuă în raport cu θ în Ω_0 pentru θ_0 și θ_1 apropiați (36) se păstrează dacă se înlocuiește $R^2(\theta_1)$ prin

$$\left(\int_R (\ln f(x, \theta_1^*)) f(x, \theta_1) dx \right)''$$

ceea ce conduce la

$$0 < v_0^* < v_0.$$

Considerăm funcțiile de putere corespunzătoare regiunilor $W_{c\alpha}$ și $W_{c\alpha}^*$ pentru o valoare fixată a lui c , adică

$$P_{\theta_1}(u_n + cv_n > \chi_{1-\alpha}^2) \text{ și } P_{\theta_1}(u_n^* + cv_n^* > \chi_{1-\alpha}^2)$$

fiind funcții de θ_1 . Fie

$$\gamma_c(\theta_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta_1}(u_n + cv_n > \chi_{1-\alpha}^2)$$

$$\gamma_c^*(\theta_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta_1}(u_n^* + cv_n^* > \chi_{1-\alpha}^2)$$

Deoarece u_n și u_n^* sînt nenegative și deoarece repartiția lui (u_n, v_n) , $[u_n^*, v_n^*]$ converge în repartiție către repartiția $\chi^2(1)$ în planul (u, v) cu $v = v_0(u > 0)$ [$v^* = v_0^*(u > 0)$], urmează că:

1. $\gamma_c(\theta_1) = \gamma_c^*(\theta_1)$ pentru valorile lui θ_1 astfel încît

$$v_0^* \geq \chi_{1-\alpha}^2/c$$

2. $\alpha < \gamma_c^*(\theta_1) < \gamma_c(\theta_1) < 1$ pentru valorile lui θ_1 astfel încît

$$0 < v_0^* < \chi_{1-\alpha}^2/c$$

3. $\gamma_c^*(\theta_0) = \gamma_c(\theta_0) = \alpha$ pentru $\theta_1 = \theta_0$, adică

pentru θ_1 astfel încît $v_0^* = 0$.

Deci $W_{c\alpha}$ este asimptotic mai bună decît $W_{c\alpha}^*$ pentru verificarea ipotezei H , oricare ar fi $c > 0$.

§ 6. Testul raportului de verosimilități și folosirea ipotezelor intermediare

Fie X_1 și X_2 două variabile aleatoare independente de medii μ_1 și μ_2 și dispersii σ_1^2 și σ_2^2 . Fie

$$\Omega = \{(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2); -\infty < \mu_i < \infty, \sigma_i^2 > 0, i = 1, 2\}$$

și

$$\omega = \{(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2); -\infty < \mu_1 = \mu_2 < \infty, \sigma_1^2 = \sigma_2^2 > 0\}.$$

Dorim să verificăm ipoteza $H_0: \theta \in \omega$ față de $H_1: \theta \in \Omega - \omega$

Să presupunem că ipoteza nulă H_0 este respinsă. Adeseori această decizie nu este în întregime mulțumitoare, deoarece nu știm de ce a fost respinsă, H_0 . Sînt dispersiile diferite, sînt mediile diferite, sau amîndouă? Prin urmare în practică mai întîi vom verifica egalitatea dispersiilor și atunci, dacă ipoteza este acceptată, verificăm egalitatea mediilor presupunînd că dispersiile sînt egale. Cu alte cuvinte dacă notăm Ω prin ω_0 și ω prin ω_2 și

$$\omega_1 = \{(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2); -\infty < \mu_i < \infty, i = 1, 2; 0 < \sigma_1^2 = \sigma_2^2\}$$

vom verifica mai întîi ipoteza

$$H'_0: \theta \in \omega_1 \text{ față de } H'_1: \theta \in \omega_0 - \omega_1$$

și atunci dacă H'_0 este acceptată, verificăm ipoteza

$$H''_0: \theta \in \omega_2 \text{ față de } H''_1: \theta \in \omega_1 - \omega_2.$$

Respingem ipoteza H_0 dacă este respinsă H'_0 sau H''_0 . În practică, aceste teste sînt bazate pe o statistică avînd repartiția F și respectiv o statistică avînd repartiția t . Dacă $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, atunci aceste statistici sînt independente astfel că dacă fiecare test este construit la pragul de semnificație $\alpha = 0,01$, pragul de semnificație total pentru verificarea ipotezei H_0 față de H_1 este egal cu

$$1 - (0,99)^2 = 0,02$$

Observații:

i) Dacă H'_0 este respinsă, nu vom verifica H''_0 față de H''_1 . Cu toate acestea, unii cercetători doresc să compare mediile (chiar cînd H_0 a fost respinsă). În acest scop, obișnuit se folosește o statistică dependentă de statistica F , statistică folosită pentru verificarea egalității dispersiilor. Deci analiza diferenței mediilor este considerată ca o cercetare preliminară pentru scopuri ulterioare.

ii) Putem scrie

$$\frac{(P)_{\omega_2}}{(P)_{\omega_0}} = \left[\frac{(P)_{\omega_1}}{(P)_{\omega_0}} \right] \left[\frac{(P)_{\omega_2}}{(P)_{\omega_1}} \right],$$

sau dacă l_i este raportul de verosimilități pentru verificarea ipotezei H_0^i față de H_1^i , $i = 1, 2$, atunci

$$l = l_1 l_2 \text{ și } -2 \ln l = \sum_{i=1}^2 (-2 \ln l_i).$$

Deoarece aici statisticile $-2 \ln l_1$ și $-2 \ln l_2$ sînt funcții de statisticile F și respectiv t , ele sînt independente și testele bazate pe ele sînt echivalente cu acelea bazate pe statisticile F și t .

În general, fie $\Omega = \omega_0$ spațiul tuturor valorilor posibile ale parametrului θ . Presupunem că ω este o submulțime a mulțimii Ω și că dorim să verificăm ipoteza $H_0: \theta \in \omega$ față de $H_1: \theta \in \Omega - \omega$. Să presupunem că aici există anumite ipoteze intermediare ce interesează pe cercetător, adică presupunem că ipoteza nulă poate fi verificată după cum urmează. Fie ω_i o submulțime a lui ω_{i-1} $i = 1, 2, \dots, k$ astfel ca

$$\Omega = \omega_0 \supset \omega_1 \supset \omega_2 \supset \dots \supset \omega_k = \omega,$$

unde fiecare ω_i corespunde la o ipoteză intermediară. Verificăm H_0 față de H_1 , verificînd succesiv următoarele ipoteze

$$H_0^i: \theta \in \omega_i \text{ față de } H_1^i: \theta \in \omega_{i-1} - \omega_i,$$

$i = 1, 2, \dots, k$. H_0^i este verificată dacă H_0^{i-1} este acceptată. Prin urmare H_0 este acceptată dacă și numai dacă toate ipotezele $H_0^1, \dots, H_0^k$ sînt acceptate. Raportul de verosimilități pentru verificarea ipotezei H_0^i față de H_1^i este

$$l_i = \frac{(P)_{\omega_i}}{(P)_{\omega_{i-1}}}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Astfel raportul de verosimilități pentru verificarea ipotezei H_0 față de H_1 este

$$l = \frac{(P)_{\omega_k}}{(P)_{\omega_0}} = \prod_{i=1}^k \frac{(P)_{\omega_i}}{(P)_{\omega_{i-1}}} = \prod_{i=1}^k l_i$$

și

$$-2 \ln l = \sum_{i=1}^k (-2 \ln l_i).$$

Vom face cîteva observații asupra problemei de independență. Această rezolvare nu este unică și diferite soluții pot conduce la decizii

diferite. În multe cazuri există o cale naturală de rezolvare. În alte cazuri, rezolvarea se face verificând la început ipoteze intermediare mai importante, verificarea oprindu-se când H_0 este respinsă. Acest șir de teste poate fi bazat pe statistici cunoscute care sînt mutual independente.

Aceste observații sînt ilustrate în cele ce urmează.

Să considerăm raportul de verosimilități l_i pentru a verifica H_0^i față de H_1^i , $i = 1, 2, \dots, k$. De obicei, dacă $\theta \in \omega_i$, repartiția lui l_i nu depinde de anumiți parametri inițiali în raport cu ipoteza H_0 . În exemplul considerat în care s-a verificat $H_0^1: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ față de $H_1^1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, găsim că l_1 sau statistica corespunzătoare F are o repartiție în ipoteza H_0^1 ce nu depinde de parametrii inițiali și anume de cele două medii μ_1 și μ_2 și dispersia comună $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. În general presupunem mai departe că în ipoteza $H_0^i: \theta \in \omega_i$ există statistici complet suficiente pentru acești parametri inițiali.

Astfel conform teoremei de independență stabilită de Basu, Hogg și Craig, l_i este independentă de aceste statistici complet suficiente. De obicei, rapoartele de verosimilități $l_{i+1}, l_{i+2}, \dots, l_k$ care urmează lui l_i sînt funcții de aceste statistici complet suficiente și deci sînt independente de l_i , $i = 1, 2, \dots, k-1$. Astfel dacă aceste condiții sînt satisfăcute, rapoartele de verosimilități $l_1, l_2, \dots, l_k$ sînt mutual independente. Pentru a ilustra aceasta să ne întoarcem la exemplul considerat. Aici l_2 sau statistica t corespunzătoare este o funcție de statisticile complet suficiente pentru μ_1, μ_2 și $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ adică l_2 este o funcție de cele două medii de selecție și de estimația dispersiei comune. Deci l_2 este independentă de l_1 și astfel t de F .

Astfel dacă aceste condiții sînt îndeplinite putem folosi teorema de independență pentru a stabili independența statisticilor $l_1, l_2, \dots, l_k$. Mai departe să presupunem că ipoteza H_0^i față de H_1^i se verifică cu pragul de semnificație α_i . Deoarece ipoteza H_0 este acceptată dacă și numai dacă toate ipotezele $H_0^1, \dots, H_0^k$ sînt acceptate, testul lui H_0 față de H_1 are pragul de semnificație.

$$1 - \prod_1^k (1 - \alpha_i) \text{ sau } 1 - (1 - \alpha)^k \text{ dacă } \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k.$$

Exemplul 4. Fie $\mu_1, \dots, \mu_k$ și $\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2$ mediile și respectiv dispersiile a k variabile aleatoare independente repartizate normal. Fie

- $\Omega = \omega_0$ — spațiul parametric $2k$ -dimensional
- $\omega = \omega_2$ — subspațiul bidimensional al lui Ω care specifică egalitatea celor k medii și egalitatea celor k dispersii;
- ω_1 — subspațiul $(k+1)$ -dimensional al lui Ω care specifică egalitatea celor k dispersii, însă care nu impune nici o restricție mediilor.

Dacă asupra fiecăreia dintre aceste k variabile se consideră o selecție de volum n , dacă $l_1 = (P)_{\omega_1}/(P)_{\omega_0}$, $l_2 = (P)_{\omega_2}/(P)_{\omega_1}$, atunci $-2 \ln l_1$ și $-2 \ln l_2$ sînt independente (presupunind că dispersiile sînt egale). Să considerăm niște ipoteze intermediare, adică să inserăm între ω_0 și ω_1 următoarele subspații

$$\Omega = \omega_0 = \omega_{01} \supset \omega_{02} \supset \dots \supset \omega_{0k} = \omega_1$$

unde subspațiul ω_{oi} specifică egalitatea primelor i dispersii $i = 2, \dots, k$
 Determinăm rapoartele de verosimilități

$$l_{oi} = \frac{(P)_{\omega_{oi}}}{(P)_{\omega_{oi-1}}}, \quad i = 2, \dots, k.$$

Fie x_{ij} valoarea variabilei X_i în observația de ordin j . Deoarece

$$f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{in}; \mu_i, \sigma_i^2) = \frac{1}{\sigma_i^n (2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left(\frac{x_{ij} - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 \right]$$

funcția de verosimilitate are expresia

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}, \mu, \sigma) &= \prod_{i=1}^k f(x_{i1}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{in}; \mu_i, \sigma_i^2) = \\ &= \frac{1}{\prod_{i=1}^k \sigma_i^n (2\pi)^{\frac{kn}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n \left(\frac{x_{ij} - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Pentru subspațiul ω_{oi} , $P(\mathbf{x}; \mu, \sigma)$ se scrie

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}, \mu, \sigma) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{kn/2} (\sigma^2)^{in/2} \left(\prod_{i=1}^k \sigma_v^2 \right)^{n/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{v=1}^i \sum_{j=1}^n \left(\frac{x_{vj} - \mu_v}{\sigma} \right)^2 \right] \times \\ &\times \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{v=i+1}^k \sum_{j=1}^n \left(\frac{x_{vj} - \mu_v}{\sigma_v} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

de unde

$$\frac{\partial \ln P}{\partial \mu_v} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^n (x_{vj} - \mu_v) + \frac{1}{\sigma_v^2} \sum_{j=1}^n (x_{vj} - \mu_v) = 0$$

sau

$$\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_v^2} \right) (\bar{x}_v - \mu_v) = 0$$

și cum

$$\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_v^2} \right) > 0$$

urmează că $\hat{\mu}_v = \bar{x}_v$.

$$\frac{\partial \ln P}{\partial \sigma} = 0 \Rightarrow -\frac{in}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{v=1}^i \sum_{j=1}^n (x_{vj} - \mu_v)^2 = 0$$

de unde

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{in} \sum_{v=1}^i \sum_{j=1}^n (x_{vj} - \mu_v)^2 = \frac{1}{i} \sum_{v=1}^i s_v^2$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{i} \sum_{v=1}^i s_v^2, s_v^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_{vj} - \mu_v)^2.$$

$$\frac{\partial \ln P}{\partial \sigma_v} = 0 \Rightarrow -\frac{n}{\sigma_v} + \frac{1}{\sigma_v^3} \sum_{j=1}^n (x_{vj} - \mu_v)^2 = 0,$$

de unde

$$\hat{\sigma}_v^2 = s_v^2, v = i+1, \dots, n.$$

Urmează că

$$\begin{aligned} (P)_{\omega_{oi}} &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{kn}{2}} \left(\frac{1}{i} \sum_1^i s_v^2 \right)^{\frac{in}{2}} \left(\prod_{i+1}^k s_v^2 \right)^{\frac{n}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2} ni - \frac{1}{2} n(k-i) \right] = \\ &= \frac{i^{\frac{in}{2}} \exp(-nk/2)}{(2\pi)^{\frac{kn}{2}} \left(\sum_1^i s_v^2 \right)^{\frac{in}{2}} \left(\prod_{i+1}^k s_v^2 \right)^{\frac{n}{2}}}. \end{aligned}$$

Analog, obținem

$$(P)_{\omega_{0,i-1}} = \frac{(i-1)^{\frac{n(i-1)}{2}} \exp \left(-\frac{1}{2} nk \right)}{(2\pi)^{\frac{kn}{2}} \left(\sum_1^{i-1} s_v^2 \right)^{\frac{(i-1)n}{2}} \left(\prod_i^k s_v^2 \right)^{\frac{n}{2}}}.$$

Putem scrie

$$l_{oi} = \frac{i^{\frac{in}{2}} \left(\sum_{v=1}^{i-1} s_v^2 \right)^{\frac{n(i-1)}{2}} (s_i^2)^{\frac{n}{2}}}{(i-1)^{\frac{n(i-1)}{2}} \left(\sum_{v=1}^i s_v^2 \right)^{\frac{in}{2}}},$$

sau

$$l_{oi} \simeq \left(\frac{s_i^2}{\sum_{v=1}^{i-1} s_v^2} \right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\sum_{v=1}^{i-1} s_v^2}{\sum_{v=1}^i s_v^2} \right)^{\frac{in}{2}} = \left(\frac{s_i^2}{\sum_{v=1}^i s_v^2} \right)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{s_i^2}{\sum_{v=1}^{i-1} s_v^2} \right)^{in/2}}.$$

Punând

$$R_i = \frac{s_i^2}{\sum_{v=1}^i s_v^2}$$

obținem că rapoartele de verosimilități sînt funcții de R_i .

Fiecare R_i multiplicat printr-o constantă convenabilă, atunci cînd $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2$, are o repartiție F . În plus R_2 are o repartiție care nu depinde de $\sigma_1^2 = \sigma_2^2, \sigma_3^2, \dots, \sigma_k^2, \mu_1, \mu_2, \dots$ sau μ_k . Astfel R_2 este independentă de statisticile suficiente complete ale acestor $2k-1$ parametri. Deoarece $R_3, \dots, R_k$ sînt funcții de aceste statistici suficiente complete, ele sînt independente de R_2 . Asemănător, putem arăta că $R_4, \dots, R_k$ sînt independente de R_3 și așa mai departe. Prin urmare rapoartele $R_2, \dots, R_k$ sînt mutual independente cînd $\omega_{0k} = \omega_1$. În acest caz avem de verificat ipoteza

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2 = \sigma^2.$$

Dacă ipoteza este adevărată, atunci

$$P(\mathbf{x}; \mu, \sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{kn}{2}} \sigma^{kn}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n \left(\frac{x_{ij} - \mu_i}{\sigma} \right)^2 \right],$$

de unde

$$\frac{\partial \ln P}{\partial \mu_i} = 0 \Rightarrow \hat{\mu}_i = \bar{x}_i$$

$$\frac{\partial \ln P}{\partial \sigma} = 0 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k s_i^2$$

Urmează că

$$(P)_{\omega_1} = \frac{k^{\frac{kn}{2}}}{(2\pi)^{\frac{kn}{2}} \left(\sum_1^k s_v^2 \right)^{\frac{kn}{2}}} \exp \left(-\frac{1}{2} nk \right)$$

și ținînd seama că

$$(P)_{\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{kn}{2}} \left(\prod_1^k s_v^2 \right)^{\frac{kn}{2}}} \exp \left(-\frac{1}{2} nk \right)$$

obținem

$$\begin{aligned} l = \frac{(P)_{\omega}}{(P)_{\Omega}} &= \frac{k^{\frac{kn}{2}} \left(\prod_1^k s_v^2 \right)^{\frac{n}{2}}}{\left(\sum_1^k s_v^2 \right)^{\frac{kn}{2}}} = k^{\frac{kn}{2}} \left(\frac{s_1^2}{\sum_1^k s_v^2} \right)^{\frac{n}{2}} \cdots \left(\frac{s_k^2}{\sum_1^k s_v^2} \right)^{\frac{n}{2}} = \\ &= \prod_{i=1}^k \left(\frac{s_i^2}{\frac{1}{k} \sum_1^k s_v^2} \right)^{\frac{n}{2}} = \prod_1^k \left(\frac{s_i^2}{s^2} \right)^{\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

Astfel folosind o rezolvare particulară a egalității dispersiilor, testul Bartlett poate fi înlocuit printr-o succesiune de teste F independente, care, dacă egalitatea dispersiilor este respinsă, indică un loc unde egalitatea poate să existe. Vom verifica mai întâi ipotezele intermediare mai importante.

Ipoteza egalității mediilor poate fi verificată asemănător. Inserăm între ω_1 și ω_2 următoarele subspații

$$\omega_1 = \omega_{11} \supset \omega_{12} \supset \dots \supset \omega_{1k} = \omega_2$$

unde subspațiul ω_{1i} specifică afară de egalitatea dispersiilor, egalitatea primelor i medii, $i = 2, \dots, k$.

Fie

$$W_2 = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) / \sqrt{2},$$

$$W_3 = (\bar{X}_1 + \bar{X}_2 - 2\bar{X}_3) / \sqrt{6},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$W_k = (\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_{k-1} - (k-1)\bar{X}_k) / \sqrt{k(k-1)},$$

statisticile Helmert și $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k$ mediile de selecție. Determinăm ra-
poartele de verosimilități

$$l_{1i} = \frac{(P)_{\omega_{1i}}}{(P)_{\omega_{1i-1}}}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

În cazul de față W_r este repartizată normal de medie

$$\frac{1}{\sqrt{r(r-1)}} \sum_1^{r-1} \mu_j - \sqrt{\frac{r-1}{r}} \mu_r,$$

și dispersia

$$\frac{1}{r(r-1)} \sum_1^{r-1} \frac{\sigma_j^2}{n} - \frac{r-1}{r} \cdot \frac{\sigma_r^2}{n}.$$

Pentru subspațiul ω_i avem

$$P = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{kn}{2}} \sigma^{kn}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{v=1}^k \sum_{j=1}^n \left(\frac{x_{vj} - \mu_v}{\sigma} \right)^2 \right],$$

care în cazul subspațiului ω_{1i} (în care se specifică și egalitatea primelor
 i medii) devine

$$(37) \quad P = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{kn}{2}} \sigma^{kn}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{v=1}^i \sum_{j=1}^n \left(\frac{x_{vj} - \mu}{\sigma} \right)^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sum_{v=i+1}^k \sum_{j=1}^n \left(\frac{x_{vj} - \mu_v}{\sigma} \right)^2 \right],$$

unde μ este valoarea comună a primelor i medii.

Din (37) obținem

$$\frac{\partial \ln P}{\partial \mu} = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{1}{i} \sum_1^i \bar{x}_v$$

$$\frac{\partial \ln P}{\partial \mu_v} = 0 \Rightarrow \bar{x}_v = \hat{\mu}_v, \quad v = i+1, \dots, k,$$

$$\frac{\partial \ln P}{\partial \sigma} = 0 \Rightarrow -\frac{kn}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{v=1}^i \sum_{j=1}^n (x_{vj} - \mu)^2 + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{v=i+1}^k \sum_{j=1}^n (x_{vj} - \mu_v)^2 = 0.$$

Ultima ecuație se mai poate scrie

$$nk \sigma^2 = \sum_{v=1}^i \sum_{j=1}^n \left(x_{vj} - \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i \bar{x}_v \right)^2 + \sum_{v=i+1}^k \sum_{j=1}^n (x_{vj} - \bar{x}_v)^2,$$

care succesiv se scrie

$$\begin{aligned} nk \sigma^2 &= \sum_{v=1}^i \sum_{j=1}^n \left(x_{vj} - \bar{x}_v + \bar{x}_v - \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i \bar{x}_v \right)^2 + \sum_{v=i+1}^k ns_v^2 = \sum_{v=1}^i \sum_{j=1}^n (x_{vj} - \bar{x}_v)^2 + \\ &+ \sum_{v=1}^i \sum_{j=1}^n \left(\bar{x}_v - \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i \bar{x}_v \right)^2 + \sum_{v=i+1}^k ns_v^2 = \sum_{v=1}^i ns_v^2 + \\ &+ \sum_{v=1}^i n \left(\bar{x}_v - \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i \bar{x}_v \right)^2 + \sum_{v=i+1}^k ns_v^2, \end{aligned}$$

sau

$$nk \sigma^2 = \sum_{v=1}^k ns_v^2 + \sum_{v=1}^i n \left(\bar{x}_v - \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i \bar{x}_v \right)^2.$$

Urmează că

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{k} \left[\sum_{v=1}^k s_v^2 + \sum_{v=1}^i \left(\bar{x}_v - \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i \bar{x}_v \right)^2 \right]$$

și ținând seama de egalitatea

$$\sum_{j=1}^n \left(x_v - \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right)^2 = \sum_{j=2}^n \frac{[(x_1 + \dots + x_{v-1} - (v-1)x_v]^2}{v(v-1)}$$

care are loc oricare ar fi numerele $x_1, \dots, x_n$ reale sau complexe, $n \geq 2$, și de statisticile Helmert, obținem

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{k} \left\{ \sum_{v=1}^k s_v^2 + \sum_{v=2}^i \frac{[\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_{v-1} - (v-1)\bar{x}_v]^2}{v(v-1)} \right\} = \\ &= \frac{1}{k} \left[\sum_{v=1}^k s_v^2 + \sum_{v=2}^i W_v^2 \right]. \end{aligned}$$

Prin urmare

$$(P)_{\omega_{ii}} = \frac{k^{\frac{kn}{2}} \exp \left(-\frac{1}{2} nk \right)}{(2\pi)^{\frac{kn}{2}} \left(\sum_{v=1}^k s_v^2 + \sum_{v=2}^i W_v^2 \right)^{\frac{kn}{2}}}$$

și analog

$$(P)_{\omega_{1i-1}} = \frac{k^{\frac{kn}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}nk\right)}{(2\pi)^{\frac{kn}{2}} \left(\sum_1^k s_v^2 + \sum_2^{i-1} W_v^2\right)^{\frac{kn}{2}}}$$

de unde

$$(38) \quad l_{1i} = \frac{\left(\sum_1^k s_v^2 + \sum_2^{i-1} W_v^2\right)^{\frac{kn}{2}}}{\left(\sum_1^k s_v^2 + \sum_2^i W_v^2\right)^{\frac{kn}{2}}}.$$

(38) Se mai poate scrie

$$l_{1i} = \frac{1}{\left(1 + \frac{W_i^2}{\sum_1^k s_v^2 + \sum_2^{i-1} W_v^2}\right)^{\frac{kn}{2}}}$$

sau punînd

$$S_i = \frac{W_i^2}{\sum_1^k s_v^2 + \sum_2^{i-1} W_v^2}$$

obținem că rapoartele de verosimilități l_{1i} ($i = 1, 2, \dots, k$) sînt funcții de S_i .

Fiecare S_i , $i = 2, \dots, k$ multiplicat printr-o constantă convenabil aleasă, are o repartiție F cînd $\omega_{1k} = \omega_2$. Se poate arăta că $R_2, \dots, R_k$, $S_2, \dots, S_k$ sînt independente cînd $\omega_{1k} = \omega_2$. Astfel, prin această metodă, testul obișnuit pentru egalitatea mediilor poate fi înlocuit printr-o succesiune de teste F , independente.

TESTUL X^2 . TABELE DE CONTINGENȚĂ

§ 1. Definirea testului de concordanță

Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare X cu funcția de repartiție $F(x)$ necunoscută.

DEFINIȚIA 1. Problema verificării ipotezei

$$(1) \quad H_0 : F(x) = F_0(x)$$

unde $F_0(x)$ este o funcție de repartiție, care poate fi continuă sau discretă, poartă numele de problemă de concordanță.

Orice test pentru verificarea ipotezei (1) poartă numele de test de concordanță.

Ipotezele de concordanță se împart în ipoteze simple și în ipoteze compuse.

(1) este o ipoteză simplă dacă $F_0(x)$ este complet specificată, în caz contrar avem de-a face cu o ipoteză compusă.

§ 2. Statistica X^2 și repartiția sa asimptotică

Fie X o variabilă aleatoare având funcția de repartiție $F(x)$. Împărțim axa x -lor în k mulțimi disjuncte E_j și fie $p_j (j = 1, 2, \dots, k)$ probabilitatea ca variabila X să ia valori în mulțimea E_j .

Dacă luăm intervalul $[a_j, a_{j+1})$ drept mulțimea E_j , atunci

$$p_j = F(a_{j+1}) - F(a_j).$$

DEFINIȚIA 2. Numerele p_j poartă numele de frecvențe teoretice.

TEOREMA 1. Probabilitatea ca într-o selecție de volum n asupra variabilei aleatoare X , n_j valori de selecție să aparțină mulțimii E_j , $j = 1, 2, \dots, k$ este

$$(2) \quad P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$$

$$\text{unde } \sum_{j=1}^k n_j = n.$$

Teorema 1 se demonstrează prin inducție asupra lui k .

TEOREMA 2. *Asimptotic, pentru n și n_i , $1 \leq i \leq k$ suficienți de mari, are loc dezvoltarea*

$$(3) \quad P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = (2\pi n)^{(1-k)/2} e^{-\frac{1}{2} X^2} \prod_1^k p^{-\frac{n_i}{2}} \quad (7)$$

unde

$$(4) \quad X^2 = \sum_1^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}.$$

Observație. Printre cei care au demonstrat această teoremă menționăm pe Pearson (1900) și Johnson, Tetley (1950).

Demonstrație. Ținând seama de formula lui Stirling

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} e^{\theta_n}; \quad |\theta_n| < 1/12 n,$$

sau

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n},$$

obținem

$$(5) \quad \begin{aligned} P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) &\simeq \frac{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}}{(2\pi)^{k/2} \prod_1^k n_i^{n_i+1/2} e^{-n_i}} \prod_1^k p_i^{n_i} = \\ &= \frac{\prod_1^k \left(\frac{np_i}{n_i}\right)^{n_i+1/2}}{(2\pi)^{(k-1)/2} n^{(k-1)/2} \prod_1^k p_i^{1/2}}. \end{aligned}$$

Dacă considerăm alternativa simplă

$$p_j = P(E_j), \quad q_j = 1 - p_j = P(CE_j)$$

și interpretăm cele n valori de selecție ca n repetări ale acestei alternative, obținem

$$M(n_j) = np_j; \quad \sigma_j^2 = D^2(n_j) = np_j q_j.$$

Rezultă că factorii din membrul drept al relației (5) au semnificațiile

— n_j — numărul valorilor de selecție care aparțin mulțimii E_j , și

— np_j — valoarea medie a variabilei aleatoare n_j

Variabila redusă t_j corespunzătoare variabilei n_j este

$$(6) \quad t_j = \frac{n_j - M(n_j)}{D(n_j)} = \frac{n_j - np_j}{\sigma_j}.$$

Ținând seama de (6) relația (5) devine

$$(7) \quad P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) \simeq \frac{\prod_1^k \left(1 + \frac{t_i \sigma_i}{np_i}\right)^{-t_i \sigma_i - np_i - 1/2}}{(2\pi)^{(k-1)/2} n^{(k-1)/2} \prod_1^k p_i^{1/2}} = \frac{U}{V}$$

de unde

$$\ln U = - \sum_1^k \left(t_i \sigma_i + np_i + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{t_i \sigma_i}{np_i} \right).$$

Pentru toți n_i , pentru care $|t_i \sigma_i / np_i| < 1$, seria de puteri

$$\ln \left(1 + \frac{t_i \sigma_i}{np_i} \right) = \frac{t_i \sigma_i}{np_i} - \frac{1}{2} \left(\frac{t_i \sigma_i}{np_i} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{t_i \sigma_i}{np_i} \right)^3 -$$

este convergentă. Ținând seama că $\sigma_i = \sqrt{np_i q_i}$, obținem

$$\ln U = - \sum_1^k t_i \sqrt{np_i q_i} - \frac{1}{2} \sum_1^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} + o(1/\sqrt{n}).$$

Dacă ținem seama că

$$\sum_1^k t_i \sqrt{np_i q_i} = \sum_1^k (n_i - np_i) = 0,$$

teorema este demonstrată.

Dacă np_i sînt suficient de mari, (3) este o aproximație bună pentru $P_n(n_1, n_2, \dots, n_k)$.

Observație. Dacă aproximația (3) este aplicabilă, vectorul aleator $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ are o probabilitate mai mică dacă X^2 (dat de (4)) este mare, și are probabilitate mai mare dacă X^2 este mic. X^2 este mic dacă și numai dacă toate variabilele n_j sînt apropiate de valorile lor medii np_j .

Prin urmare statistica X^2 este un bun indicator dacă sau nu toate variabilele n_j iau valori apropiate de valorile lor medii și, în același timp, dacă acestea au probabilitatea de realizare mai mare sau mai mică.

Pentru n dat, X^2 este o variabilă aleatoare discretă unidimensională. Mulțimea tuturor valorilor posibile ale variabilei X^2 se obțin făcînd pe $n_1, n_2, \dots, n_k$ să parcurgă toți întregii nenegativi, astfel încît $\sum_1^k n_i = n$.

Pentru n dat, repartitia variabilei X^2 este complicată pentru a putea fi folosită în practică, exceptînd valorile mari ale lui k și n cînd aceasta poate fi determinată explicit.

TEOREMA 3. (Fisher (1922)). *Avem*

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (X^2 < c) = P[\chi^2(k-1) < c], \quad c > 0.$$

Demonstrație. Pentru un întreg n finit, considerăm variabilele aleatoare

$$(9) \quad Y_j = \frac{n_j - np_j}{\sqrt{n}} = \sqrt{p_j(1-p_j)} t_j, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Deoarece

$$\sum_1^k Y_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_1^k n_j - n \sum_1^k p_j \right) = 0,$$

rezultă că

$$\begin{aligned} X^2 &= \sum_1^k \frac{Y_j^2}{p_j} = \sum_1^{k-1} \frac{Y_j^2}{p_j} + \frac{1}{p_k} \left(\sum_1^{k-1} Y_j \right)^2 = \\ &= \sum_1^{k-1} \frac{Y_j^2}{p_j} + \sum_1^{k-1} \frac{Y_j^2}{p_k} + \frac{1}{p_k} \sum_1^{k-1} \sum_1^{k-1} Y_r Y_s, \end{aligned}$$

sau notînd

$$A_{rs} = \begin{cases} \frac{1}{p_r} + \frac{1}{p_k}, & r = s \\ \frac{1}{p_k}, & r \neq s \end{cases}$$

obținem

$$X^2 = \sum_k^{k-1} \sum_1^{k-1} A_{rs} Y_r Y_s$$

Funcția caracteristică corespunzătoare statisticii X^2 este

$$\varphi_{X^2}(t) = \sum_{n_1+n_2+\dots+n_k=n} \exp(itX^2) P_n(n_1, n_2, \dots, n_k).$$

Putem scrie

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = (2\pi n)^{(1-k)/2} \prod_1^k p_i^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} X^2 + R(n) + S(n) \right],$$

unde $T(n) = R(n) + S(n)$ tinde la zero pentru $n \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} \varphi_{X^2}(t) &= (2\pi n)^{(1-k)/2} \prod_1^k p_i^{-1/2} \sum_{n_1+n_2+\dots+n_k=n} \exp \left[\left(it - \frac{1}{2} \right) X^2 + T(n) \right] = \\ &= (2\pi)^{(1-k)/2} \prod_1^k p_i^{-1/2} \sum_{n_1+n_2+\dots+n_k=n} \exp \left[\left(it - \frac{1}{2} \right) \sum_1^{k-1} \sum_1^{k-1} A_{rs} Y_r Y_s \right] n^{(1-k)/2} e^{T(n)}. \end{aligned}$$

Dacă n_j se schimbă de la o valoare posibilă a sa la următoarea Y_j în (9) are creșterea

$$\Delta Y_j = 1/\sqrt{n}.$$

Putem scrie

$$\varphi_{X^2}(t) = (2\pi)^{(1-k)/2} \prod_1^k p_i^{-\frac{1}{2}} \times \\ \times \sum_{n_1+n_2+\dots+n_k=n} \exp \left[\left(it - \frac{1}{2} \right) \sum_1^{k-1} \sum_1^{k-1} A_{rs} Y_r Y_s \right] \prod_1^{k-1} \Delta Y_i e^{T(n)}.$$

Pentru $n \rightarrow \infty$, $\varphi_{X^2}(t)$ tinde către

$$(2\pi)^{(1-k)/2} \prod_1^k p_i^{-1/2} \int_{R^{k-1}} \exp \left[\left(it - \frac{1}{2} \right) \sum_1^{k-1} \sum_1^{k-1} A_{rs} Y_r Y_s \right] dY_1 \dots dY_{k-1}.$$

Avem :

$$|A_{rs}| = 1/(p_1 p_2 \dots p_k).$$

Forma $\sum_1^{k-1} \sum_1^{k-1} A_{rs} Y_r Y_s$ este pozitiv definită, deoarece este identic egală cu X^2 . Ținând seama de egalitatea

$$\int_R e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/a}$$

obținem

$$\begin{aligned} \int_{R^{k-1}} \exp \left[\left(it - \frac{1}{2} \right) \sum_1^{k-1} \sum_1^{k-1} A_{rs} Y_r Y_s \right] dY_1 \dots dY_{k-1} = \\ = \int_{R^{k-1}} \exp \left[\left(it - \frac{1}{2} \right) \sum_1^{k-1} \lambda_r Z_r^2 \right] dZ_1 \dots dZ_{k-1} = \\ = \prod_1^{k-1} \int_R \exp \left[\left(it - \frac{1}{2} \right) \lambda_r Z_r^2 \right] dZ_r = \prod_1^{k-1} \sqrt{\pi / \left(\frac{1}{2} - it \right) \lambda_r} = \\ = (2\pi)^{(k-1)/2} (1 - 2it)^{-(k-1)/2} |A|^{-1/2} = \\ = (2\pi)^{(k-1)/2} (1 - 2it)^{-(k-1)/2} \sqrt{p_1 p_2 \dots p_k}. \end{aligned}$$

Rezultă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{X^2}(t) = (1 - 2it)^{-(k-1)/2}$$

care nu este altceva decît funcția caracteristică corespunzătoare unei variabile repartizate $\chi^2(k-1)$. Ținând seama de teoremele referitoare la șiruri de funcții de repartiții și de funcții caracteristice urmează că funcția de repartiție a variabilei aleatoare $X^2 = \sum_1^k (n_j - np_j)^2 / np_j$, pentru $n \rightarrow \infty$, tinde către funcția de repartiție a unei variabile repartizate $\chi^2(k-1)$.
Observație. Calcule numerice arată că membrul drept al relației (8) este o aproximație bună pentru $P(X^2 < o)$, îndată ce $np_j \geq 10$ pentru toți j .

Hoel (1938) folosind funcția generatoare de momente a repartiției multinomiale, obține

TEOREMA 4. Are loc aproximarea

$$(10) \quad P(X^2 < c) = P[\chi^2(k-1) < c] + n^{-1}(R_1 S_1 + R_2 S_2)$$

unde

$$(11) \quad S_1 = \frac{1}{8} \left[\sum_{i=1}^k p_i^{-1} - (k^2 + 2k - 2) \right], \quad S_2 = \frac{1}{24} \left[\sum_{i=1}^k p_i^{-1} - (3k^2 + 6k - 4) \right]$$

și (pentru k impar)

$$(12) \quad R_1 = \frac{c^{\frac{1}{2}(k-1)} e^{-\frac{1}{2}c}}{2.4 \dots (k-1)(k+1)} [c - (k+1)]$$

$$(13) \quad R_2 = \frac{c^{\frac{1}{2}(k-1)} e^{-\frac{1}{2}c}}{2.4 \dots (k+1)(k+3)} [c^2 - 2(k+3)c + (k+3)(k+1)],$$

în timp ce pentru k par

$$(14) \quad R_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{c^{\frac{1}{2}(k-1)} e^{-\frac{1}{2}c}}{1.3 \dots (k-1)(k+1)} [c - (k+1)]$$

$$(15) \quad R_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{c^{\frac{1}{2}(k-1)} e^{-\frac{1}{2}c}}{1.3 \dots (k+1)(k+3)} [c^2 - 2(k+3)c + (k+3)(k+1)].$$

§ 3. χ^2 -test al ipotezei simple

Să presupunem că observațiile asupra variabilei aleatoare X conduc la evenimentele $E_1, E_2, \dots, E_k$. Ne propunem să verificăm ipoteza H conform căreia probabilitățile $P(E_j)$, $1 < j < k$ au valori numerice definite

$$P(E_j) = p_j \text{ pentru } 1 < j < k.$$

Se efectuează o selecție de volum n și fie n_j numărul de realizări ale evenimentului E_j în această selecție, adică frecvența observată a acestui eveniment. În scopul verificării ipotezei H vom compara frecvențele observate n_j cu frecvențele teoretice pe care nu le cunoaștem însă le putem determina, multiplicând fiecare probabilitate p_j prin n . Pentru luarea deciziei folosim statistica X^2 dată de (4) și respingem ipoteza H dacă

$$(16) \quad X^2 > \chi_{1-\alpha}^2(k-1).$$

§ 4. Testul X^2 și testul raportului de verosimilități pentru ipoteza simplă H_0

Să presupunem că $F_0(x)$ este complet specificată, astfel încît (1) este o ipoteză simplă. De asemenea să presupunem că intervalul de variație al variabilei X este împărțit în k clase. Deoarece $F_0(x)$ este complet specificată, putem calcula probabilitatea ca o observație să cadă într-o anumită clasă. Dacă acestea sînt notate prin p_{0i} , $i = 1, 2, \dots, k$ și frecvențele observate în clase prin n_i ($\sum_1^k n_i = n$), n_i sînt repartizate multinomial și funcția de verosimilitate este :

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k | p_{01}, \dots, p_{0k}) \simeq \prod_1^k p_{0i}^{n_i}.$$

Pe de altă parte, dacă funcția de repartitie adevărată este $F_1(x)$, unde $F_1(x)$ poate fi orice funcție de repartitie, notînd probabilitățile de a obține observații în cele k clase prin p_{1i} , $1 \leq i \leq k$, funcția de verosimilitate este

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k | p_{11}, \dots, p_{1k}) \simeq \prod_1^k p_{1i}^{n_i}.$$

Găsim raportul de verosimilități pentru verificarea ipotezei (1) față de alternativa compusă

$$H_1 : F(x) = F_1(x).$$

Estimațiile de verosimilitate maximă pentru p_{1i} sînt $\hat{p}_{1i} = n_i/n$.

Prin urmare raportul de verosimilități pentru verificarea ipotezei H_0 față de H_1 este

$$(17) \quad l = \frac{P(n_1, n_2, \dots, n_k | p_{01}, p_{02}, \dots, p_{0k})}{P(n_1, n_2, \dots, n_k | p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1k})} = n^n \prod_1^k \left(\frac{p_{0i}}{n_i} \right)^{n_i}.$$

Se respinge ipoteza H_0 atunci cînd l are o valoare mică.

Repartiția exactă a statisticii l este necunoscută, însă din teorema XIV.3 rezultă că pentru $n \rightarrow \infty$, $-2 \ln l \sim \chi^2(k-1)$.

TEOREMA 5. Asimptotic testul X^2 și testul raportului de verosimilități sînt echivalente.

Demonstrație. Avem

$$(18) \quad X^2 = \sum_1^k \frac{(n_i - np_{0i})^2}{np_{0i}}$$

în timp ce din (17)

$$(19) \quad -2 \ln l = 2 \left[\sum_1^k n_i \ln(n_i/p_{0i}) - n \ln n \right].$$

Dacă punem $\Delta_i = (n_i - np_{0i})/np_{0i}$, atunci

$$\begin{aligned} -2 \ln l &= 2 \sum n_i \ln(1 + \Delta_i) = \\ &= 2 \sum [(n_i - np_{0i}) + np_{0i}] \left[\Delta_i - \frac{1}{2} \Delta_i^2 + o(n^{-3/2}) \right] = \\ &= 2 \sum \left[(n_i - np_{0i}) \Delta_i + np_{0i} \Delta_i - \frac{np_{0i}}{2} \Delta_i^2 + o(n^{-1/2}) \right], \end{aligned}$$

și cum

$$\sum p_{0i} \Delta_i = 0,$$

obținem

$$-2 \ln l = \sum [np_{0i} \Delta_i^2 + o(n^{-1/2})] = X^2 [1 + o(n^{-1/2})].$$

Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} o(n^{-1/2}) = 0$, urmează că statisticile (17) și (19) sînt, asimptotic, echivalente. Teorema este demonstrată.

Observație. Pentru valori mici ale lui n statisticile pe care se bazează aceste două teste sînt diferite.

Pentru ușurința calculelor în locul statisticii (18), se folosește statistica

$$(18') \quad X^2 = \frac{1}{n} \sum \frac{n_i^2}{p_{0i}} - n,$$

cu toate că (18) prezintă avantajul că este funcție directă de diferența dintre frecvențele observate n_i și mediile lor ipotetice np_{0i} , diferențe care prin ele înșăși sînt importante.

§ 5. Testul X^2 în cazul în care H_0 este o ipoteză compusă

În § 3 am dat o metodă de verificare a concordanței dintre o repartiție empirică și o repartiție ipotetică pentru care toți parametrii erau dați numeric, adică avem de-a-face cu o ipoteză simplă. Adeseori trebuie să verificăm ipoteze mai generale (compuse) conform cărora o mulțime de observații este o selecție asupra unei variabile ce are o repartiție de un tip dat, dar o parte sau toți parametrii ce determină această repartiție sînt necunoscuți.

În astfel de cazuri parametrii necunoscuți sînt estimați cu ajutorul datelor de selecție, estimațiile astfel obținute sînt introduse în repartiția de tipul dat, repartiție ce devine complet specificată, apoi este verificată concordanța. Se impun următoarele întrebări:

— ce metodă de estimare folosim?

— ce modificări trebuie aduse testului de concordanță discutat în §3.

Presupunem că probabilitățile teoretice p_{0i} sînt funcții de s ($s < k - 1$) parametrii necunoscuți $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$ și vom scrie $p_{0i}(\theta)$. Dacă t este vectorul estimator al vectorului $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$, (4) se scrie

$$X^2 = \sum_1^k \frac{[n_i - np_{0i}(t)]^2}{np_{0i}(t)}.$$

Deoarece $p_{oi}(t)$ sînt variabile aleatoare urmează că repartiția asimptotică a statisticii X^2 nu va mai avea aceeași formă ca în cazul ipotezei simple H_0 . Termenul $n_i - np_{oi}(t)$ nu va mai avea valoarea medie zero. X^2 se poate scrie

$$(20) \quad X^2 = \sum_1^k \frac{1}{np_{oi}(t)} \{ [n_i - np_{oi}(t)]^2 + n^2 [p_{oi}(t) - p_{oi}(\theta)]^2 - 2n [n_i - np_{oi}(\theta)] [p_{oi}(t) - p_{oi}(\theta)] \}.$$

Deoarece, asimptotic

$$n_i - np_{oi} \sim cn^{1/2}$$

urmează că $[n_i - np_{oi}(\theta)]^2$ este de ordinul n . Dacă avem

$$(21) \quad p_{oi}(t) - p_{oi}(\theta) = O(n^{-1/2})$$

al doilea și al treilea termen din (20) vor avea ordinul mai mic decît n și relativ neglijabil, astfel ca asimptotic (20) se va comporta ca primul termen. Deoarece la numitorul relației (20) avem variabila aleatoare $np_{oi}(t)$, o vom înlocui, la același ordin de aproximație, cu $p_{oi}(\theta)$. Urmează că, dacă (21) are loc, (18') se comportă asimptotic ca (4), adică are o repartiție $\chi^2(k-1)$. Totuși dacă $p_{oi}(t)$ sînt funcții de t , atunci vor diferi de $p_{oi}(\theta)$ cu același ordin de mărime ca t de θ . Atunci pentru toate scopurile practice (21) cere ca

$$(22) \quad t - \theta = O(n^{-1/2}).$$

Deoarece, obișnuit, avem estimatori cu dispersiile și covariantele de ordinul n^{-1} ,

$$(23) \quad t - \theta = O(n^{-1/2}),$$

și (22) nu este satisfăcută.

Presupunem că are loc relația (23) și că alegem ca mulțime de estimatori pentru θ , estimatorii de maximă verosimilitate, sau orice alți estimatori echivalenți asimptotic, astfel încît $t = \hat{\theta}$. În acest caz funcția de verosimilitate este dată de (2) privită ca funcție de θ_j (de care depinde p_{oi}). Astfel

$$(24) \quad \frac{\partial \ln P}{\partial \theta_j} = \sum_1^k n \frac{\partial p_{oi}}{\partial \theta_j} \cdot \frac{1}{p_{oi}}, \quad j = 1, 2, \dots, s$$

și estimatorii de maximă verosimilitate multinominali sînt cele s rădăcini ale ecuațiilor obținute egalînd (24) cu zero pentru fiecare j .

Fiecare dintre aceste ecuații este o relație lineară omogenă în n_i . În acest caz se impun procesului de estimare al parametrului θ încă s legături liniare, astfel încît statistica (18') este repartizată asimptotic $\chi^2(k-s-1)$.

Teorema IX.20. stabilește condițiile în care are loc acest rezultat.

Efectul estimării parametrilor necunoscuți asupra repartiției asimptotice a statisticii X^2 a fost studiat de Watson (1959) și reluat de Kendall și Stuart (1961).

TEOREMA 6. Dacă are loc relația (23) atunci $X^2 \sim \chi^2(k - s - 1)$.

Demonstrație. Pentru orice estimator t al vectorului θ luăm

$$(25) \quad t - \theta = n^{-1/2} Ax + o(n^{-1/2}),$$

unde $-A$ este o matrice arbitrară de ordin $(s \times k)$ astfel încît

$$(26) \quad M(Ax) = 0$$

— x este un vector $(k \times 1)$ a cărui componentă de ordin i este

$$(27) \quad x_i = \frac{n_i - np_{0i}(\theta)}{[np_{0i}(\theta)]^{1/2}}.$$

Din (25) și (26) urmează că matricea de covarianțe a vectorului $\mathcal{C}(t)$ este de ordinul n^{-1} . Dacă dezvoltăm $p_{ci}(t) - p_{ci}(\theta)$ din (20), în serie Taylor, putem scrie

$$X^2 = \sum_1^k y_i^2$$

unde (cînd $n \rightarrow \infty$)

$$(28) \quad y_i = x_i - \sqrt{n} \sum_{j=1}^s (t_j - \theta_j) \frac{\partial p_{0i}(\theta)}{\partial \theta_j} \frac{1}{[p_{0i}(\theta)]^{1/2}} + o(1).$$

Notăm prin B matricea $(k \times s)$ cu elementele

$$(29) \quad b_{ij} = \frac{\partial p_{0i}(\theta)}{\partial \theta_j} \frac{1}{[p_{0i}(\theta)]^{1/2}}$$

(28), în notații matriciale, se scrie

$$(30) \quad y = x - \sqrt{n} B(t - \theta) + o(1).$$

Ținînd seama de (25) în (30) obținem

$$(31) \quad y = (I - BA)x + o(1).$$

Din ecuația (27), $M(x_i) = 0$. Din teorema limită centrală multi-dimensională, cînd $n \rightarrow \infty$, $(x_1, \dots, x_k)$ are o repartiție normală multi-dimensională cu matricea de covarianțe

$$(32) \quad \mathcal{C}(x) = \begin{pmatrix} 1 - p_1 & -\sqrt{p_1 p_2} & -\sqrt{p_1 p_3} \dots & -\sqrt{p_1 p_k} \\ -\sqrt{p_2 p_1} & 1 - p_2 & -\sqrt{p_2 p_3} \dots & -\sqrt{p_2 p_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\sqrt{p_k p_1} & -\sqrt{p_k p_2} & -\sqrt{p_k p_3} \dots & 1 - p_k \end{pmatrix} = \\ = I - \sqrt{p} (\sqrt{p})'$$

unde : am înlocuit $p_{0i}(\theta)$ prin p_i și

$\sqrt{p}$ este un vector avînd componenta de ordin i : $\sqrt{p_{0i}(\theta)}$.

Din (31) și (32) și din teorema III. 16 urmează că $(y_1, \dots, y_k)$ este asimptotic repartizat normal de vector valoare medie zero și matricea de covarianțe

$$(33) \quad \mathcal{C}(y) = (\mathbf{I} - \mathbf{BA})[\mathbf{I} - \sqrt{\mathbf{p}}(\sqrt{\mathbf{p}})'](\mathbf{I} - \mathbf{BA})'.$$

Astfel $X^2 = y'y$ este asimptotic repartizată ca o sumă de pătrate de k variabile normale cu mediile zero și matricea de covarianțe (33). Dacă și numai dacă $\mathcal{C}(y)$ este idempotentă avind r rădăcini caracteristice egale cu unu și $(k - r)$ zero, astfel încât urma sa este r , $X^2 \sim \chi^2(r)$.

Presupunem că folosim estimatorul de maximă verosimilitate multinomial $\hat{\theta}$ și căutăm forma matricei $\mathbf{A}$ când $t = \hat{\theta}$. Elementele matricei inverse a matricei de covarianțe corespunzătoare vectorului $\hat{\theta}$ sînt date asimptotic de

$$(34) \quad (\mathcal{C}(\hat{\theta}))_{\bar{j}\bar{i}}^{-1} = -M \left(\frac{\partial^2 \ln P}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \right)_{1 \leq j, i \leq s}.$$

Din (24) obținem

$$(35) \quad \frac{\partial^2 \ln P}{\partial \theta_j \partial \theta_i} = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{p_{0i}} \left(\frac{\partial^2 p_{0i}}{\partial \theta_j \partial \theta_i} - \frac{1}{p_{0i}} \cdot \frac{\partial p_{0i}}{\partial \theta_j} \cdot \frac{\partial p_{0i}}{\partial \theta_i} \right).$$

Dacă în (35) aplicăm media găsim

$$(36) \quad -M \left(\frac{\partial^2 \ln P}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \right) = n \left[\sum_{i=1}^k \frac{1}{p_{0i}} \cdot \frac{\partial p_{0i}}{\partial \theta_j} \cdot \frac{\partial p_{0i}}{\partial \theta_i} - \sum_{i=1}^k \frac{\partial^2 p_{0i}}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \right].$$

Al doilea termen din membrul drept al relației (36) este zero, deoarece este $\frac{\partial^2}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \sum_{i=1}^k p_{0i}$. Astfel, folosind (29), găsim

$$-M \left(\frac{\partial^2 \ln P}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \right) = n \sum_{i=1}^k b_{ij} b_{ii},$$

astfel că, din (34)

$$(\mathcal{C}(\hat{\theta}))^{-1} = n\mathbf{B}'\mathbf{B}$$

sau

$$(37) \quad \mathbf{C} = n\mathcal{C}(\hat{\theta}) = (\mathbf{B}'\mathbf{B})^{-1}.$$

Din (25) și (32) avem

$$(38) \quad \mathbf{D} = n\mathcal{C}(t) = \mathbf{A}\mathcal{C}(x)\mathbf{A}' = \mathbf{A}[\mathbf{I} - \sqrt{\mathbf{p}}(\sqrt{\mathbf{p}})']\mathbf{A}'.$$

În acest caz (37) și (38) sînt expresii alternative pentru aceeași matrice.

Alegem $\mathbf{A}$ pentru a satisface (37) notind că

$$(39) \quad \mathbf{B}'(\sqrt{\mathbf{p}}) = 0$$

(deoarece elementul j al acestui vector $(s \times 1)$ este $\frac{\partial}{\partial \theta_j} \sum_{i=1}^k p_{oi} = 0$), și deci dacă $\mathbf{A} = \mathbf{GB}'$, unde $\mathbf{G}$ este simetrică și nesingulară, (38) dă $\mathbf{GB}'\mathbf{B}\mathbf{G}'$. Egalind-o cu (37), avem $\mathbf{G} = (\mathbf{B}'\mathbf{B})^{-1}$, astfel încît

$$(40) \quad \mathbf{A} = (\mathbf{B}'\mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}'.$$

Dacă ținem seama de (39), (33) devine

$$(41) \quad \begin{aligned} \mathcal{C}(\mathbf{y}) &= [\mathbf{I} - \mathbf{B}(\mathbf{B}'\mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}']^2 - \sqrt{\mathbf{p}}(\sqrt{\mathbf{p}})' = \\ &= \mathbf{I} - \mathbf{B}(\mathbf{B}'\mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}' - \sqrt{\mathbf{p}}(\sqrt{\mathbf{p}})'. \end{aligned}$$

Ridicînd la pătrat această matrice, rezultă că $\mathcal{C}(\mathbf{y})$ este idempotentă. Rangul matricei este egală cu urma ei. Aceasta este dată de

$$\text{Ur} \cdot \mathcal{C}(\mathbf{y}) = \text{Ur}[\mathbf{I} - \sqrt{\mathbf{p}}(\sqrt{\mathbf{p}})'] - \text{Ur} \mathbf{B}'\mathbf{B}(\mathbf{B}'\mathbf{B})^{-1} = (k-1) - s.$$

Astfel, asimptotic, $X^2 \sim \chi^2(k-s-1)$.

Observații. i) Cazul ipotezei simple, cînd nici un parametru nu trebuie estimat se obține luînd în (25), $\mathbf{A} \equiv 0$. (33) devine

$$(42) \quad \mathcal{C}(\mathbf{y}) = \mathcal{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{I} - \sqrt{\mathbf{p}}(\sqrt{\mathbf{p}})'$$

Deoarece

$$\sqrt{\mathbf{p}}(\sqrt{\mathbf{p}})' = \sum_{i=1}^k p_{oi}(\theta) = 1,$$

ridicînd (42) la pătrat, obținem că $\mathcal{C}(\mathbf{y})$ este idempotentă. Deci $\text{Ur} \mathcal{C}(\mathbf{y}) = k-1$ și $X^2 \sim \chi^2(k-1)$ rezultat obținut și în teorema 3.

ii) Fisher (1928) studiază efectul folosirii altor estimatori pentru θ asupra repartiției asimptotice a statisticii X^2 .

TEOREMA 7. (Chernoff, Lehmann (1954)). În cazul în care estimatorii folosiți sînt estimatorii de verosimilitate maximă $\hat{\theta}^*$ bazată pe n observații individuale și nu estimatori de verosimilitate maximă multinomiali bazați pe k frecvențe n_i , X^2 obținut, nu mai este asimptotic repartizat χ^2 .

Demonstrație. Dacă f este densitatea variabilei asupra căreia s-au considerat observațiile, atunci, asimptotic, avem

$$(43) \quad \mathbf{D} = n \mathcal{C}(\hat{\theta}) = - \left\{ \mathbf{M} \left(\frac{\partial^2 \ln P}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right) \right\}^{-1}$$

și elementele vectorului $\hat{\theta}^*$ sînt rădăcinile ecuațiilor

$$\frac{\partial \ln P}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s$$

unde P este funcția de verosimilitate obișnuită.

Dacă θ_0 este valoarea adevărată, avem dezvoltarea în serie Taylor.

$$0 = \frac{\partial \ln P}{\partial \theta_i} \Big|_{\theta_j = \hat{\theta}_j^*} = \frac{\partial \ln P}{\partial \theta_i} \Big|_{\theta_j = \theta_{0j}} + (\theta_j^* - \theta_{0j}) \frac{\partial^2 \ln P}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \Big|_{\theta_j = \theta_{0j} + z}$$

$$i, j = 1, 2, \dots, s.$$

Ținînd seama de (43) și notînd prin θ vectorul valorilor adevărate, obținem :

$$(44) \quad \hat{\theta}^* - \theta = \frac{1}{n} D \begin{pmatrix} \frac{\partial \ln P}{\partial \theta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \ln P}{\partial \theta_s} \end{pmatrix}.$$

Deoarece amîndouă mulțimile de estimatori de maximă verosimilitate sînt consistente, $\frac{\partial \ln P}{\partial \theta_j}$ va fi la primul ordin de aproximare echivalent cu (24), care, folosind (29), este

$$(45) \quad \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{\sqrt{p_{0i}}} b_{ij} = \sqrt{n} \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{\sqrt{np_{0i}}} b_{ij}$$

(45) în termeni de (27) se mai poate scrie

$$\sqrt{n} \sum_{i=1}^k x_i b_{ij} = \sqrt{n} (B'x)_j.$$

Astfel (44) este

$$(46) \quad \hat{\theta}^* = \theta + n^{-1/2} DB'x.$$

Din compararea relațiilor (46) și (25) rezultă că trebuie să avem

$$(47) \quad A = DB'.$$

Matricea de covarianțe (33) devine

$$C(y) = (I - BDB') [I - \sqrt{p}(\sqrt{p})'] (I - BDB')$$

sau, ținînd seama de (38), (39), și (47)

$$(48) \quad C(y) = I - \sqrt{p}(\sqrt{p})' - BDB'.$$

Ridicînd (48) la pătrat obținem că $\mathcal{C}(y)$ nu este idempotentă.
Putem să scriem :

$$\mathbf{D} + \mathbf{P} = \mathbf{C}$$

unde: — $\mathbf{P}$ este ne-negativ definită,

— $\mathbf{D}$ este matricea de covarianțe a estimatorilor de verosimilitate maximă eficienți

— $\mathbf{C}$ este matricea de covarianțe a estimatorilor multinomiali de verosimilitate maximă, ale cărei elemente diagonale nu pot fi mai mici decît ale matricei $\mathbf{D}$.

Astfel (48) se poate scrie

$$(49) \quad \mathcal{C}(y) = \mathbf{I} - \sqrt{\mathbf{p}}(\sqrt{\mathbf{p}})' - \mathbf{BCB}' + \mathbf{BPB}'.$$

Primii doi termeni din membrul drept ale relației (49) corespund cazului cînd nu avem nici un parametru de estimat ((42)), cînd $\mathcal{C}(y)$ are $k - 1$ rădăcini caracteristice egale cu 1 și una egală cu zero. Primii trei termeni sînt (41), cînd cu estimatorii de verosimilitate maximă multinomiali, $\mathcal{C}(y)$ are $k - s - 1$ rădăcini caracteristice egale cu unu și $(s + 1)$ egale cu zero.

Datorită faptului că toți termenii sînt ne-negativ definiți, reducerea lui (49) la forma canonică arată că rădăcinile caracteristice ale matricei (49) sînt mărginite de rădăcinile caracteristice corespunzătoare lui (42) și (41). Astfel (49) are $(k - s - 1)$ rădăcini caracteristice egale cu unu, una cu zero și s între 0 și 1.

Cînd $k \rightarrow \infty$ astfel încît $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$, urmează că ultimele s rădăcini caracteristice tind către zero.

Deci atunci cînd folosim pentru estimarea parametrilor estimatorii de verosimilitate maximă obișnuiți, X^2 nu mai are asimptotic o repartiție χ^2 .

Observație. Totuși repartiția statisticii X^2 este mărginită între un $\chi^2(k - 1)$ și un $\chi^2(k - s - 1)$. Pentru selecții mici, folosirea pentru verificarea ipotezelor a repartiției $X^2(k - s - 1)$, conduce la erori grave.

§ 6. Alegerea claselor pentru testul X^2

Mann și Wald (1942) și Gumbel (1943) sugerează următoarea regulă pentru alegerea claselor.

„dat k , se aleg clasele astfel încît probabilitățile ipotetice p_{0i} sînt toate egale cu $1/k$ ”.

Acest procedeu este unic și perfect definit și pentru a fi precis cere ca datele inițiale să nu fie grupate.

În legătură cu lucrarea lui Mann și Wald, Williams (1950) dă date numerice privind numărul și lungimea acestor intervale.

Oochan (1952) dă o descriere detaliată a folosirii testului X^2 .

Vessereau (1958), comparînd repartiția statisticii X^2 cu repartiția limită $\chi^2(k - 1)$, pentru $p_k = 1/k$ și valori mici ale lui n (între 15 și 20), stabilește că putem folosi repartiția limită a statisticii X^2 , fără a face o greșeală prea mare, la pragul de semnificație $\alpha = 0,05$ sau 0,01 chiar dacă $n_j = 1$ ($j = 1, 2, \dots, k$).

Tumanian (1956) și Gihman (1956) studiază repartiția limită a statisticii X^2 când numărul de intervale în care este împărțită axa $(-\infty, \infty)$ tinde către ∞ când $n \rightarrow \infty$. Mai precis are loc

TEOREMA 8. Dacă

— în (4) k crește către infinit când $n \rightarrow \infty$,

— $\lim_{n \rightarrow \infty} \min_{1 \leq j \leq k} np_j = \infty$,

atunci statistica

$$(X^2 - k)/\sqrt{2k}$$

are asimptotic o repartiție $N(0,1)$.

§ 7. Momentele statisticii X^2

Presupunem că în ipoteza H_0 probabilitățile ipotetice sînt p_{0i} și că X^2 este dată de (18'). Ne vom mărgini numai la ipoteze simple. Presupunem că probabilitățile adevărate sînt p_{1i} , $i = 1, 2, \dots, k$. Valoarea medie a statisticii test este

$$M(X^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \frac{1}{p_{0i}} M(n_i^2) - n$$

și ținînd seama de momentele repartiției multinomiale obținem

$$(50) \quad M(n_i^2) = np_{1i}(1 - p_{1i}) + n^2 p_{1i}^2,$$

de unde

$$(51) \quad M(X^2) = \sum_{i=1}^k \frac{p_{1i}(1 - p_{1i})}{p_{0i}} + n \left[\sum_{i=1}^k \frac{p_{1i}^2}{p_{0i}} - 1 \right].$$

Dacă este adevărată ipoteza H_0 , (51) devine

$$(52) \quad M_{H_0}(X^2) = k - 1.$$

Acest rezultat era de așteptat, deoarece, asimptotic X^2 era repartizat $\chi^2(k - 1)$.

Dacă derivăm (51) în raport cu p_{1i} , supuși la condiția $\sum p_{1i} = 1$, găsim că are o valoare minimă când $p_{1i} = p_{0i}$. Pentru orice ipoteză H_1 specificînd o mulțime de probabilități $p_{1i} \neq p_{0i}$, avem pentru orice volum

$$(53) \quad M_{H_1}(X^2) > k - 1.$$

(53) arată că regiunea critică pentru testul X^2 constă în coada superioară, deși această indicație nu este concludentă deoarece repartiția asimptotică a statisticii X^2 , când este adevărată ipoteza H_1 , nu este un χ^2 . Repartiția statisticii X^2 în ipoteza alternativă este dificil de evaluat, chiar asimptotic, exceptînd cazul anumitor presupuneri suplimentare.

În cazul probabilităților egale $p_{0i} = \frac{1}{k}$, asimptotic, avem

$$(57) \quad \begin{cases} D_{H_0}^2(X^2) = 2(k-1) \\ D_{H_1}^2(X^2) \simeq 4(n-1) k^2 [\sum p_{1i}^3 - (\sum p_{1i}^2)^2]. \end{cases}$$

În cazul probabilităților egale (51) devine

$$(55) \quad M_{H_1}(X^2) = (k-1) + (n-1)(k \sum p_{1i}^2 - 1).$$

§ 8. Consistența testului X^2

Ecuatiile (54) și (55) sînt suficiente pentru demonstrarea consistenței testului X^2 cu probabilități egale. Testul constă în compararea valorii statisticii X^2 cu valoarea critică fixată, să zicem c_α , în coada superioară a repartiției sale.

Dacă este adevărată H_1 , valoarea medie și dispersia statisticii X^2 sînt fiecare de ordinul n . Inegalitatea lui Cebîșev dă

$$(56) \quad P[|X^2 - M(X^2)| \geq \lambda D(X^2)] \leq \frac{1}{\lambda^2}.$$

Deoarece c_α este fixată, ea diferă de $M(X^2)$ printr-o cantitate de ordinul n , astfel că dacă cerem probabilitatea ca X^2 să difere de media sa cu mai puțin de c_α factorul λ din membrul stîng din (56) trebuie să fie de ordinul $\sqrt{n}$ și deci membrul drept este de ordinul $1/n$.

Astfel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X^2 < c_\alpha) = 0$$

și testul este consistent pentru orice ipoteză H_1 specificînd clase de probabilități neegale.

§ 9. Nedeplasarea testului X^2

TEOREMA 9. (Mann, Wald (1942)). *Testul X^2 cu probabilități egale este local nedeplasat.*

Demonstrație. Fie $\pi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$, unde $\theta_i = p_i - \frac{1}{k}$, puterea testului X^2 . Are loc următoarea dezvoltare în serie Taylor în jurul punctului $0 = (0, 0, \dots, 0)$.

$$(57) \quad \begin{aligned} \pi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = & \pi(0, 0, \dots, 0) + \sum \theta_i \frac{\partial \pi}{\partial \theta_i} + \\ & + \frac{1}{2} \left[\sum \theta_i^2 \frac{\partial^2 \pi}{\partial \theta_i^2} + \sum_{i \neq j} \theta_i \theta_j \frac{\partial^2 \pi}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right]. \end{aligned}$$

Pentru testul de volum α avem

$$\pi(0, 0, \dots, 0) = \alpha.$$

Mai multe, deoarece π este o funcție simetrică în θ_i , derivatele $\frac{\partial \pi}{\partial \theta_i}$, $1 \leq i \leq k$ sînt egale în $(0, 0, \dots, 0)$; similar pentru $\frac{\partial^2 \pi}{\partial \theta_i^2}$ și $\frac{\partial^2 \pi}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$. Prin urmare (57) se mai poate scrie

$$(58) \quad \pi = \alpha + \frac{\partial \pi}{\partial \theta_i} \sum \theta_i + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \pi}{\partial \theta_i^2} \sum \theta_i^2 + \frac{\partial^2 \pi}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \sum_{i \neq j} \theta_i \theta_j \right].$$

Cum

$$0 = \sum \theta_i = (\sum \theta_i)^2 = (\sum \theta_i^2 + \sum_{i \neq j} \theta_i \theta_j),$$

(58) devine

$$(59) \quad \pi = \alpha + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial \theta_i^2} - \frac{\partial^2 \pi}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right) \sum \theta_i^2 + \dots$$

Putem evalua direct derivatele de ordinul doi ce apar în (59) din expresia exactă a puterii

$$(60) \quad \pi = \sum_{X^2 \geq c_\alpha} \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}.$$

Deoarece $\theta_i = p_i - 1/k$, din (60) găsim

$$(61) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \pi}{\partial \theta_i^2} - \frac{\partial^2 \pi}{\partial \theta_i \partial \theta_j} &= \sum [n_1(n_1 - 1) - n_1 n_2] \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \left(\frac{1}{k} \right)^{n-2} = \\ &= k^2 \sum [n_1^2 - n_1 - n_1 n_2] f_n \end{aligned}$$

unde $f_n = n! / n_1! n_2! \dots n_k! k^n$ și toate sumele sînt luate pe regiunea critică $X^2 \geq c_\alpha$ care, din forma lui X^2

$$\frac{k}{n} \sum_1^k n_i^2 - n$$

este echivalentă cu

$$\sum_1^k n_i^2 \geq b_\alpha.$$

$\frac{1}{\alpha} \sum n_i^2 f_n$ este media lui n_i^2 , în regiunea critică și aceasta trebuie să depășească în general media sa, care după

$$M(n_i^2) = np_{1i}(1 - p_{1i}) + n^2 p_{1i}^2$$

este $\frac{n}{k} \left(1 - \frac{1}{k} + \frac{n}{k} \right)$. Astfel

$$(62) \quad \sum n_i^2 f_n = \alpha \frac{n}{k} \left(1 - \frac{1}{k} + \frac{n}{k} \right) + d$$

unde $d > 0$. Din același motiv, deoarece n_1 este pozitiv, avem $\frac{1}{\alpha} \sum n_1 f_n > \frac{n}{k}$ sau

$$(63) \quad \sum n_1 f_n = \alpha \frac{n}{k} + e$$

unde $e > 0$. Mai mult, din (62) și (63) rezultă

$$(64) \quad d > e.$$

Prin simetrie avem

$$(65) \quad \begin{aligned} \sum n_1 n_2 f_n &= \sum \left[\frac{1}{k(k-1)} (n^2 - \sum n_i^2) \right] f_n = \\ &= \frac{\alpha n^2}{k(k-1)} - \frac{1}{k-1} \sum n_i^2 f_n. \end{aligned}$$

Folosind (62) – (65), (61) devine

$$\frac{1}{k^2} \left[\frac{\partial^2 \pi}{\partial \theta_1^2} - \frac{\partial^2 \pi}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \right] > \frac{k}{k-1} \alpha \frac{n}{k} \left(1 - \frac{1}{k} + \frac{n}{k} \right) - \alpha \frac{n}{k} - \alpha \frac{n^2}{k(k-1)} = 0.$$

Astfel în (59) al doilea termen din dreapta este pozitiv. Termenii de ordin superior neglijați în (59) implică că puterile trei și mai mari ale lui θ_i vor fi în modul mai mici decât termenii de ordinul doi în ipoteza H_0 . Astfel, în ipoteza H_0 , $\pi \geq \alpha$ ceea ce demonstrează teorema.

§ 10. Teste de independență în tabele 2×2 , pentru selecții de volum mare

Presupunem că într-o populație toate elementele sînt așezate într-una din categoriile A_1 sau A_2 și simultan într-una din categoriile B_1 sau B_2 . De exemplu $A_1(A_2)$ poate fi păr negru (celelalte culori de păr) și $B_1(B_2)$ pot fi ochi albaștri (celelalte culori de ochi). Dacă p_{ij} este pro-

babilitatea ca un element al populației să aibe categoriile A_i și B_j , $1 \leq i, j \leq 2$, atunci avem tabela de probabilități

(66)

	B_1	B_2	
A_1	p_{11}	p_{12}	$p_{1\cdot}$
A_2	p_{21}	p_{22}	$p_{2\cdot}$
	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	

Dacă notăm prin n_{ij} frecvența elementelor, într-o selecție de volum n , avind categoriile A_i și B_j , atunci avem tabela de frecvențe observate

	B_1	B_2	
A_1	n_{11}	n_{12}	$n_{1\cdot}$
A_2	n_{21}	n_{22}	$n_{2\cdot}$
	$n_{\cdot 1}$	$n_{\cdot 2}$	

Repartiția comună a frecvențelor $\{n_{ij}\}$ este multinominală cu funcția de frecvențe

$$(67) \quad P_n(n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22}) = \frac{n!}{n_{11}! n_{12}! n_{21}! n_{22}!} p_{11}^{n_{11}} p_{12}^{n_{12}} p_{21}^{n_{21}} p_{22}^{n_{22}}.$$

Pentru a estima probabilitățile p_{ij} folosim metoda verosimilității maxime ținind seama de condiția $\sum p_{ij} = 1$. Din exemplul XIV.1, găsim

$$(68) \quad \hat{p}_{ij} = n_{ij}/n$$

estimatori care sînt nedeplasați.

Avem

$$D^2(n_{11}) = np_{11}(1 - p_{11})$$

și

$$\text{cov}(n_{11}, n_{12}) = -np_{11}p_{12}.$$

Repartiția comună a variabilelor n_{ij} este normală multidimensională avind dispersiile și covarianțele anterioare.

Ne propunem să verificăm ipoteza de independență în tabela 2×2 , ipoteză care se scrie

$$(69) \quad H_0 : p_{11}p_{22} = p_{12}p_{21}.$$

Aceasta este o ipoteză compusă, impune o legătură și are două grade de libertate. p_{21} și p_{22} pot fi exprimate ca

$$(70) \quad p_{21} = \frac{p_{11}(1 - p_{11} - p_{12})}{p_{11} + p_{12}}, \quad p_{22} = \frac{p_{12}(1 - p_{11} - p_{12})}{p_{11} + p_{12}}.$$

Dacă este adevărată ipoteza H_0 , atunci din ecuațiile

$$(71) \quad 0 = \frac{\partial \ln P}{\partial p_{11}} = \frac{n_{\cdot 1}}{p_{11}} - n_{\cdot 2} \left[\frac{1}{1 - p_{1\cdot}} + \frac{1}{p_{1\cdot}} \right] = \frac{n_{\cdot 1}}{p_{11}} - \frac{n_{2\cdot}}{p_{1\cdot}(1 - p_{1\cdot})}$$

$$(72) \quad 0 = \frac{\partial \ln P}{\partial p_{12}} = \frac{n_{\cdot 2}}{p_{12}} - \frac{n_{2\cdot}}{p_{1\cdot}(1 - p_{1\cdot})}.$$

Obținem estimatorii de verosimilitate maximă

$$(73) \quad \hat{p}_{11} = \frac{n_{1\cdot} \cdot n_{\cdot 1}}{n^2}, \quad \hat{p}_{12} = \frac{n_{1\cdot} \cdot n_{2\cdot}}{n^2}.$$

Pentru $\hat{p}_{21}$ și $\hat{p}_{22}$ obținem expresii analoage.
Urmează că

$$(74) \quad l = \left(\frac{n_{1\cdot} \cdot n_{\cdot 1}}{n \cdot n_{11}} \right)^{n_{11}} \left(\frac{n_{1\cdot} \cdot n_{2\cdot}}{n \cdot n_{12}} \right)^{n_{12}} \left(\frac{n_{2\cdot} \cdot n_{\cdot 1}}{n \cdot n_{21}} \right)^{n_{21}} \left(\frac{n_{2\cdot} \cdot n_{2\cdot}}{n \cdot n_{22}} \right)^{n_{22}}$$

sau, punînd $n_{i\cdot} \cdot n_{\cdot j} / n = e_{ij}$, (74) se scrie

$$(75) \quad l = \left(\frac{e_{11}}{n_{11}} \right)^{n_{11}} \left(\frac{e_{12}}{n_{12}} \right)^{n_{12}} \left(\frac{e_{21}}{n_{21}} \right)^{n_{21}} \left(\frac{e_{22}}{n_{22}} \right)^{n_{22}}.$$

Teorema XIV.1 ne spune că $-2 \ln l \sim \chi^2(1)$. Putem arăta acest lucru și după cum urmează. Fie

$$(76) \quad D_{ij} = n_{ij} - e_{ij}.$$

Din (75) obținem

$$(77) \quad \begin{aligned} -2 \ln l &= 2 \sum_1^2 \sum_1^2 e_{ij} \left(1 + \frac{D_{ij}}{e_{ij}} \right) \left(\frac{D_{ij}}{e_{ij}} - \frac{1}{2} \frac{D_{ij}^2}{e_{ij}^2} \right) = \\ &= D^2 \sum \sum \frac{1}{e_{ij}} \end{aligned}$$

sau ținînd seama de (76)

$$(78) \quad -2 \ln l = \sum \sum \frac{(n_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} \equiv X^2;$$

deci, în acest caz particular, testul raportului de verosimilități este asimptotic echivalent cu testul X^2 .

§ 11. Teste de independență exacte în tabele 2×2

11.1. Frecvențele marginale fixate. Testul lui Fisher

În ipoteza $p_{ij} = p_{i\cdot} p_{\cdot j}$, $1 \leq i, j \leq 2$, care în particular se scrie $p_{11} = p_{1\cdot} p_{\cdot 1}$, $p_{21} = p_{2\cdot} p_{\cdot 1}$, ipoteza de independență devine

$$(79) \quad H_0: \frac{p_{11}}{p_{1\cdot}} = \frac{p_{21}}{p_{2\cdot}}.$$

În ipoteza H_0 probabilitatea de a obține o tabelă

$$(80) \quad \begin{array}{cc|c} n_{11} & n_{12} & n_{1\cdot} \\ n_{21} & n_{22} & n_{2\cdot} \\ \hline n_{\cdot 1} & n_{\cdot 2} & n \end{array}$$

cu toate frecvențele marginale fixate este

$$(81) \quad \begin{aligned} P_I &= P(n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22} | n, n_{1\cdot}, n_{\cdot 1}) = \\ &= P(n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22} | n, n_{1\cdot}) / P(n_{1\cdot} | n) = \\ &= \frac{C_{n_{1\cdot}}^{n_{11}} C_{n_{\cdot 1}}^{n_{12}}}{C_n^{n_{1\cdot}}} = \frac{n_{1\cdot}! n_{\cdot 1}! n_{\cdot 2}! n_{2\cdot}!}{n! n_{11}! n_{12}! n_{21}! n_{22}!} \end{aligned}$$

(81) este simetrică în frecvențele $n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22}$. Deoarece toate frecvențele marginale sînt fixate, numai una dintre frecvențele n_{ij} poate varia independent; fie aceasta n_{11} . Dacă considerăm (81) ca funcția de probabilitate a variabilei n_{11} , atunci avem de-a-face cu o repartiție hipergeometrică. Prin urmare

$$(82) \quad M(n_{11}) = n_{1\cdot} n_{\cdot 1} / n$$

$$D^2(n_{11}) = n_{1\cdot} n_{\cdot 1} n_{2\cdot} n_{\cdot 2} / n^2 (n - 1)$$

și n_{11} este asimptotic repartizată normal cu acești parametri. Astfel, asimptotic

$$(83) \quad U = \frac{n_{11} - \frac{n_{1\cdot} n_{\cdot 1}}{n}}{\sqrt{\frac{n_{1\cdot} n_{\cdot 1} n_{2\cdot} n_{\cdot 2}}{n^2 (n - 1)}}} \sim N(0, 1).$$

Înlocuind $(n - 1)$ prin n , se observă că U^2 este echivalentă cu statistica X^2 definită de (78). U^2 astfel modificat se scrie

$$(84) \quad U^2 = \frac{n(n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21})^2}{n_{1\cdot} n_{\cdot 1} n_{2\cdot} n_{\cdot 2}} = X^2.$$

Putem să folosim (81) pentru evaluarea probabilității exacte a oricărei configurații de frecvențe. Dacă sumăm aceste probabilități în coada repartiției statisticii n_{11} , putem construi regiunea critică pentru un test exact. Mai precis să presupunem că dorim să aflăm dacă există sau nu o legătură semnificativă între componentele X și Y ale unui vector (X, Y) , unde $X(Y)$ poate lua numai două valori x_1 și x_2 (y_1 și y_2). În acest scop emitem ipoteza H_0 conform celor două variabile aleatoare sînt independente sau că repartiția unităților în cele 4 celule vor fi

TABELUL 2

	x_1	x_2	Total
y_1	$\frac{n_{11}n_{1.}}{n}$	$\frac{n_{12}n_{1.}}{n}$	$n_{1.}$
y_2	$\frac{n_{21}n_{2.}}{n}$	$\frac{n_{22}n_{2.}}{n}$	$n_{2.}$
Total	$n_{.1}$	$n_{.2}$	n

Pentru a vedea dacă între cele două variabile este sau nu o legătură trebuie să calculăm nu numai probabilitatea P_i dar și probabilitățile de a obține repartiții care față de cea observată, se îndepărtează mai mult de repartiția din cazul de independență.

Dacă $n_{11} < n_{1.}n_{.1}/n$, tabelele ce se îndepărtează mai mult sînt acelea care au prima celulă egală respectiv cu

$$(n_{11} - 1), (n_{11} - 2), \dots, 1, 0.$$

Dacă $n_{11} > n_{1.}n_{.1}/n$, tabelele extreme sînt acelea care au în prima celulă respectiv

$$(n_{11} + 1), (n_{11} + 2), \dots, \min [n_{.1}, n_{1.}].$$

Compararea sumelor

$$(85) \quad P(n_{11}) = \sum_0^{n_{11}} p(i) \text{ dacă } n_{11} < n_{1.}n_{.1}/n$$

$$P(n_{11}) = \sum_{n_{11}}^{\min [n_{.1}, n_{1.}]} p(i) \text{ dacă } n_{11} > n_{1.}n_{.1}/n$$

probabilităților relative tabelii observate și cu probabilitățile care se îndepărtează mai mult de repartiția în cazul independenței, comparată cu pragul de semnificație α , permite să decidem asupra concordanței sau neconcordanței valorilor de selecție cu ipoteza de independență.

Într-o asemenea comparație trebuie să ținem seama dacă ipoteza alternativă este uni sau bilaterală. În primul caz vom compara (85) cu α , în al doilea caz cu $\alpha/2$.

Observație. Trebuind să recurgem la factoriale vom lua întotdeauna în considerație celula în care apare cea mai mică frecvență observată. Aceasta este posibil, deoarece toate tabelele se alcătuiesc cu aceeași repartiție marginală și pe de altă parte fiind vorba de tabele dicotonice, au un singur grad de libertate pentru care, odată fixată valoarea pentru o celulă, automat rămân fixate și valorile pentru celelalte.

Acest test a fost propus pentru prima oară de Fisher (1922). Au fost calculate tabele pentru folosirea testului exact bazat pe statistica (81). Finney (1941) dă valorile lui n_{21} (în notația sa, b) cerute pentru respingerea ipotezei de independență pentru valorile $n_{1\cdot}$, $n_{2\cdot}$ (sau $n_{\cdot 1}$, $n_{\cdot 2}$) și n_{11} până la 15 și cozile testelor unilaterale de volum $\alpha \leq 0,05$; $0,025$; $0,01$; $0,05$, împreună cu volumul exact în fiecare caz. Latscha (1953) extinde tabelele lui Finney la $n_{1\cdot}$, $n_{2\cdot} = 20$. Armsen (1955) dă tabele pentru teste uni și bilaterale de volum $\leq 0,05$, $0,01$ și n variind până la 50. Bross și Kasten (1957) dau hărți pentru un test uni-lateral de volum $\alpha = 0,05$; $0,025$; $0,01$; $0,005$ sau teste bilaterale de volum 2α , și frecvențele marginale minime (de ex. $n_{\cdot 1}$) ≤ 50 bazate pe aproximația repartiției hipergeometrice (81) prin $C_{n_{11}}^{n_{11}} \left(\frac{n_{\cdot 1}}{n} \right)^{n_{11}} \left(\frac{n_{\cdot 2}}{n} \right)^{n_{21}}$.

11.2. O frecvență marginală fixată; omogenitate

Considerăm ipoteza în forma (79), însă cu deosebirea că $n_{1\cdot}$ și $n_{2\cdot}$ sînt fixate și n_{11} , n_{21} sînt variabile aleatoare independente astfel încît $n_{\cdot 1}$ și deci $n_{\cdot 2}$ sînt variabile aleatoare. Verificăm ipoteza (79) considerînd diferența corespunzătoare a proporțiilor

$$(86) \quad u = \frac{n_{11}}{n_{1\cdot}} - \frac{n_{21}}{n_{2\cdot}}.$$

Această variabilă este, asimptotic, repartizată normal de medie zero și dispersie

$$D^2(u) = p(1-p) \left(\frac{1}{n_{1\cdot}} - \frac{1}{n_{2\cdot}} \right),$$

unde p este valoarea ipotetică comună a cantității $\frac{p_{11}}{p_{1\cdot}}, \frac{p_{21}}{p_{2\cdot}}$.

$$\frac{n}{n-1} \left(\frac{n_{\cdot 1}}{n} \right) \left(\frac{n_{\cdot 2}}{n} \right),$$

este un estimator nedeplasat pentru $p(1-p)$, astfel încît

$$\hat{D}^2(u) = \frac{n_{\cdot 1} n_{\cdot 2}}{n(n-1)} \left(\frac{1}{n_{1\cdot}} + \frac{1}{n_{2\cdot}} \right) = \frac{n_{\cdot 1} n_{\cdot 2}}{(n-1)n_{1\cdot} n_{2\cdot}}.$$

este un estimator pentru $D^2(u)$.

Urmează că, asimptotic

$$(87) \quad \frac{u - M(u)}{\hat{D}(u)} = \frac{\frac{n_{11}}{n_{1\cdot}} - \frac{n_{21}}{n_{2\cdot}}}{\left(\frac{n_{\cdot 1} n_{\cdot 2}}{(n-1) n_{1\cdot} n_{2\cdot}} \right)^{1/2}} \sim N(0,1)$$

și această statistică este identică cu (83), ceea ce arată că în selecții de volum mare testele din 11.1 și 11.2 sînt identice.

Pentru selecții mici testul este diferit. În ipoteza (79), avem

$$(88) \quad \begin{aligned} P_{II} &= P(n_{11} | p, n_{1\cdot}) P(n_{21} | p, n_{2\cdot}) = \\ &= C_{n_{1\cdot}}^{n_{11}} p^{n_{11}} (1-p)^{n_{1\cdot}-n_{11}} C_{n_{2\cdot}}^{n_{21}} p^{n_{21}} (1-p)^{n_{2\cdot}-n_{21}}, \end{aligned}$$

adică P_I multiplicat prin factorul binomial

$$C_n^{n_{\cdot 1}} p^{n_{\cdot 1}} (1-p)^{n-n_{\cdot 1}}$$

(81) și (88) depind de un parametru necunoscut și nu pot fi evaluate.

Bennett și Hsu (1960) dau hărți ale funcției de putere folosind tablele Finney-Latscha.

Patnaik (1948) dă aproximații pentru selecții mari.

11.3. Nici o frecvență marginală fixată

Presupunem că n este fixat, însă nici una dintre frecvențele marginale nu este fixată. În acest caz ipoteza (79) este o ipoteză de independență bidimensională. Vom determina un test pentru selecții mari. În acest caz funcția de frecvențe exactă a statisticii n_{11} este

$$(89) \quad P_{III} = P(n_{11} | n_{1\cdot}, n_{\cdot 1}, n) P(n_{\cdot 1} | p, n) P(n_{1\cdot} | p', n),$$

unde p' este valoarea ipotetică comună pentru $p_{11}/p_{\cdot 1}$, $p_{12}/p_{\cdot 2}$. Primii doi factori din membrul drept al relației (89) sînt echivalenți cu (88) și al treilea este

$$(90) \quad P(n_{1\cdot} | p', n) = C_n^{n_{1\cdot}} (p')^{n_{1\cdot}} (1-p')^{n-n_{1\cdot}}.$$

Astfel (89) depinde de doi parametri (p , p') necunoscuți și nu poate fi evaluată.

§ 12. Test optim exact pentru tabele 2×2

TEOREMA 10 (Tocher (1950)). *Testul exact bazat pe probabilitățile (81) dă teste U.C.M.P. nedeplasate pentru situațiile din 11.2 și 11.3.*

Demonstrație. (88), funcția de frecvență a statisticii n_{11} , în ipoteza H_0 , conține un singur parametru p , valoarea ipotetică comună a cantităților $p_{11}/p_{1\cdot}$, $p_{21}/p_{2\cdot}$. Dacă este adevărată ipoteza H_0 , estimatorul

$$\hat{p} = \frac{n_{11} + n_{21}}{n_{1\cdot} + n_{2\cdot}} = \frac{n_{1\cdot}}{n}$$

este suficient pentru p și de asemenea și o statistică completă. Repartiția sa este exponențială. Astfel, testele uni și bilaterale pentru verificarea ipotezei H_0 , bazate pe repartiția condiționată a statisticii n_{11} , dat $n_{1\cdot}$, sînt U.C.M.P. nedeplasate.

Similar în 11.3, în (89) avem doi parametri (p, p') pentru care $\left(\frac{n_{1\cdot}}{n}, \frac{n_{1\cdot}}{n}\right)$, în ipoteza H_0 , este suficientă și completă. Astfel testele uni și bilaterale pentru verificarea ipotezei H_0 , bazate pe repartiția condiționată a statisticii $n_{1\cdot}$ date $(n_{1\cdot}, n_{1\cdot})$ sînt U.C.M.P. nedeplasate.

§ 13. Testul lui Mc. Nemar

Cîte odată prezintă interes să știm dacă repartiția unui anumit fenomen suferă variații semnificative atunci cînd însuși fenomenul este supus acțiunii unui anumit factor.

În aceste cazuri, experiența poate fi programată prevăzînd pentru fiecare unitate a selecției două probe: una înainte ca factorul să-și manifeste acțiunea, cealaltă după.

Testul lui Mc. Nemar (1947) ne permite să determinăm dacă variațiile survenite într-un asemenea caz sînt semnificative.

Fie X o variabilă aleatoare asociată unui anumit fenomen care poate lua numai valorile x_1 și x_2 , valori pe care le vom numi și modalități. În urma unei selecții de volum N asupra variabilei X s-au obținut A variabile de selecție cu modalitatea x_1 și $B = N - A$ variabile de selecție cu modalitatea x_2 . Presupunem că am supus variabila aleatoare X acțiunii unui anumit factor care poate să aducă variabilelor de selecție o schimbare de modalitate, în sensul că variabilele de selecție cu modalitatea x_1 pot căpăta modalitatea x_2 și invers. După aceasta dacă luăm în considerare aceleași N variabile vom găsi că A' variabile de selecție mai au încă modalitatea x_1 și $a = A - A'$ au căpătat modalitatea x_2 și prin analogie că B' variabile de selecție mai posedă încă modalitatea x_2 în timp ce $b = B - B'$ au căpătat modalitatea x_1 .

Aceste rezultate pot fi sintetizate în tabelul 3, în care în prima și în a patra celulă apar unitățile care și-au schimbat modalitatea.

TABELUL 3

		Prima probă		Total
		x_1	x_2	
A II-a probă	x_2	$a = A - A'$	B'	$A - A' + B'$
	x_1	A'	$b = B - B'$	$A' + B - B'$
Total		A	B	N

După Mc. Nemar, dacă factorul nu exercită nici o acțiune cele $(a + b)$ variabile de selecție care și-au schimbat modalitatea, trebuie să se repartizeze probabil, jumătate într-un sens și jumătate în celălalt sens, sau $(a + b)/2$ ar trebui să treacă de la modalitatea x_1 la modalitatea x_2 și $(a + b)/2$ să treacă de la x_2 la x_1 .

Pentru a ști dacă variabilele de selecție $(a + b)$ sînt în concordanță cu ipoteza emisă, Mc. Nemar folosește statistica

$$(91) \quad X^2 = \frac{[a - (a + b)/2]^2 + [b - (a + b)/2]^2}{(a + b)/2} = \frac{(a - b)^2}{a + b}.$$

Valoarea X^2 dată de (91) poate fi considerată ca determinarea unei variabile gama cu un grad de libertate astfel încît avem o concordanță [neconcordanță] a rezultatelor cu ipoteza emisă dacă

$$X^2 < \chi^2_{1-\alpha}(1) [X^2 > \chi^2_{1-\alpha}(1)].$$

§ 14. Corecția de continuitate

14.1. Introducere

Presupunem că X este numărul de succese în m probe Bernoulliene cu probabilitatea succesului p (constantă). Cînd j este un întreg, Laplace (1820) demonstrează un rezultat care este echivalent cu aproximația

$$(92) \quad P(X \leq j) \simeq \Phi\left(\frac{j - pm}{\sqrt{mpq}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{mpq}} \varphi\left(\frac{j - pm}{\sqrt{mpq}}\right), \quad q = 1 - p$$

(92) se mai poate folosi în forma

$$(93) \quad P(X < j) \simeq \Phi\left(\frac{j + \frac{1}{2} - mp}{\sqrt{mpq}}\right).$$

Uspensky (1937) făcînd o analiză riguroasă a acestei aproximații ajunge la concluzia că valoarea absolută a erorii rezultate din folosirea formulei (92) este cel mult

$$(0,20 + 0,25|p - q|) / (mpq) + \exp \left[-\frac{3}{2} (mpq)^{1/2} \right]$$

dacă $mpq \geq 25$.

Feller (1957) arată că, dacă $m \rightarrow \infty$, $j \rightarrow \infty$ astfel încît $(j - mp)^3 / (mpq)^2 \rightarrow 0$, atunci (93) este asimptotic adevărată.

DEFINIȚIA 3. (Yates (1934)). Adunarea la valoarea j , în argumentul funcției Φ a cantității $1/2$ poartă numele de corecția pentru continuitate.

Această nomenclatură a fost acceptată deoarece este folosită o funcție continuă pentru a aproxima o funcție în scară și $\Phi \left[\left(j + \frac{1}{2} - mp \right) / \sqrt{mpq} \right]$ este o aproximație mai bună pentru $P(X \leq j)$ decît valoarea $\Phi[(j - mp) / \sqrt{mpq}]$, la care se poate ajunge prin aplicarea teoremei limite centrale.

O aproximație similară cu cea dată de (92) și (93) este posibilă pentru funcția de repartiție a oricărei variabile aleatoare cu valori întregi dacă condițiile în care probabilitățile individuale pot fi simultan înlocuite prin ordonatele corespunzătoare ale densității normale, există. Astfel o aproximație a repartiției hipergeometrice a fost sugerată de Yates (1934) în legătură cu analiza tabelelor de contingență 2×2 pentru care toate frecvențele marginale pot fi privite ca fixe și aceasta a condus la testul X^2 corectat pentru continuitate. Corecția de continuitate cere ca (84) să aibă forma

$$(94) \quad X_c^2 = \frac{n \left[|n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21}| - \frac{1}{2}n \right]^2}{n_{1.}n_{.1}n_{.2}n_{2.}}$$

ceea ce revine la mărirea frecvențelor n_{12} și n_{21} prin $\frac{1}{2}$ (dacă $n_{11}n_{22} > n_{12}n_{21}$) și la micșorarea frecvențelor n_{11} și n_{22} prin $\frac{1}{2}$ și face probabilitățile obținute din repartiția χ^2 , în ipoteza nulă, mai apropiate de probabilitățile calculate în presupunerea că datele au fost generate de o selecție asupra unei repartiții hipergeometrice, sau cu alte cuvinte în presupunerea că toate frecvențele marginale au fost fixate înaintea selecției.

14.2. Aproximația lui Plackett (1964) și aplicarea sa la studiul performanței corecției de continuitate în tabele 2×2

Plackett găsește aproximații pentru repartiția statisticii folosite pentru compararea a două proporții observate cînd avem la dispoziție selecții asupra unor variabile binomiale independente, cu același para-

metru. Astfel consideră două șiruri de probe Bernoulliene, în fiecare probabilitatea succesului fiind $p = 1 - q$. Primul șir constă în m probe și s-au observat X succese; al doilea șir constă în n probe și s-au observat Y succese, Plackett consideră statistica

$$(95) \quad U = \frac{X/m - Y/n}{\left[\frac{X+Y}{m+n} \left(1 - \frac{X+Y}{m+n} \right) \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) \right]^{1/2}}$$

și demonstrează

TEOREMA 11. Are loc aproximația

$$(96) \quad P(U < u) \simeq \Phi(u) + \frac{M(u)}{\sqrt{mnpq/(m+n)}} \varphi(u),$$

unde

$$(97) \quad M(u) = \sum_i \theta \left\{ \frac{u \{mn(m+n)pq\}^{1/2}}{m+n} \left(1 + \frac{\{t - (m+n)p\}(q-p)}{2(m+n)pq} \right) + \frac{mt}{m+n} \right\} \times \\ \times \frac{1}{\sqrt{(m+n)pq}} \varphi \left(\frac{t - (m+n)p}{\sqrt{(m+n)pq}} \right),$$

$\theta(x)$ fiind funcția periodică $[x] + \frac{1}{2} - x$.

În scopul aplicării acestui rezultat la studiul performanței corecției de continuitate în tabele 2×2 , Plackett presupune că X și Y sînt variabile aleatoare independente, $X \sim \text{Bi}(m, p)$ și $Y \sim \text{Bi}(n, p)$. Atunci funcția de repartiție a variabilei X este $\Phi \left\{ \left([x] + \frac{1}{2} - mp \right) / \sqrt{mpq} \right\}$ cu eroarea $O(mpq)^{-1}$, adică la același ordin de aproximație

$$(98) \quad P(X < x) \simeq \Phi \left(\frac{x - mp}{\sqrt{mpq}} \right) + \frac{\theta(x)}{\sqrt{mpq}} \varphi \left(\frac{x - mp}{\sqrt{mpq}} \right).$$

Deoarece întotdeauna se cere valoarea funcției de repartiție în valoarea întreagă j a lui x , $\theta(j) = \frac{1}{2}$ și (98) se reduce la (92).

Analiza tabelor 2×2 este adeseori bazată pe repartiția variabilei X condiționată de o valoare a variabilei $X + Y$. Dacă r este o valoare fixată, atunci X are o repartiție hipergeometrică cu

$$M(X) = rm/(m+n)$$

$$D^2(X) = mnrs/[(m+n)^2(m+n-1)]$$

unde $s = m + n - r$.

În acest caz este posibil obținerea unei formule analoage formulei (92) pentru $P(X \leq j)$. Această formulă a fost comparată de Yates (1934) și Pearson (1947) cu funcția de repartiție exactă și a fost găsită că dă rezultate satisfăcătoare. Întimplător repartiția statisticii U are media zero și abaterea medie pătratică $[(m+n)/(m+n-1)]^{1/2}$ cu condiția că această este adevărată și pentru repartiția lui U condiționată de $X + Y = 0$ sau $m + n$. Diferența abaterii medii pătratice de la 1 este $0(m+n)^{-1}$, care este aceeași cu ordinul de mărime al erorii în analiza noastră.

Ne propunem să verificăm ipoteza H_a conform căreia probabilitatea succesului este aceeași în două șiruri de probe care dau X și respectiv Y succese. Dacă pragul de semnificație ales este α , atunci testul U.C.M.P. nedepășat pentru verificarea ipotezei H_a este bazat pe repartiția variabilei X condiționate de $X + Y$, fapt enunțat pentru prima oară de Fisher (1934) și independent de Irwin (1935). Urmează că pragul de semnificație α este atins (teorema XIII.21, lema XIII.6, teorema 10).

Aceleași concluzii se aplică când analizăm frecvențele într-o tabelă 2×2 în scopul verificării ipotezei H_b conform căreia cele două clasificări sint independente. Pearson și Hartley (1958) remarcă că în fiecare caz pragul de semnificație actual va fi considerabil mai coborât decât valoarea sa nominală.

Pentru verificarea ipotezei H_a sau H_b cu ajutorul tabelelor cu funcția lui Laplace și a unui prag de semnificație convențional, în general se alege unul dintre criteriile.

Prima posibilitate se bazează pe statistica U a cărei funcție de repartiție este dată de (96) și (97). Folosirea relației (92) este restrinsă la j întreg, însă u nu este în general un întreg, astfel încît limite de forma

$$(99) \quad |P(U \leq u) - \Phi(u)| \leq \varphi(u)/\{2 \sqrt{[mnpq/(m+n)]}\}$$

dau numai o informație asupra funcției de repartiție a variabilei U . Deoarece abaterea $P(U \leq u)$ de la $\Phi(u)$ poate varia în orice direcție, urmează că singura formulă generală pentru funcția de repartiție a variabilei U , la acest ordin de aproximație este dată de

$$(100) \quad P(U \leq u) \simeq \Phi(u).$$

A doua posibilitate este bazată pe statistica test

$$(101) \quad V = \frac{\left(\frac{X}{m} - \frac{Y}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}{\left[\frac{X+Y}{m+n} \left(1 - \frac{X+Y}{m+n}\right) \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\right]^{1/2}}$$

și

$$(102) \quad P(V \leq v) \simeq \Phi(v) + \frac{\varphi(v)}{\sqrt{2 mnpq/(m+n)}} + \frac{M(v) \varphi(v)}{\sqrt{mnpq/(m+n)}}.$$

Pentru un test unilateral vom respinge H_a cînd $v > u_{1-\frac{\alpha}{2}}$. Dacă $M(v) \ll \frac{1}{2}$ rezultatul încorporării termenului $-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right)$ în numărătorul statisticii V reduce pragul de semnificație la

$$(103) \quad \frac{1}{2} \alpha_0 = \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{2} \varphi(u_{1-\frac{\alpha}{2}}) / \sqrt{mnpq/(m+n)}.$$

Prin urmare pentru un test bilateral reducerea totală este

$$\varphi(u_{1-\frac{\alpha}{2}}) / \sqrt{mnpq/(m+n)}.$$

Să presupunem că frecvențele într-o tabelă 2×2 sînt rezultatul unei selecții asupra unei variabile multinomiale și că s-au obținut rezultatele

X	$M - X$	M
Y	$N - Y$	N
$X + Y$	$M + N - (X + Y)$	c fix

În ipoteza H_b : cele două clasificări sînt independente, probabilitățile corespunzătoare celulelor X , Y , $M - X$, $N - Y$ sînt pp' , pq' , qp' respectiv qq' , unde $p' + q' = 1$. Statistica test este

$$(104) \quad U = \frac{(X/M - Y/N)}{\left[\frac{X+Y}{M+N} \left(1 - \frac{X+Y}{M+N} \right) \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N} \right) \right]^{1/2}}$$

și

$$(105) \quad P(U \leq u) = \sum_n P(U \leq u | M = m, N = n) C_c^m(p')^m(q')^n.$$

Se obține

$$(106) \quad |P(U \leq u) - \Phi(u)| \leq \frac{1}{2} (cpqp'q')^{-\frac{1}{2}} \varphi(u),$$

astfel încît concluziile obținute în legătură cu ipoteza H_a rămîn adevărate dacă pentru verificarea ipotezei H_b folosim fie statistica U fie statistica V . Considerăm o repartiție probabilistică definită de:

$$P(X = j) \equiv a_j = \frac{m-1}{m} C_m^j p^j q^{m-j}, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

$$P\left(X = j + \frac{1}{2}\right) \equiv b_j = \frac{1}{m} C_m^j p^j q^{m-j}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Când $m \rightarrow \infty$, șirul de probabilități $\{a_j\}$ este bine aproximat de densitatea normală, în timp ce șirul $\{b_j\}$ devine neglijabil. Prin urmare funcția de repartiție, la ordinul $O(mpq)^{-1/2}$ este dată de

$$P(X \leq j) \simeq \Phi\left(\frac{j + \frac{1}{2} - mp}{\sqrt{mpq}}\right).$$

Grizzle (1967) bazat pe un studiu de simulare confirmă concluziile obținute de Plackett.

14.3. Corecția de continuitate obținută prin standardizarea statisticilor prin estimatori consistenți ai dispersiei

Fie P_D o repartiție discretă care este funcție de un parametru θ . Ne propunem să verificăm ipoteza

$H_0: \theta = 0$ față de ipoteza alternativă $H_A: \theta \neq 0$.

Fie U un estimator nedeplasat și suficient pentru θ sau pentru un multiplu de θ , care ia valori egal depărtate $a + ib$, unde i ia valori întregi. Regiunea critică se obține alegând cea mai mare valoare r astfel încât, dacă este adevărată, ipoteza H_0 ,

$$(107) \quad P_D(|U| \geq r) \leq \alpha.$$

În numeroase cazuri este necesar, sau convenabil, să aproximăm repartiția discretă a statisticii U cu o repartiție continuă, cel mai frecvent cu repartiția normală (ținând seama de teorema limită centrală).

Cox (1970) include corecția de continuitate

$$(108) \quad 1 - \alpha \leq P_D(-r \leq U \leq r) = P_D(-r + b \leq U \leq r - b) \simeq$$

$$\simeq \int_{-r + \frac{1}{2}b}^{r - \frac{1}{2}b} d\Phi(x, \sigma).$$

Pirie, Hamdan (1972) standardizează statistica U folosind un estimator consistent pentru σ^2 (de exemplu estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\sigma}^2$), (108) fiind echivalentă cu

$$(109) \quad 1 - \alpha \leq P_D\left(\frac{|U|}{\hat{\sigma}} < \frac{r}{\hat{\sigma}}\right) \simeq$$

$$\simeq \int_{(-r + \frac{1}{2}b)/\hat{\sigma}}^{(r - \frac{1}{2}b)/\hat{\sigma}} \varphi(t) dt,$$

ceea ce conduce la a alege r astfel încît

$$(110) \quad \left(r - \frac{1}{2}b\right) / \hat{\sigma} = z_{1-\alpha/2}.$$

Astfel respingem ipoteza H_0 dacă

$$|U| \geq r$$

sau, după (110), dacă

$$\frac{|U| - \frac{1}{2}b}{\hat{\sigma}} \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

Prin urmare statistica cu corecția de continuitate este (Pirie, Hamdan (1972))

$$(111) \quad \left(|U| - \frac{1}{2}b\right) / \hat{\sigma}.$$

Observație. Cum $\hat{\sigma}^2$ este un estimator consistent pentru σ^2 asimptotic, (111) este corectă. În celelalte situații s-ar părea că este mai util să se folosească o anumită repartiție condiționată (Cox (1970)).

Aplicăm corecția de continuitate la ipoteza de independență.

Ipoteza de independență este

$$H_0 : p_{11}p_{22} = p_{12}p_{21}$$

cu ipoteza alternativă

$$H_1 : p_{11}p_{22} \neq p_{12}p_{21}.$$

Avem

$$\theta = p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}$$

și un estimator nedeplasat pentru parametrul θ este

$$[n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21}]/n(n-1).$$

Considerăm statistica

$$(112) \quad U = n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21}.$$

Media și dispersia statisticii U pot fi găsite din $(p_{11} + p_{12} + p_{21} + p_{22})^n$.

Avem

$$(113) \quad M(U) = n(n-1)(p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21})$$

$$(114) \quad M(n_{11}n_{22}n_{12}n_{21}) = n(n-1)(n-2)(n-3)p_{11}p_{22}p_{12}p_{21}$$

$$(115) \quad \begin{aligned} M(n_{11}^2 n_{22}^2) &= n(n-1)(n-2)(n-3)p_{11}^2 p_{22}^2 + \\ &+ n(n-1)(n-2)p_{11}p_{22}(p_{11} + p_{22}) + \\ &+ n(n-1)p_{11}p_{22}. \end{aligned}$$

Urmează că

$$(116) \quad M(U) = 0,$$

$$(117) \quad D^2(U) = n^2(n-1)p_{11}p_{22}.$$

Dacă este adevărată ipoteza H_0 , estimatorii de verosimilitate maximă ai parametrilor p_{11} și p_{12} sînt

$$\hat{p}_{11} = n_{\cdot 1} n_{1 \cdot} / n^2, \quad \hat{p}_{22} = n_{\cdot 2} n_{2 \cdot} / n^2$$

astfel încît

$$\hat{\sigma}^2 = n^2(n-1)\hat{p}_{11}\hat{p}_{22} = (n-1)n_{\cdot 1}n_{1 \cdot}n_{\cdot 2}n_{2 \cdot}/n^2.$$

Deoarece în cazul statisticii U , $b=1$, statistica U cu corecția de continuitate este $\left[|U| - \frac{1}{2}\right] / \hat{\sigma}$, sau

$$X_c^{*2} = \frac{n^2 \left\{ |n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21}| - \frac{1}{2} \right\}^2}{(n-1)n_{\cdot 1}n_{1 \cdot}n_{\cdot 2}n_{2 \cdot}}$$

sau, pentru valori mari ale lui n

$$(118) \quad X_c^{*2} = \frac{n \left\{ |n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21}| - \frac{1}{2} \right\}^2}{n_{\cdot 1}n_{1 \cdot}n_{\cdot 2}n_{2 \cdot}}.$$

Observații. i) Statistica X_c^{*2} are aceeași formă de bază ca și X_c^2 cu excepția corecției de continuitate care este redusă de la $\frac{1}{2}n$ la $\frac{1}{2}$.

ii) Cu excepția cazului $U=0$, cînd statisticile X_c^2 , X_c^{*2} și X^2 sînt egale cu zero (Mantel, Greenhouse (1968)), are loc relația

$$X_c^2 < X_c^{*2} < X^2.$$

Astfel cele trei regiuni critice, praguri de semnificație sau puteri vor satisface aceeași relație.

iii) Diferența dintre X^2 și X_c^{*2} este mică, ultima avînd tendința să reducă pragul de semnificație nominal al testului X^2 (Grizzle (1967)). Statistica (91) corectată este

$$(119) \quad X_c^2 = \frac{(|a - b| - 1)^2}{a + b}.$$

Bennett, Underwood (1970) sugerează statistica

$$(120) \quad X_c^2 = (a - b)^2 / (a + b + 1).$$

Folosind metoda propusă de Pirie, Hamdan (1972) găsim :

$$(121) \quad X_c^{*2} = \frac{\left(|a - b| - \frac{1}{2}\right)^2}{a + b}.$$

Au loc inegalitățile $X_c^2 < X_c^{*2} < X^2$.

§ 15. Tabele $r \times c$. Teste de independență

Considerăm o tabelă $r \times c$ de forma

$$(122) \quad \begin{array}{cccc|c} n_{11} & n_{12} & \dots & n_{1c} & n_{1\cdot} \\ n_{21} & n_{22} & \dots & n_{2c} & n_{2\cdot} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \\ n_{r1} & n_{r2} & \dots & n_{rc} & n_{r\cdot} \\ \hline n_{\cdot 1} & n_{\cdot 2} & \dots & n_{\cdot c} & n \end{array}$$

Dacă în (122) două variabile sînt independente, atunci frecvența din linia i și coloana j este

$$n_{i\cdot} n_{\cdot j} / n.$$

Prin urmare abaterea de la independență în celula (i, j) este măsurată de

$$(123) \quad D_{ij} = n_{ij} - n_{i\cdot} n_{\cdot j} / n.$$

DEFINIȚIA 4. Pătratul de contingență este coeficientul de asociație definit de

$$(124) \quad X^2 = \sum_{i,j} \frac{D_{ij}^2}{n_{i\cdot} n_{\cdot j} / n} = \sum \frac{(n_{ij} - n_{i\cdot} n_{\cdot j} / n)^2}{n_{i\cdot} n_{\cdot j} / n} = n \left\{ \sum_{i,j} \frac{n_{ij}^2}{n_{i\cdot} n_{\cdot j}} - 1 \right\} = X_{RC}^2.$$

TEOREMĂ 11. (Roy, Mitra (1956)). În ipoteza de independență, X^2 este repartizat, asimptotic, $\chi^2[(rc - 1) - (r - 1) - (c - 1)] = \chi^2((r - 1)(c - 1))$.

Deci gradele de libertate sînt date de numărul de celule minus unu, minus numărul parametrilor estimați.

Parametrii estimați au fost $p_{i.}(p_{.j})$, probabilitatea ca un individ să aparțină liniei i (coloanei j). Cum

$$\sum_1^r p_{i.} = \sum_1^c p_{.j} = 1$$

numai $(r - 1)(c - 1)$ parametri $p_{i.}(p_{.j})$ au fost estimați.
În ipoteza de independență

$$p_{ij} = p_{i.} p_{.j} \text{ pentru toți } i, j$$

probabilitatea frecvențelor observate n_{ij} este

$$\begin{aligned} P_n\{n_{ij} | p_{ij}\} &= \frac{n!}{\prod_{i,j} n_{ij}!} \prod_{i,j} (p_{ij})^{n_{ij}} = \frac{n!}{\prod_{i,j} n_{ij}!} \prod_i p_{i.}^{n_{i.}} \prod_{i,j} \left(\frac{p_{ij}}{p_{i.}}\right)^{n_{ij}} = \\ (125) \quad &= \frac{n! \prod_i p_{i.}^{n_{i.}}}{\prod_i n_{i.}!} \cdot \frac{n! \prod_j p_{.j}^{n_{.j}}}{\prod_j n_{.j}!} \cdot \frac{\prod_i n_{i.}! \prod_j n_{.j}!}{n! \prod_{i,j} n_{ij}!} \end{aligned}$$

Membrul stîng al relației (125) și fiecare dintre cei trei factori din membrul drept poate fi aproximat prin variabile repartizate χ^2 . Punînd

$$n_{ij} = np_{ij} + e_{ij}$$

și folosind seria Stirling, găsim că membrul stîng al relației (125) este asimptotic.

$$\ln P_n\{n_{ij} | p_{ij}\} = \text{const} - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \{e_{ij}^2 / (np_{ij})\}.$$

Astfel

$$(126) \quad X_T^2 = \sum_{i,j} \frac{(n_{ij} - np_{i.}p_{.j})^2}{np_{i.}p_{.j}}$$

este repartizat asimptotic ca o sumă de rc pătrate de variabile $N(0, 1)$ supusă la o singură legătură lineară și anume

$$\sum_{i,j} n_{ij} = n.$$

Prin urmare are loc

TEOREMA 12. *Asimptotic statistică* $X_T^2 \sim \chi^2(rc - 1)$.

Analog, obținem teoremele

TEOREMA 13. *Asimptotic statistica*

$$(127) \quad X_R^2 = \sum_i \frac{(n_{i\cdot} - np_{i\cdot})^2}{np_{i\cdot}} \sim \chi^2(r - 1).$$

TEOREMA 14. *Asimptotic statistica*

$$(128) \quad X_C^2 = \sum_j \frac{(n_{\cdot j} - np_{\cdot j})^2}{np_{\cdot j}} \sim \chi^2(c - 1).$$

Prin urmare asimptotic avem următoarea partiție

$$(129) \quad X_T^2 = X_R^2 + X_C^2 + X_{RC}^2$$

fapt ce reflectă factorizarea (125). Suma gradelor de libertate din membrul drept al egalității (129) este egală cu gradele de libertate ale membrului stâng al aceleiași relații, adică

$$(130) \quad (r - 1) + (c - 1) + (r - 1)(c - 1) = rc - 1.$$

Lancaster (1949) dă o metodă pentru partiția lui X^2 pentru o tabelă $r \times c$ în $(r - 1)(c - 1)$ componente fiecare avînd un singur grad de libertate. Fiecare grad de libertate corespunde la un X^2 pentru o clasificare particulară într-o tabelă 2×2 .

Exemplul 1. Tabela 2×3

n_{11}	n_{12}	n_{13}	$n_{1\cdot}$
n_{21}	n_{22}	n_{23}	$n_{2\cdot}$
$n_{\cdot 1}$	$n_{\cdot 2}$	$n_{\cdot 3}$	n

pentru care X^2 are 2 grade de libertate, are tabelele componente 2×2 :

$$(131) \quad \begin{array}{c|c|c} n_{11} & n_{12} & n_{11} + n_{12} \\ n_{21} & n_{22} & n_{21} + n_{22} \\ \hline n_{\cdot 1} & n_{\cdot 2} & n_{\cdot 1} + n_{\cdot 2} \end{array} \quad \text{și} \quad \begin{array}{c|c|c} (n_{11} + n_{12}) & n_{13} & n_{1\cdot} \\ (n_{21} + n_{22}) & n_{23} & n_{2\cdot} \\ \hline (n_{\cdot 1} + n_{\cdot 2}) & n_{\cdot 3} & n \end{array}$$

Dacă X^2 este calculat pentru fiecare dintre aceste tabele, atunci suma lor va fi aproximativ X^2 calculat pentru tabela 2×3 inițială.

Exemplul 2. Tabela 3×3 , cu 4 grade de libertate, are 4 tabele componente 2×2 :

n_{11}	n_{12}	$n_{11} + n_{12}$
n_{21}	n_{22}	$n_{21} + n_{22}$
$n_{11} + n_{21}$	$n_{12} + n_{22}$	$n_{11} + n_{12} + n_{21} + n_{22}$
$(n_{11} + n_{12})$	n_{12}	$n_{1\cdot}$
$(n_{21} + n_{22})$	n_{23}	$n_{2\cdot}$
$(n_{11} + n_{12} + n_{21} + n_{22})$	$(n_{13} + n_{23})$	$n_{1\cdot} + n_{2\cdot}$
$(n_{11} + n_{21})$	$(n_{12} + n_{22})$	$(n_{11} + n_{12} + n_{21} + n_{22})$
n_{31}	n_{32}	$(n_{31} + n_{32})$
$n_{\cdot 1}$	$n_{\cdot 2}$	$n_{\cdot 1} + n_{\cdot 2}$
$(n_{11} + n_{12} + n_{21} + n_{22})$	$(n_{13} + n_{23})$	$n_{1\cdot} + n_{2\cdot}$
$(n_{31} + n_{32})$	n_{23}	$n_{3\cdot}$
$(n_{\cdot 1} + n_{\cdot 2})$	$n_{\cdot 3}$	n

Observație. Deoarece, în general, liniile și coloanele pot fi permutate, partiția nu este unică. Componentele sînt aditive numai asimptotic.

Lancaster (1949, 1950) și Irwin (1949) dă o metodă de partiție a lui X^2 în exact $(r-1)(c-1)$ componente corespunzătoare la tabela 2×2 .

§ 16. Teste de omogenitate. Tabele $2 \times c$

16.1. Testul de dispersie binomial

Un caz particular de interes al tabelii $r \times c$ este tabela $2 \times c$, în care caz se compară c selecții pentru a se vedea dacă elementele lor posedă sau nu un anumit atribut. În acest caz (124) se reduce la

$$(132) \quad X^2 = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^c \frac{(n_{ij} - n_{i\cdot} n_{\cdot j}/n)^2}{n_{i\cdot} n_{\cdot j}/n}.$$

Dacă notăm prin $\hat{p} = n_{1\cdot}/n$ estimatorul de maximă verosimilitate al probabilității de observare a unui succes, adică o intrare în prima linie a tabelii, atunci (132) se scrie

$$(133) \quad X^2 = \sum_{j=1}^c \left\{ \frac{(n_{1j} - n_{\cdot j} \hat{p})^2}{n_{\cdot j} \hat{p}} + \frac{[(n_{2j} - n_{1j}) - n_{\cdot j}(1 - \hat{p})]^2}{n_{\cdot j}(1 - \hat{p})} \right\} = \sum_{j=1}^c \frac{(n_{1j} - n_{\cdot j} \hat{p})^2}{n_{\cdot j} \hat{p}(1 - \hat{p})}.$$

Asimptotic, $(133) \sim \chi^2(c-1)$.

Testul de omogenitate a c selecții binomiale bazat pe (133) este astfel bazat pe suma pătratelor a c variabile aleatoare binomiale reduse independente, media și dispersia fiind estimate în ipoteza de omogenitate. X^2 dat de (133) are $c - 1$ grade de libertate.

Armitage (1955) dă o descriere a acestor teste.

16.2. Testul de dispersie al repartiției Poisson

Să presupunem că în statistica (133)

$$n_{.j} \rightarrow \infty, p \rightarrow 0 \text{ astfel încît } n_{.j}p = \lambda.$$

Astfel avem c observații independente asupra unei variabile Poisson (în speță n_{1j}). Statistica (133) cu $\hat{p}$ înlocuit prin p se reduce la

$$(134) \quad X^2 = \sum_{j=1}^c \frac{(n_{1j} - \lambda)^2}{\lambda}$$

care asimptotic este o variabilă $\chi^2(c)$. Dacă λ este necunoscut trebuie să-l estimăm. $\bar{n}_1 = n_{1.}/c$, media celor c observații, este un estimator nedepășat, suficient și complet pentru λ .

Astfel

$$(135) \quad X^2 = \sum_{j=1}^c \frac{(n_{1j} - \bar{n}_1)^2}{\bar{n}_1} \sim \chi^2(c - 1)$$

deoarece am estimat parametrul λ . (135) servește la verificarea omogenității a c frecvențe Poisson.

Observații. i) Numele de test de dispersie (dat de Fisher) se datorește faptului că fiecare dintre statisticile (133) sau (135) este suma unui număr de c termeni, fiecare termen fiind raportul dintre pătratul abaterii variabilei de la estimatia mediei și o estimatie a dispersiei. În cazul statisticii (135), media și dispersia repartiției Poisson sînt egale, astfel încît $\bar{n}_1$ le estimează pe amîndouă.

ii) Cochran (1954) dă o bibliografie pentru testul de dispersie binomial și testul de dispersie al repartiției Poisson.

§ 17. Tabele de contingență $I \times J \times K$

17.1. Definiții

Într-o tabelă $I \times J \times K$ elementele unei selecții de volum n sînt clasificate în concordanță cu trei criterii A, B, C cu nivelele $\{A_i\}, \{B_j\}, \{C_k\}$ ($i = 1, 2, \dots, I; j = 1, 2, \dots, J; k = 1, 2, \dots, K$). Fie

$$p_{ijk} = P(A_i \cap B_j \cap C_k), \text{ unde } \sum_{i,j,k} p_{ijk} = 1$$

$$p_{i..} = \sum_k p_{ijk}, p_{.j.} = \sum_i p_{ijk}, p_{.jk} = \sum_i p_{ijk}, p_{i..} = \sum_{j,k} p_{ijk},$$

$$p_{.j.} = \sum_{i,k} p_{ijk}, p_{..k} = \sum_{i,j} p_{ijk}.$$

Fie n_{ijk} numărul de elemente ale selecției de volum n avînd clasificarea $A_i \cap B_j \cap C_k$. Astfel

$$\sum_{i,j,k} n_{ijk} = n.$$

Fie

$$\begin{aligned} n_{i.} &= \sum_k n_{ijk}, \quad n_{i.k} = \sum_j n_{ijk}, \quad n_{.jk} = \sum_i n_{ijk}, \quad n_{i..} = \sum_{j,k} n_{ijk} \\ n_{.j.} &= \sum_{i,k} n_{ijk}, \quad n_{..k} = \sum_{i,j} n_{ijk}. \end{aligned}$$

DEFINIȚIA 5. (Goodman (1969)). Factorul de interacțiune în tabele $I \times J \times K$ (adică interacțiunea de ordinul doi) este definită ca zero cînd

$$(1) \quad \theta_{ijk} = \ln\{(p_{ijk}p_{IJK})/(p_{Ijk}p_{iJk})\} = \theta_{ij} \quad \text{pentru } k = 1, 2, \dots, K$$

adică, cînd θ_{ijk} nu depinde de k . Presupunînd că condiția (1) este satisfăcută, asociația parțială între criteriile A și B este definită ca zero cînd

$$(2) \quad \theta_{ij} = 0 \quad \text{pentru } i = 1, 2, \dots, I-1, \quad j = 1, 2, \dots, J-1.$$

Dacă atît (1) cît și (2) sînt satisfăcute, criteriile A și B condiționate de un nivel al criteriului C sînt independente, adică

$$(3) \quad p_{ijk} = p_{i.k}p_{.jk}/p_{..k}.$$

Criteriile A și C sînt independente marginal cînd

$$(4) \quad p_{i.k} = p_{i..}p_{..k} \quad \text{pentru } i = 1, 2, \dots, I, \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

Criteriile B și C sînt independente marginal cînd

$$(5) \quad p_{.jk} = p_{.j.}p_{..k} \quad \text{pentru } j = 1, 2, \dots, J; \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

Criteriile A , B și C sînt independente dacă sînt satisfăcute relațiile (3), (4) și (5), adică

$$(6) \quad p_{ijk} = p_{i..}p_{.j.}p_{..k}, \quad \text{pentru } i = 1, 2, \dots, I; \quad j = 1, 2, \dots, J; \\ k = 1, 2, \dots, K.$$

Fie H_t ipoteza conform căreia condiția (t) este satisfăcută $t = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Pentru verificarea ipotezei H_t folosim testul raportului de verosimilități. Găsim

$$(136) \quad X_t^2 = 2 \sum_{i,j,k} n_{ijk} \ln[n_{ijk}/f_{ijk}^{(t)}]$$

unde $f_{ijk}^{(t)}$ este estimatorul de verosimilitate maximă, în ipoteza H_t , a $M(n_{ijk})$.

De exemplu,

$$(137) \quad -f_{ijk}^{(6)} = n_{i..} n_{.j.} n_{...k} / n^2$$

și X_6^2 este un χ^2 cu

$$IJK - 1 - (I + J + K - 3) = IJK - I - J - K + 2$$

grade de libertate

$$(138) \quad -f_{ijk}^{(3)} = n_{i..} n_{.jk} / n_{...k},$$

și X_3^2 are $(I-1)(J-1)K$ grade de libertate.

18.2. Descompunerea statisticii X_3^2

Arătăm cum se descompune statistica X_3^2 în două componente aditive pentru verificarea ipotezelor H_1 și H_2 . Cele $(I-1)(J-1)K$ grade de libertate ale statisticii X_3^2 vor fi descompuse în $(I-1)(J-1) \times (K-1)$ și $(I-1)(J-1)$ grade de libertate corespunzătoare ipotezelor H_1 și respectiv H_2 .

Mai întâi considerăm ipoteza H_1 . S-au propus diferite metode pentru a calcula $f_{ijk}^{(1)}$. Folosim pentru calcularea estimăției $f_{ijk}^{(1)}$ următoarea metodă iterativă (Brown (1959), Good (1963), Mosteller (1968), Bishop (1969)).

Pentru primul pas, fie

$$(139) \quad f_{ijk}(0) = 1.$$

Pentru primul ciclu

$$(140) \quad \begin{cases} f_{ijk}^*(1) = f_{ijk}(0) n_{ij.} / \sum_k f_{ijk}(0), \\ f_{ijk}(2) = f_{ijk}(1) n_{i..} / \sum_j f_{ijk}(1), \\ f_{ijk}(3) = f_{ijk}(2) n_{.jk} / \sum_i f_{ijk}(2). \end{cases}$$

Pentru al doilea ciclu

$$(141) \quad \begin{cases} f_{ijk}(4) = f_{ijk}(3) n_{ij.} / \sum_k f_{ijk}(3), \\ f_{ijk}(5) = f_{ijk}(4) n_{i..} / \sum_j f_{ijk}(4), \\ f_{ijk}(6) = f_{ijk}(5) n_{.jk} / \sum_i f_{ijk}(5). \end{cases}$$

Acest proces se continuă pînă cînd se obține gradul de acuratețe dorit.

^{*}) $f_{ijk}(s) = f_{ijk}^{(1)}(s)$

TEOREMA 15. (Darroch (1962)). Cu $f_{ijk}^{(1)}$ obținuți prin acest procedeu iterativ, statistica X_1^2 dată de (136) are asimptotic, sub H_1 , o repartiție $\chi^2[(I-1)(J-1)(K-1)]$.

Presupunind că H_1 este adevărată, ipoteza nulă H_2 este adevărată dacă și numai dacă este adevărată H_3 . Astfel, un test pentru verificarea ipotezei H_3 în cadrul ipotezei H_1 poate servi ca test pentru H_2 când se presupune că H_1 este adevărată. Statistica X^2 pentru verificarea ipotezei H_3 în cadrul ipotezei H_1 , obținută cu ajutorul testului raportului de verosimilități este

$$(142) \quad X^2 = 2 \sum_{i,j,k} n_{ijk} \ln(f_{ijk}^{(1)}/f_{ijk}^{(3)}),$$

unde $f_{ijk}^{(3)}$ este dată de (138).

TEOREMA 16. (Goodman (1969)). Dacă este adevărată ipoteza H_1 , statistica X^2 dată de (142) are asimptotic, sub H_2 , o repartiție χ^2 cu

$$(I-1)(J-1)K - (I-1)(J-1)(K-1) = (I-1)(J-1)$$

grad de libertate.

(140) poate fi folosită pentru verificarea ipotezei H_2 .

Statistica X_3^2 dată de (136) [cu $f_{ijk}^{(3)}$ dat de (138)] este suma dintre X_1^2 dat (136) [cu $f_{ijk}^{(1)}$ calculați anterior] și X^2 dat de (142). Astfel am descompus X_3^2 pentru verificarea ipotezei H_3 în componente aditive pentru verificarea ipotezelor H_1 și H_2 . Astfel componenta pentru verificarea ipotezei H_2 [adică X^2 dat de (142)] poate fi calculat prin scăderea din X_3^2 pentru verificarea ipotezei H_3 a componentei pentru verificarea ipotezei H_1 [adică X_1^2 dat de (136)].

18.3. Descompunerea statisticii X_6^2

Considerăm X_6^2 dată de (136) [cu $f_{ijk}^{(6)}$ dată de (137)]. Deoarece

$$(143) \quad f_{ijk}^{(6)} = f_{ijk}^{(3)} \{ (n_{i..} n_{..k}) / (n n_{i.k}) \} \{ (n_{.j.} n_{..k}) / (n_{.jk} n) \},$$

urmează că

$$(144) \quad X_6^2 = X_3^2 + X_4^2 + X_5^2$$

unde

$$(145) \quad X_4^2 = 2 \sum_{i,k} n_{i.k} \ln \{ n_{i.k} / (n_{i..} n_{..k} / n) \} \text{ și}$$

$$(146) \quad X_5^2 = 2 \sum_{j,k} n_{.jk} \ln \{ n_{.jk} / (n_{.j.} n_{..k} / n) \}.$$

Astfel, cu descompunerea statisticii X_3^2 obținută în 18.2, am descompus X_6^2 în componente aditive pentru verificarea ipotezelor H_1 , H_2 , H_4 și H_5 . Cele $IJK - I - J - K + 2$ grade de libertate pentru H_6 au fost descompuse în $(I-1)(J-1)(K-1)$, $(I-1)(J-1)$, $(I-1)(K-1)$ și $(J-1)(K-1)$ grade de libertate pentru H_1 , H_2 , H_4 și respectiv H_5 . Descompunerea obținută pentru X_6^2 este sintetizată în tabelul 4.

TABELUL 4
(Goodmann (1969))

Componenta	X^2	Grade de libertate
Factorul de interacțiune în tabela $I \times J \times K$	X_1^2 dată de (136)	$(I-1)(J-1)(K-1)$
Asociația parțială dintre A și B	X^2 dată de (142)	$(I-1)(J-1)$
Asociația marginală dintre A și C	X_4^2 dată de (145)	$(I-1)(K-1)$
Asociația marginală dintre B și C	X_5^2 dată de (146)	$(J-1)(K-1)$
Asociația mutuală printre A, B, C	X_6^2 dată de (136)	$JK - I - J - K + 2$

Avem

$$X_1^2 + X^2 = X_3^2.$$

Similar, deoarece

$$(147) \quad f_{ijk}^{(3)} \{ (n_{i..} n_{..k}) / (n n_{i.k}) \} = (n_{i..} n_{.jk}) / n,$$

$X_3^2 + X_4^2$ poate fi scrisă ca

$$(148) \quad X_7^2 = 2 \sum_{i,j,k} n_{ijk} \ln [n_{ijk} / \{ (n_{i..} n_{.jk}) / n \}],$$

care este statistica X^2 dată de (136) pentru verificarea ipotezei nule H_7 conform căreia criteriul A este independent de criteriul $B \cap C$. Statistica X_7^2 are $(I-1)(JK-1)$ grade de libertate.

$X_3^2 + X_5^2 = X_8^2$ poate fi scrisă ca X^2 dat de (136) pentru verificarea ipotezei nule H_8 conform căreia criteriul B este independent de $A \cap C$. Statistica X_8^2 are $(J-1)(IK-1)$ grade de libertate.

Observații. i) din (147)–(148) găsim că X_4^2 dată de (145) este egală cu statistica pe care se bazează testul raportului de verosimilități pentru verificarea ipotezei H_7 în cadrul ipotezei H_3 .

ii) Din (144) și (148) găsim că X_5^2 dată de (146) este egală cu statistica pe care se bazează testul raportului de verosimilități pentru verificarea ipotezei H_6 în cadrul ipotezei H_7 .

iii) X_5^2 este egală cu statistica pe care se bazează testul raportului de verosimilități pentru verificarea ipotezei H_8 în cadrul ipotezei H_3 .

iv) X_4^2 este egală cu statistica pe care se bazează testul raportului de verosimilități pentru verificarea ipotezei H_6 în cadrul ipotezei H_8 .

v) Valoarea numerică a statisticii X^2 dată de (142) nu se schimbă când se înlocuiesc frecvențele n_{ijk} prin $f_{ijk}^{(1)}$ corespunzătoare, ceea ce ne permite să interpretăm X^2 dată de (142) ca statistică pentru verificarea ipotezei H_3 aplicată la o tabelă $I \times J \times K$ formată din $f_{ijk}^{(1)}$ (decît din n_{ijk}) cu o reducere corespunzătoare a gradelor de libertate datorită înlocuirii frecvențelor n_{ijk} prin $f_{ijk}^{(1)}$. Similar statistica X_4^2 dată de (145) poate fi interpretată ca :

a) statistica X^2 folosită pentru verificarea ipotezei H_7 aplicată la o tabelă $I \times J \times K$ formată cu $f_{ijk}^{(3)}$ date de (138), sau

b) statistica X^2 folosită pentru verificarea ipotezei H_6 aplicată la o tabelă $I \times J \times K$ formată cu $f_{ijk}^{(8)}$, cu o reducere corespunzătoare a gradelor de libertate.

Capitolul XVI

TESTE PRIVIND PARAMETRII REPARTIȚIEI NORMALE

§ 1. Statistici independente de o statistică suficientă

Pentru familiile exponențiale

$$(1) \quad dP_{\theta, \vartheta}(x) = c(\theta, \vartheta) \exp [\theta U(x) + \sum \vartheta_i T_i(x)] d\mu(x)$$

teorema XIII.21 dă o expresie generală a testelor U.C.M.P. nedeplasate pentru verificarea ipotezelor

$$H_1: \theta < \theta_0 \text{ și } H_4: \theta = \theta_0,$$

$$H_2: \theta < \theta_1 \text{ sau } \theta \geq \theta_2 \text{ și } H_3: \theta_1 \leq \theta < \theta_2.$$

Deoarece această teoremă se aplică cu dificultate în cazul repartiției normale, apărind teste condiționate în termeni de U dat t , s-au căutat teste care să fie exprimate în termeni de o singură statistică test. Are loc

TEOREMA 1. (Lehmann (1959)). *Presupunem că repartiția variabilei X este dată de (1) și că statistica $V = h(U, T)$ este independentă de T când $\theta = \theta_0$.*

Dacă funcția h este crescătoare în u pentru fiecare t , atunci ϕ_1 dat de

$$(2) \quad \phi_1(v) = \begin{cases} 1, & v > C_0 \\ \gamma_0, & v = C_0 \\ 0, & v < C_0 \end{cases}$$

unde C_0 și γ_0 nu depind de t și sînt determinate de

$$(3) \quad M_{\theta_0}[\phi_1(V)] = \alpha$$

este U.C.M.P. nedeplasat pentru verificarea ipotezei H_1 .

Dacă funcția h este lineară în U , adică

$$h(u, t) = a(t)u + b(t) \text{ cu } a(t) > 0$$

atunci ϕ_4 dat de

$$(4) \quad \phi_4(v) = \begin{cases} 1, & v < C_1 \text{ sau } v > C_2 \\ \gamma_i, & v = C_i, \quad i = 1, 2 \\ 0, & C_1 < v < C_2 \end{cases}$$

unde C_1, C_2 și γ_1, γ_2 sînt determinate din

$$(5) \quad M_{\theta_0}[\phi_4(V)] = \alpha$$

și

$$(6) \quad M_{\theta_0}[V \phi_4(V)] = \alpha M_{\theta_0}(V)$$

este U.C.M.P. nedepasat pentru verificarea ipotezei H_4 .

Dacă V este monotonă în U pentru fiecare t fixat și independentă de T cînd $\theta = \theta_1$ și $\theta = \theta_2$, testul ϕ_3 dat de (4) cu C_1, C_2 și γ_1, γ_2 determinați de

$$(7) \quad M_{\theta_1}[\phi_3(V)] = M_{\theta_2}[\phi_3(V)] = \alpha$$

este U.C.M.P. nedepasat pentru ϕ_3 .

Demonstrație. Testul pentru verificarea ipotezei H_1 definit de (XIII.92) și (XIII.93) este echivalent cu (2), cu constantele determinate de

$$P_{\theta_0}\{V > C_0(t)|t\} + \gamma_0(t) P_{\theta_0}\{V = C_0(t)|t\} = \alpha.$$

Prin ipoteză, V este independentă de T cînd $\theta = \theta_0$ și prin urmare C_0 și γ_0 nu depind de t . Aceasta demonstrează teorema pentru H_1 . În mod analog se arată pentru H_2 și H_3 .

Testul pentru verificarea ipotezei H_4 dat de XIII. § 4.5 este echivalent cu testul definit de (4) cu constantele C_1, C_2 și γ_1, γ_2 determinate de

$$M_{\theta_0}[\phi_4(V, t)|t] = \alpha$$

și

$$M_{\theta_0} \left[\phi_4(V, t) \frac{V - b(t)}{a(t)} | t \right] = \alpha M_{\theta_0} \left[\frac{V - b(t)}{a(t)} | t \right],$$

care se reduce la

$$M_{\theta_0}[V \phi_4(V, t)|t] = \alpha M_{\theta_0}[V|t_0].$$

Deoarece pentru $\theta = \theta_0$, V este independentă de t , C_1, C_2 și γ_1, γ_2 sînt de asemenea independente de t . Teorema este demonstrată.

Pentru a putea aplica teorema 1 trebuie să dovedim independența statisticilor V și T . Aceasta se poate face fie cu ajutorul funcției caracteristice, fie cu metoda geometrică, fie prin transformări de variabile. O altă metodă, care este folosită în determinarea unei statistici V , este dată în

TEOREMA 2. (Basu (1955)). Fie $\mathfrak{E} = \{P_{\vartheta}, \vartheta \in \omega\}$ mulțimea repartițiilor posibile ale variabilei X și T suficientă pentru $\mathfrak{E}$. Dacă familia $\mathfrak{E}^T$ a repartițiilor statisticii T este mărginită complet, atunci statistica V este independentă de T pentru toți ϑ dacă și numai dacă repartiția statisticii V nu depinde de ϑ .

Demonstrație. Repartiția statisticii V nu depinde de ϑ dacă și numai dacă pentru fiecare funcție critică ϕ , $M_0[\phi(X)]$ este independentă de ϑ . Din teorema XIII.20 condiția necesară și suficientă pentru aceasta este ca $M[\phi(V)|t]$ să fie constantă a.p.t. în raport cu $\mathfrak{E}^T$ și aceasta la rândul ei este echivalentă cu independența lui V și T .

COROLARUL 1. Fie $\mathfrak{E}$ familia exponențială obținută din (1) pentru o valoare fixată a lui θ . Statistica V este independentă de T pentru toți ϑ dacă și numai dacă repartiția statisticii V nu depinde de ϑ .

Demonstrație. $\mathfrak{E}^T$ este completă (teorema VIII.4) și deci mărginită complet și deci este aplicabilă teorema 2.

Exemplul 1. Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ o selecție asupra unei variabile $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

i) μ are valoarea fixă μ_0 .

Se aplică corolarul 1 cu $T = \sum (X_i - \mu_0)^2$ și $\vartheta = -1/2\sigma^2$.

Fie f orice funcție astfel încît

$f(cx_1, \dots, cx_n) = f(x_1, \dots, x_n)$ pentru toți $c > 0$, și fie

$$V = f(X_1 - \mu_0, \dots, X_n - \mu_0).$$

Atunci V este invariantă dacă fiecare $X_i - \mu_0$ este înlocuit prin $(X_i - \mu_0)/\sigma$ și deoarece aceste variabile sînt repartizate $N(0, 1)$, repartiția statisticii V nu depinde de σ . Urmează că toate statisticile V și deci de exemplu

$$(\bar{X} - \mu_0)/\sqrt{\sum (X_i - \bar{X})^2} \text{ și } (\bar{X} - \mu_0)/\sqrt{\sum (X_i - \mu_0)^2}$$

sînt independente de $\{\sum (X_i - \mu_0)^2\}$. Acest rezultat nu are loc pentru toți μ ci numai cînd $\mu = \mu_0$.

ii) σ^2 are valoarea fixă σ_0^2 .

Se aplică corolarul 1 cu $T = \bar{X}_n$ și ϑ proporțional cu μ . Fie f orice funcție astfel încît

$f(x_1 + c, \dots, x_n + c) = f(x_1, \dots, x_n)$ pentru toți c reali.

Dacă

$$V = f(X_1, \dots, X_n)$$

atunci de asemenea $V = f(X_1 - \mu, \dots, X_n - \mu)$. Deoarece $(X_i - \mu) \sim N(0, \sigma_0^2)$ care nu depinde de μ , repartiția statisticii V nu depinde de μ . Din corolarul 1 urmează că orice astfel de statistică V și în particular $V = \sum (X_i - \bar{X}_n)^2$ este independentă de $\bar{X}_n$. Acest rezultat este adevărat pentru toți σ^2 .

§ 2. Teste unilaterale și bilaterale privind media populației normale de dispersie cunoscută

Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ o selecție asupra variabilei aleatoare $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 necunoscută. Funcția de verosimilitate este

$$(8) \quad P = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^n \exp \left(-\frac{n\mu^2}{2\sigma^2} \right) \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum x_i^2 + \frac{\mu}{\sigma^2} \sum x_i \right).$$

Ne propunem să verificăm ipotezele

$$\mu \leq \mu_0 \text{ față de } \mu > \mu_0$$

și

$$\mu = \mu_0 \text{ față de } \mu \neq \mu_0.$$

Nu avem nici o micșorare a generalității dacă presupunem $\mu_0 = 0$. (8) constituie o familie exponențială cu doi parametri, care coincide cu (1) pentru

$$\theta = n\mu/\sigma^2, \quad \vartheta = -1/2\sigma^2, \quad U(x) = \bar{x}_n, \quad T(x) = \sum x_i^2.$$

Teorema XIII.21 arată că pentru verificarea ipotezelor $\theta \leq 0$ și $\theta = 0$ care sînt echivalente cu

$$\mu \leq 0 \text{ și } \mu = 0$$

există teste U.C.M.P. nedeplasate.

Deoarece, cînd $\mu = 0$

$$V = \bar{X}_n / \sqrt{\sum (X_i - \bar{X}_n)^2} = U / \sqrt{T - nU^2}$$

este independentă de $T = \sum X_i^2$ (Exemplul 1), din teorema 1 urmează că regiunea critică a testului U.C.M.P. nedeplasat pentru verificarea ipotezei

$$H: \mu \leq 0$$

este

$$V \geq C'_0$$

sau, echivalent,

$$(9) \quad t(x) \geq C_0$$

unde

$$(10) \quad t(x) = \frac{\sqrt{n} \bar{x}_n}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2}} = \frac{\sqrt{n} \bar{x}_n}{s} \sim t(n-1)$$

și C_0 este determinată din

$$(11) \quad \int_{C_0}^{\infty} g_{n-1}(u) du = \alpha.$$

Deci

$$(12) \quad C_0 = t_{1-\alpha}(n-1).$$

Pentru a aplica teorema 1 pentru verificarea ipotezei

$$H' : \mu = 0$$

considerăm statistica $W = \bar{X}_n / \sqrt{\sum \bar{X}_i^2}$. Această statistică este independentă de $\sum \bar{X}_i^2$, când $\mu = 0$, și în plus este lineară în $U = \bar{X}_n$. Repartiția statisticii W este simetrică față de 0 când $\mu = 0$ și prin urmare condițiile (4), (5), (6), cu W în locul statisticii V sînt satisfăcute pentru regiunea critică

$$|w| \geq c'$$

cu

$$P_{\mu=0}\{|W| \geq c'\} = \alpha.$$

Deoarece

$$t(x) = \frac{\sqrt{(n-1)n} W(x)}{\sqrt{1 - n W^2(x)}}$$

valoarea absolută a statisticii $t(x)$ este o funcție crescătoare de $|W(x)|$, și regiunea critică este echivalentă cu

$$(13) \quad |t(x)| \geq c$$

unde c este determinată din

$$(14) \quad \int_c^{\infty} g_{n-1}(u) du = \frac{\alpha}{2}.$$

Deci

$$(15) \quad c = t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1).$$

Pentru $\mu \neq 0$, $t(X)$ are o repartiție t necentrată și prin urmare puterea testelor menționate depinde numai de parametrul de necentricitate $\delta = \sqrt{n}\mu/\sigma$.

Dacă μ_1 reprezintă orice valoare alternativă valorii $\mu = 0$, puterea $\pi(\mu, \sigma) = f(\delta)$ depinde de σ . Când $\sigma \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$ și

$$\pi(\mu_1, \sigma) \rightarrow f(0) = \pi(0, \sigma) = \alpha,$$

deoarece f este continuă. Prin urmare probabilitatea de a detecta o ipoteză falsă când $\mu \geq \mu_1 > 0$ nu poate fi $\geq \pi > \alpha$ pentru toți σ . Acest fapt nu este surprinzător deoarece pentru σ suficient de mare, repartițiile $N(0, \sigma^2)$ și $N(\mu, \sigma^2)$ practic, nu se mai pot distinge.

Testele pentru verificarea ipotezelor mai generale

$$\mu \leq \mu_0 \text{ și } \mu = \mu_0$$

se reduc la cele discutate anterior prin considerarea variabilelor $X_i - \mu_0$. Regiunile de respingere pentru verificarea acestor ipoteze sînt date ca și mai înainte de (9) și (13), însă cu

$$t(x) = \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)}{s}.$$

§ 3. Teste privind diferența mediilor a două populații normale cu dispersii egale

Fie $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_1}$ [$X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n_2}$] o selecție asupra unei variabile aleatoare X_1 [X_2] $\sim N(\mu_1, \sigma^2)$ [$N(\mu_2, \sigma^2)$], X_1 și X_2 fiind variabile independente.

Funcția de verosimilitate este

$$(16) \quad c(\mu_1, \mu_2, \sigma) \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum x_{1i}^2 + \sum x_{2j}^2 \right) + \right. \\ \left. + \frac{\mu_1}{\sigma^2} \sum x_{1i} + \frac{\mu_2}{\sigma^2} \sum x_{2j} \right],$$

și reprezintă o familie exponențială cu parametrii

$$\theta = \mu_2/\sigma^2, \quad \vartheta_1 = \mu_1/\sigma^2, \quad \vartheta_2 = -1/2\sigma^2.$$

Statisticile suficiente sînt

$$U = \sum X_{2j}, \quad T_1 = \sum X_{1i}, \quad T_2 = \sum X_{1i}^2 + \sum X_{2j}^2.$$

Pentru verificarea ipotezelor

$$H: \mu_2 - \mu_1 \leq 0 \text{ și } H': \mu_2 - \mu_1 = 0$$

este mai convenabil să reprezentăm densitățile ca o familie exponențială cu parametrii

$$\theta^* = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sigma^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}, \quad \vartheta_1^* = \frac{n_1\mu_1 + n_2\mu_2}{(n_1 + n_2)\sigma^2}, \quad \vartheta_2^* = \vartheta_2.$$

În acest caz statisticile suficiente sînt

$$U^* = \bar{X}_2 - \bar{X}_1, \quad T_1^* = n_1\bar{X}_1 + n_2\bar{X}_2, \quad T_2^* = \sum \bar{X}_{1i}^2 + \sum \bar{X}_{2j}^2.$$

Acest lucru este posibil, după cum rezultă din identitatea

$$n_1\mu_1\bar{x}_1 + n_2\mu_2\bar{x}_2 = \frac{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)(\mu_2 - \mu_1)}{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} + \frac{(n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2)(n_1\mu_1 + n_2\mu_2)}{n_1 + n_2}.$$

Din teorema XIII.21 urmează că pentru verificarea ipotezelor

$$\theta^* \leq 0 \text{ și } \theta^* = 0$$

și deci pentru ipotezele H și H' , există teste U.C.M.P. nedeplasate.
Cînd $\mu_1 = \mu_2$, repartitia statisticii

$$V = \frac{\bar{X}_2 - \bar{X}_1}{\sqrt{\sum(X_{1i} - \bar{X}_1)^2 + \sum(X_{2j} - \bar{X}_2)^2}} =$$

$$= \frac{U^*}{\sqrt{T_2^* - \frac{1}{n_1 + n_2} T_1^{*2} - \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} U^{*2}}}$$

nu depinde de media comună μ_1 sau de σ (se observă aceasta înlocuind în V : X_{1i} prin $(X_{1i} - \mu_1)/\sigma$ și X_{2j} prin $(X_{2j} - \mu_1)/\sigma$) și V este independentă de (T_1^*, T_2^*) . Regiunea de respingere a testului U.C.M.P. nedeplasat pentru verificarea ipotezei

$$H: \mu_2 - \mu_1 \leq 0$$

poate fi scrisă ca $V \geq c'_0$ sau

$$(17) \quad t(X_1, X_2) \geq c_0,$$

unde

$$(18) \quad t(X_1, X_2) = \frac{(\bar{X}_2 - \bar{X}_1) / \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}{\sqrt{[\sum(X_{1i} - \bar{X}_1)^2 + \sum(X_{2j} - \bar{X}_2)^2] / (n_1 + n_2 - 2)}}$$

$$t(X_1, X_2) \sim t(n_1 + n_2 - 2), \quad \delta = (\mu_2 - \mu_1) / \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \sigma.$$

În cazul particular $\mu_2 - \mu_1 = 0$, $t(X_1, X_2) \sim t(n_1 + n_2 - 2)$ și constanta c_0 este determinată din

$$(19) \quad \int_{c_0}^{\infty} g_{n_1+n_2-2}(u) du = \alpha.$$

Deci

$$(20) \quad c_0 = t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2).$$

Pentru verificarea ipotezei H' , V nu satisface presupunerile cerute de teorema 1, însă funcția W de V dată de

$$W = \frac{\bar{X}_2 - \bar{X}_1}{\sqrt{\sum X_{1i}^2 + \sum X_{2j}^2 - \frac{(\sum X_{1i} + \sum X_{2j})^2}{n_1 + n_2}}}$$

și legată de V prin

$$V = \frac{W}{\sqrt{1 - \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} W^2}}$$

satisface aceste presupuneri.

Deoarece W este funcție de V , este de asemenea independentă de (T_1^*, T_2^*) când $\mu_2 = \mu_1$; în plus este o funcție lineară de U^* cu coeficienții depinzând numai de T^* . Când $\mu_2 = \mu_1$ repartiția statisticii W este simetrică față de zero; urmează ca în determinarea regiunii critice (13) din cazul unei singure selecții, că testul U.C.M.P. nedeplasat respinge ipoteza H' când W are valori mari, sau echivalent când

$$(21) \quad |t(X_1, X_2)| > c.$$

Constanta c este determinată din

$$(22) \quad \int_c^\infty g_{n_1+n_2-2}(u) du = \frac{\alpha}{2}.$$

Deci

$$(23) \quad c = t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2).$$

Puterea testelor având regiunile critice (17) și (21) depind numai de $(\mu_2 - \mu_1)/\sigma$ și este exprimată în funcție de repartiția t necentrată.

Observație. Testele bazate pe statistica (18) sînt insensibile la depărtarea de normalitate.

§ 4. Testul lui Tukey pentru egalitatea mediilor

4.1. Definirea testului

Fie $(X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$ $1 \leq i \leq k$, k selecții de volum n asupra variabilelor independente $X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$ și s^2 o estimatie nedeplasată pentru σ^2 bazată pe r grade de libertate.

Pentru a verifica ipoteza

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k,$$

procedăm după cum urmează : Se observă că ipoteza H_0 este echivalentă cu mulțimea tuturor ipotezelor

$$H_{ij}^0 : \mu_i = \mu_j (i \neq j, 1 \leq i, j \leq k),$$

și că pentru oricare două valori medii, ipoteza $\mu_i = \mu_j$ poate fi verificată folosind o statistică repartizată $t(r)$.

Ipoteza $\mu_i = \mu_j$ este acceptată dacă

$$(24) \quad |\bar{x}_i - \bar{x}_j| \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(r)s \sqrt{\frac{2}{n}}, \quad \bar{x}_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}/n.$$

Deoarece H_0 este echivalentă cu mulțimea ipotezelor $H_{ij}^0 (i \neq j, 1 \leq i, j \leq k)$, obținem testul pentru H_0 luând intersecția tuturor celor C_k^2 regiuni de acceptare și acceptăm H_0 dacă

$$(25) \quad \sup_{i \neq j, 1 \leq i, j \leq k} \left\{ |\bar{x}_i - \bar{x}_j| / s \sqrt{\frac{2}{n}} \right\} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(r)$$

sau, dacă

$$(25') \quad q = \frac{\bar{x}_{\max} - \bar{x}_{\min}}{s \sqrt{\frac{2}{n}}} \leq Q$$

unde Q este cuantila de ordinul $1 - \alpha$ a amplitudinii studentizate cu r grade de libertate. Acesta este testul q a lui Tukey.

4.2. Puterea testului

Plecînd de la această definiție a testului q , probabilitatea erorii de ordinul doi este

$$(26) \quad \begin{aligned} \beta &= P \left\{ \frac{\bar{x}_{\max} - \bar{x}_{\min}}{s \sqrt{\frac{2}{n}}} \leq Q \right\} \\ &= P \left\{ \frac{y_{\max} - y_{\min}}{s'} \leq Q \sqrt{2} \right\}, \end{aligned}$$

unde $y_i = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \bar{x}_i$, $1 \leq i \leq k$ și $s' = \frac{s}{\sigma}$.

Conform corolarului III.3 variabilele aleatoare y_i și s'^2 sînt independente. $y_i \sim N(\mu'_i = \sqrt{n} \mu_i / \sigma, 1)$, $1 \leq i \leq k$, iar $s'^2 \sim \chi^2(r)/r$.

Deoarece testul este invariant la transformări de poziție, obținem :

$$\beta = \sum_{i=1}^{k-1} \int_0^\infty p_1(s) \int_{-\infty}^\infty p(z) \int_{z-\eta_i}^{z-\eta_i+Q's} p(t) dt \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k-1} \int_{z-\eta_i+\eta_j}^{z-\eta_i+\eta_j+Q's} p(t) dt dz ds +$$

$$(27) \quad + \int_0^\infty p_1(s) \int_{-\infty}^\infty p(z) \prod_{j=1}^{k-1} \int_{z+\eta_j}^{z+\eta_j+Q's} p(t) dt dz ds,$$

unde

$$Q' = Q\sqrt{2}$$

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

$$p_1(s) = cs^{r-1} e^{-rs^2/2}$$

$$\eta_{i-1} = \mu'_1 - \mu'_i, \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Din (27) urmează că puterea testului $\pi = 1 - \beta$ este simetric în η (deoarece β este simetrică în η).

LEMA 1. Dacă sînt îndeplinite condițiile

a) în domeniul $D = \{(x_1, \dots, x_k) : a_i \leq x_i \leq b_i, 1 \leq i \leq k\}$ funcția $f(x_1, \dots, x_k)$ se bucură de proprietățile : toate derivatele parțiale de ordinul unu și doi există, toate derivatele parțiale de ordinul unu se anulează numai într-un punct $P(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{k0})$ din interiorul lui D .

b) matricea derivatelor parțiale de ordinul doi în punctul P este negativ definită.

c) în orice punct $(x_1, \dots, x_k)$ de pe frontiera lui D , $f(x_1, \dots, x_k) < A$, unde $A = f(x_{10}, \dots, x_{k0})$, atunci pentru toți $x \in D$, $x \neq P$

$$f(x_1, \dots, x_k) < A.$$

Demonstrație. Deoarece domeniul D este închis și funcția este continuă, $\max f(x_1, \dots, x_k) = B$ există. Presupunem că $B \geq A$ și că pentru

$$(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) \neq (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{k0}), f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) = B.$$

Din condiția c), $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$ nu este pe frontieră. Din condiția a), cel puțin o derivată parțială nu este nulă în $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$; să presupunem că aceea în raport cu x_1 . În plus să considerăm că este pozitivă, adică

$$\left. \frac{\partial f(x_1, \dots, x_k)}{\partial x_1} \right|_{x=x^*} > 0.$$

Atunci pentru δ suficient de mic,

$$f(x_1^* + \delta, x_2^*, \dots, x_k^*) > f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) = B,$$

ceea ce contrazice ipoteza.

LEMA 2. Dacă sînt îndeplinite condițiile lemei 1 cînd $a_i \rightarrow \infty$ sau $b_i \rightarrow \infty$ pentru orice i și pentru valori fixate $a_j, b_j (j \neq i, i, j = 1, 2, \dots, k)$, atunci $f(x_1, \dots, x_k) < A$ pentru toți $x \in D'$, unde

$$D' = \{x; -\infty < x_i < \infty, i = 1, \dots, k\}, x \neq P.$$

TEOREMA 3. (Ramachandran (1956)). Testul amplitudinei studentizate a lui Tukey este nedeplasat.

Demonstrație. Avem :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta}{\partial \eta_1} = & \int_0^\infty p_1(s) \int_{-\infty}^\infty [p(z) p(z + \eta_1 + Q's) - \\ & - p(z + \eta_1) p(z + Q's)] \prod_{j=2}^{k-1} \int_{z+\eta_j}^{z+\eta_j+Q's} p(t) dt dz ds + \\ & + \sum_{i=2}^{k-1} \int_{-\infty}^\infty p_1(s) \int_{-\infty}^\infty [p(z + \eta_i) p(z + \eta_1 + Q's) - \\ & - p(z + \eta_1) p(z + \eta_i + Q's)] \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^{k-1} \int_{z+\eta_j}^{z+\eta_j+Q's} p(t) dt \int_z^{z+Q's} p(t) dt dz ds, \end{aligned}$$

de unde rezultă că $\frac{\partial \beta}{\partial \eta_1}$ va fi negativ dacă $\eta_1 > 0$ și $\eta_1 > \eta_i (i = 2, 3, \dots, k-1)$ și pozitivă dacă $\eta_1 < 0$ și

$$\eta_1 < \eta_i (i = 1, 2, \dots, k-1).$$

Deoarece β este simetric în variabilele η , același lucru este adevărat și pentru $\partial \beta / \partial \eta_i (i = 2, 3, \dots, k-1)$; adică

$$\frac{\partial \beta}{\partial \eta_i} < 0 \text{ dacă } \eta_i > 0 \text{ și } \eta_i = \eta_{\max}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \eta_i} > 0 \text{ dacă } \eta_i < 0 \text{ și } \eta_i = \eta_{\min}.$$

Dacă $\eta = 0$, ne arată că $\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_{k-1} = 0$, atunci

$$\left. \frac{\partial \beta}{\partial \eta_1} \right|_{\eta=0} = 0$$

și

$$\left. \frac{\partial \beta}{\partial \eta_i} \right|_{\eta=0} (i = 2, 3, \dots, k-1).$$

Să presupunem că $\eta^0 \neq 0$. Atunci $\eta_{\max}^0 > 0$ sau $\eta_{\min}^0 < 0$. Deci primele derivate parțiale pot să se anuleze simultan numai în $(0, 0, \dots, 0)$. Se observă că

$$\left. \frac{\partial^2 \beta}{\partial \eta_i^2} \right|_{\eta=0} = -(k-1) Q'c(Q')$$

unde

$$c(Q') = \int_0^\infty s p_1(s) \int_{-\infty}^\infty \exp - \left[\frac{z^2}{2} + \frac{1}{2} (z + Q's)^2 \right] \left[\int_z^{z+Q's} \exp \left(-\frac{t^2}{2} \right) dt \right]^{k-2} ds dz > 0.$$

Deci

$$\left. \frac{\partial^2 \beta}{\partial \eta_i^2} \right|_{\eta=0} < 0 \quad i = 1, 2, \dots, k-1.$$

De asemenea

$$\left. \frac{\partial^2 \beta}{\partial \eta_i \partial \eta_j} \right|_{\eta=0} = Q' c(Q') > 0 \quad (i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, k-1).$$

Prin urmare, atunci cînd $\eta = 0$, matricea

$$\left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial \eta_i \partial \eta_j} \right)_{\eta=0} = \begin{pmatrix} -(k-1)f(Q') & f(Q') & \dots & f(Q') \\ f(Q') & -(k-1)f(Q') & \dots & f(Q') \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(Q') & f(Q') & \dots & -(k-1)f(Q') \end{pmatrix}$$

unde $f(Q') = Q'c(Q')$ este negativ definită.

Pentru ca teorema să fie complet demonstrată este suficient să arătăm ca $\beta \rightarrow 0$ în fiecare punct al frontierei domeniului $D = \{\eta : \varepsilon_i < \eta_i < \lambda_i, i = 1, 2, \dots, k-1\}$, cînd $\varepsilon_1 \rightarrow -\infty$ sau $\lambda_1 \rightarrow \infty$ pentru valorile lui $\varepsilon_i, \lambda_i (i = 2, 3, \dots, k-1)$ fixate. Atunci cînd $\varepsilon_1 \rightarrow -\infty$ ($\lambda_1 \rightarrow \infty$) valoarea lui β în fiecare punct al frontierei tinde către zero. De asemenea valoarea lui β în $\eta = 0$ este $1 - \alpha > 0$. Urmează că funcția $\beta(\eta)$ satisface toate condițiile lemei 2.

Deci

$$\beta(\eta) < \beta(0) \text{ pentru orice } \eta \neq 0,$$

ceea ce arată că testul q al lui Tukey este nedeplasat.

§ 5. Compararea unor teste privind egalitatea mediilor cînd dispersiile sînt eterogene în cazul selecțiilor mici

Fie $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_1} (X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n_2})$ o selecție asupra unei variabile aleatoare $X_1 [X_2] \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) [N(\mu_2, \sigma_2^2)]$. X_1 și X_2 fiind variabile aleatoare independente ne propunem să verificăm ipoteza

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

fără a presupune $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

Parametrul $R = \sigma_1^2 / \sigma_2^2$ poate lua valori între 0 și ∞ .

Welch (1937, 1947) consideră verificarea ipotezei H_0 în cazul selecțiilor de volum mic (3, 5, 7 și 9) ținând seama de efectul eterogenității dispersiei. În acest scop considerăm statisticile u , v și z care pentru ușurarea scrierii le luăm

$$(28) \quad u^2 = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)^2}{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \frac{V_1 + V_2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

$$(29) \quad v^2 = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)^2}{\frac{V_1}{n_1(n_1 - 1)} + \frac{V_2}{n_2(n_2 - 1)}}$$

$$(30) \quad z^2 = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)^2}{\frac{V_1}{n_1(n_1 - 3)} + \frac{V_2}{n_2(n_2 - 3)}} \quad (n_1 > 3, n_2 > 3)$$

$$(31) \quad V_i = \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2, \quad i = 1, 2.$$

Welch (1937) sugerează că statistica de forma generală

$$(32) \quad Y(r_1, r_2) = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)^2}{r_1 V_1 + r_2 V_2}$$

unde r_1 și r_2 sînt constante convenabil alese, poate fi folosită la controlul volumului testului* pentru diferite valori ale parametrului R . Este posibil să alegem constantele r_1 și r_2 astfel încît ipoteza H_0 să fie respinsă numai cînd

$$Y(r_1, r_2) > 1$$

TEOREMA 4. Dacă este adevărată ipoteza H_0 , atunci

$$(33) \quad Y(r_1, r_2) \sim \frac{\chi^2(1)}{\lambda_1 \chi^2(f_1) + \lambda_2 \chi^2(f_2)}$$

unde :

$$-f_i = n_i - 1, \quad \lambda_1 = \frac{Rr_1}{\frac{R}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \quad \text{și} \quad \lambda_2 = \frac{r_2}{\frac{R}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \quad \text{și}$$

— toate variabilele χ^2 sînt independente.

TEOREMA 5. Dacă este adevărată ipoteza alternativă $\mu_1 \neq \mu_2$

$$(34) \quad Y(r_1, r_2) \sim \frac{\chi^2(1, \lambda)}{\lambda_1 \chi^2(f_1) + \lambda_2 \chi^2(f_2)}$$

*) probab. erorii de ordinul unu

unde: variabilele χ^2 sînt independente și

$$(35) \quad \lambda = \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \left(\frac{\delta}{\sigma_2} \right)^2 \cdot \frac{n_1 n_2}{n_1 + R n_2}, \quad \delta = \mu_1 - \mu_2.$$

Ne propunem să evaluăm volumele regiunilor critice.

Pentru a calcula volumul testului folosind (30) este necesar să evaluăm probabilități de forma:

$$(36) \quad P\{Y(r_1, r_2) > 1 | R\}$$

unde R este o constantă. Pentru valori specifice ale numerelor n_1, n_2, r_1 și r_2 și pentru Y repartizat ca în (33), volumul testului dat de (36) poate fi reprezentat grafic față de R . În figura 1 se dau grafice pentru cazul $n_1 = 3, n_2 = 5, \alpha = 0,05$ și pentru r_1 și r_2 aleși.

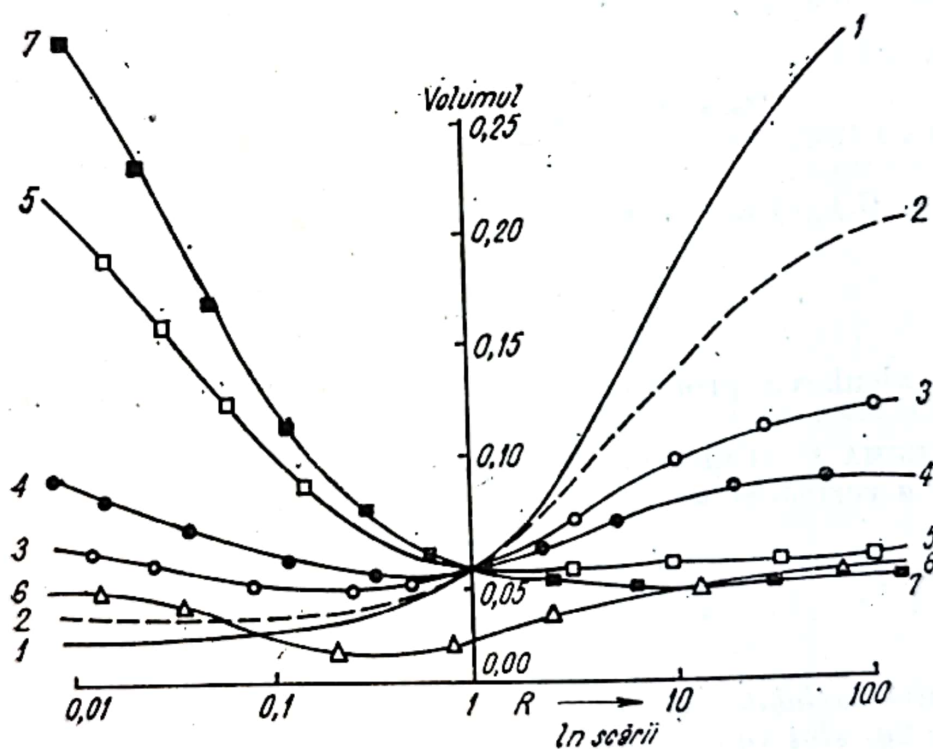


Fig. 1

TABELUL 1

nr. curbei	Statistica folosită	r_1	r_2
1	—	0,2773	0,6932
2	u^2	0,5322	0,5322
3	v^2	1,1007	0,3322
4	z^2 modificată	1,5840	0,2375
5	unilaterală	3,0855	0,0822
6	bilaterală	3,0855	0,3854
7	—	3,8690	0,0387

În cazurile extreme $R \rightarrow 0$ (adică $\sigma_1 \rightarrow 0$) și $R \rightarrow \infty$ (adică $\sigma_2 \rightarrow 0$) statistica $Y(r_1, r_2)$ are următoarea structură

$$(37) \quad \frac{\chi^2(1)}{n_2 r_2 \chi^2(f_2)} \text{ pentru } R = 0$$

$$(38) \quad \frac{\chi^2(1)}{n_1 r_1 \chi^2(f_1)} \text{ pentru } R = \infty.$$

Pentru a evalua probabilitățile corespunzătoare la (37) și (38) transformăm funcția beta incompletă după cum urmează. Fie

$$(39) \quad G_{n,m}(c) = P\left(\frac{\chi^2(n)}{\chi^2(m)} > c\right),$$

unde variabilele χ^2 sînt independente. Atunci

$$(40) \quad G_{n,m}(c) = I_x\left(\frac{1}{2}m, \frac{1}{2}n\right), \quad x = \frac{1}{1+c}.$$

Dacă $G_{1,m}(c)$ are valoarea α , atunci c se poate scrie

$$(41) \quad c = t_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(m)/m.$$

În calcularea probabilităților de forma (36), folosim următoarea teoremă.

TEOREMA 6. (Cullough, Gurland, Rosenberg (1960)). *Funcția de repartiție a variabilei aleatoare*

$$(42) \quad Y = \frac{\chi^2(n)}{\lambda_1 \chi^2(f_1) + \lambda_2 \chi^2(f_2)}$$

unde :

χ^2 sînt variabile independente
 $f_i = 2g_i$ sînt întregi pari și
 λ_i sînt constante pozitive,
 este

$$(43) \quad F_Y(y) = \sum_{j=1}^2 \sum_{s=1}^{g_j} \alpha_{js} F_{n,2s}(\lambda_j y)$$

unde

$$F_{n,m}(x) = 1 - G_{n,m}(x)$$

$$(44) \quad \alpha_{1s} = (-1)^{g_1-s} \frac{\Gamma(g_1 + g_2 - s)}{\Gamma(g_2) \Gamma(g_1 - s + 1)} \frac{\lambda_1^{g_2} \lambda_2^{g_1-s}}{(\lambda_1 - \lambda_2)^{g_1+g_2-s}}, \quad s=1, 2, \dots, g_1.$$

$$(45) \quad \alpha_{2s} = (-1)^{g_2-s} \frac{\Gamma(g_1 + g_2 - s)}{\Gamma(g_1) \Gamma(g_2 - s + 1)} \frac{\lambda_1^{g_2-s} \lambda_2^{g_1}}{(\lambda_2 - \lambda_1)^{g_1+g_2-s}}, \quad s=1, 2, \dots, g_2.$$

Demonstrația rezultă din repartiția combinației lineare de variabile aleatoare χ^2 cu numărul gradelor de libertate par (Box (1954)).

În calcularea puterii testelor propuse folosim următoarea teoremă.
TEOREMA 7. (Chand 1950)). *Variabila aleatoare*

$$(46) \quad Y = \frac{\chi^2(n, \lambda)}{\lambda_1 \chi^2(f_1) + \lambda_2 \chi^2(f_2)},$$

unde variabilele χ^2 sînt independente, are funcția de repartiție

$$(47) \quad F_Y(y) = e^{-\frac{1}{2}\lambda} \sum_{j=1}^2 \sum_{s=1}^{g_j} \alpha_{js} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r! 2^r} F_{n+2r, 2s}(\lambda_j y).$$

Mai întii ne vom ocupa de statisticile cu control uniltareal al volumului. Acest fel de control este folosit cînd este cunoscut apriori că dispersia specificată a unei variabile este mai mare decît a celeilalte.

În folosirea statisticilor u^2 , v^2 și z^2 definite de (28) (29), și (30), valorile critice ale statisticilor test au fost alese ca volumul fiecărui test să fie egal cînd $R = 1$, cu valoarea α fixată.

Cînd $n_1 = 3$ și $n_2 = 5$ este folosit ca exemplu este găsit că condiția lui Welch ca Mz^2 să aibă valori egale în $R = 0$ și $R = \infty$ este impracticabilă. Prin urmare este folosită statistica z^2 modificată cu

$$r_1 = 1,5840 \text{ și } r_2 = 0,2375$$

care dă $M|z|$ valori egale în $R = 0$ și $R = \infty$.

Statisticile unilaterale pot fi găsite pentru toate combinațiile de volume de selecție din următoarele două condiții :

$$(48) \quad \begin{aligned} P\{Y(r_1, r_2) > 1 | R = 1\} &= \alpha \\ P\{Y(r_1, r_2) > 1 | R = \infty\} &= \alpha. \end{aligned}$$

A doua ecuație se mai poate scrie

$$(49) \quad P\left\{\frac{\chi^2(1)}{\chi^2(f_1)} > r_1 n_1\right\} = \alpha,$$

din care obținem :

$$(50) \quad r_1 = \frac{t_{1-\alpha}^2(f_1)}{n_1 f_1}.$$

Parametrul r_2 poate fi scris ca:

$$(51) \quad r_2 = \frac{\Phi}{n_2 f_2}$$

și Φ^*) este dat în tabela 2 pentru cazul $\alpha = 0,05$ și $\alpha = 0,01$ și volumele de selecție 3, 5, 7 și 9.

TABELA 2

Grade de libertate		$\Phi = n_2 f_2 r_2$	
f_1	f_2	Test de volum 0,05	Test de volum 0,01
2	2	2,327	2,682
2	4	1,644	1,836
2	6	1,444	1,597
2	8	1,395	1,477
4	2	5,468	9,600
4	4	3,337	4,886
4	6	2,849	3,953
4	8	2,630	2,630
6	2	7,668	17,976
6	4	4,304	7,360
6	6	3,607	5,733
6	8	3,309	5,068
8	2	9,222	26,040
8	4	4,910	9,374
8	6	4,029	7,568
8	8	3,719	6,089

Puterea testului folosind statistica unilaterală poate fi comparată cu puterea unui test analog testului t în care se presupune că se cunoaște raportul dispersiilor. Pentru verificarea ipotezei $H_0: \mu_1 = \mu_2$ poate fi folosită statistica

$$(52) \quad u_R^2 = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)^2}{\frac{V_1/R + V_2}{n_1 + n_2 - 2} \left(\frac{R}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}.$$

Dacă este adevărată ipoteza H_0 , $u_R^2 \sim t^2(n_1 + n_2 - 2)$.

Dacă este adevărată ipoteza H_0 , u_R^2 este repartizat F necentrat cu parametrul de necentricitate λ dat de (35). Puterea testului care folosește u_R^2 a fost calculată cu ajutorul tabelor lui Tang (1938) pentru aceleași valori ale lui δ/σ^2 și R ca pentru statisticile unilaterale.

În continuare ne vom ocupa de statisticile cu control bilateral al volumului. Acest fel de control este folosit când nu se cunoaște nimic aprioric despre dispersiile variabilelor. Urmează că în construcția unei statistici cu control al volumului trebuie luate în considerare toate valorile lui R . Din examinarea figurii 1 urmează că în familie există curbe pentru care probabilitățile sînt egale în $R = 0$ și $R = \infty$. Alternînd în mod convenabil parametrii r_1 și r_2 , această probabilitate poate lua orice valoare dorită.

Deoarece considerații practice sugerează că volumul testului poate fi menținut $<$ cu o valoare dată, statistica ai cărei parametri sînt definiți de

$$(53) \quad \begin{aligned} P\{Y(r_1, r_2) > 1 | R = 0\} &= \alpha \\ P\{Y(r_1, r_2) > 1 | R = \infty\} &= \alpha \end{aligned}$$

*) A nu se confunda cu funcția lui Laplace.

este cea mai bună în clasa statisticilor considerate când nu se cunoaște nimic asupra lui R . Aceste statistici se numesc bilaterale. Din (53) putem obține direct valorile lui r_1 și r_2 pentru toți n_1 și n_2 și pentru orice valoare α folosind tabelele cu repartiția t :

$$(54) \quad \begin{aligned} r_1 &= t_{1-\alpha}^2(f_1)/n_1 f_1 \\ r_2 &= t_{1-\alpha}^2(f_2)/n_2 f_2. \end{aligned}$$

§ 6. Teste pentru egalitatea mediilor a 2 populații în ipoteza că coeficienții de variație sînt omogeni

Fie X_1 și X_2 două variabile aleatoare independente repartizate $N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2$, cu $\sigma_1/\mu_1 = \sigma_2/\mu_2 = \beta$.

TEOREMA 8. (Lohrding (1969)). Fie $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}$ o selecție asupra variabilei $X_i \sim N(\mu_i, \beta^2 \mu_i^2)$ $i = 1, 2$, cu spațiul parametrilor $\Omega: \{0 < \mu_1 < \infty, 0 < \mu_2 < \infty, 0 < \beta < \infty\}$. În aceste condiții estimatorii de maximă verosimilitate pentru parametrii μ_1, μ_2, β sînt

$$\hat{\mu}_1 = \frac{\bar{X}_1}{2} + \frac{\bar{X}_2}{2} \sqrt{\frac{\bar{X}_1^2 + 2S_1^2}{\bar{X}_2^2 + 2S_2^2}}; \quad \hat{\mu}_2 = \frac{\bar{X}_2}{2} + \frac{\bar{X}_1}{2} \sqrt{\frac{\bar{X}_2^2 + 2S_2^2}{\bar{X}_1^2 + 2S_1^2}}$$

și respectiv

$$\hat{\beta} = \frac{2\sqrt{(\bar{X}_1^2 + 2S_1^2)(\bar{X}_2^2 + 2S_2^2)}(\sqrt{\bar{X}_1^2 + 2S_1^2}(\bar{X}_2^2 + 2S_2^2) - \bar{X}_1\bar{X}_2)^{1/2}}{\bar{X}_1\sqrt{\bar{X}_2^2 + 2S_2^2} + \bar{X}_2\sqrt{\bar{X}_1^2 + 2S_1^2}}.$$

Demonstrație. Funcția de verosimilitate are expresia

$$P = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \mu_i)^2 / (\beta \mu_i)^2\right\}}{\prod_{i=1}^2 (\beta \mu_i)^n}.$$

Condiția de maxim impusă funcției $\ln P$ conduce la ecuațiile

$$\beta^2 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \mu_i) / \mu_i^2$$

$$\beta^2 \mu_k^2 + \bar{X}_k \mu_k - (\bar{X}_k^2 + S_k^2) = 0, \quad k = 1, 2$$

cu soluțiile din enunțul teoremei.

Pentru a verifica că aceste soluții dau un maxim se arată că matricea

$$\left(\frac{\partial^2 \ln P}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right), \quad \theta_i, \theta_j = \mu_1, \mu_2, \beta,$$

este negativ definită.

În ipoteza $\mu_1 = \mu_2$, are loc

TEOREMA 9. Fie X_{ij} , variabile aleatoare independente repartizate $N(\mu, \mu^2 \beta^2)$, $i = 1, 2$; $j = 1, 2, \dots, n$, $\beta = \frac{\sigma}{\mu}$ cu spațiul parametrilor $\omega : \{0 < \mu < \infty, 0 < \beta < \infty\}$.

Estimatorii de maximă verosimilitate ai parametrilor μ și β sînt

$$\hat{\mu} = \bar{X}, \quad \hat{\beta} = \frac{S}{\bar{X}}$$

unde $\bar{X}$ este media de selecție și S este dispersia de selecție calculate în selecția reunită.

Demonstrația repetă procedeul de la teorema 8.

În acest caz funcția de verosimilitate este

$$P = \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{1}{(\beta\mu)^{2n}} \exp \left[-\frac{1}{2\beta^2\mu^2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \mu)^2 \right].$$

Luînd maximul funcției $\ln P$ în raport cu β și μ obținem ecuațiile

$$\beta^2 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n [(X_{ij} - \mu)/\mu]^2$$

$$\beta^2 = \frac{1}{2n\mu^2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n (X_{ij}^2 - \mu X_{ij})$$

cu soluțiile $\hat{\mu} = \bar{X}$, $\hat{\beta} = \frac{S}{\bar{X}}$, care sînt valori de maxim pentru P_ω deoarece

$$\left(\frac{\partial^2 \ln P_\omega}{\partial \theta_r \partial \theta_s} \right)_{\hat{\theta}} < 0, \text{ unde } r, s = 1, 2 \text{ și } \hat{\theta}_1 = \mu, \hat{\theta}_2 = \beta.$$

TEOREMA 10. Fie X_{ij} , variabile aleatoare independente repartizate $N(\mu_i, \mu_i^2 \beta^2)$, $i = 1, 2$ și $j = 1, 2, \dots, n$. Dacă avem omogenitatea coeficienților de variație $\beta = \sigma_1/\mu_1 = \sigma_2/\mu_2$, atunci statistica raportului de verosimilități pentru verificarea ipotezei

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \text{ față de } H_1 : \mu_1 \neq \mu_2,$$

este

$$l = \frac{P_\omega}{P_\Omega} = \left[\frac{\sqrt{(\bar{X}_1^2 + 2S_1^2)(\bar{X}_2^2 + 2S_2^2)} - \bar{X}_1 \bar{X}_2}{2S^2} \right]^n$$

unde $\bar{X}_i$ și S_i^2 sînt definite în teorema 8 și S^2 în teorema 9.

Repartiția statisticii l pentru selecții mari este dată de teorema XIV.1.

Deci

$$-2 \ln l = 2n \ln (2S^2) - 2n \ln \left(\sqrt{(\bar{X}_1^2 + 2S_1^2)(\bar{X}_2^2 + 2S_2^2)} - \bar{X}_1 \bar{X}_2 \right)$$

converge în probabilitate către o variabilă $\sim \chi^2(1)$.

Pentru selecții mici nu există un rezultat general care să stabilească repartiția statisticii l .

Lohrding (1969) lucrând în ipoteza $\mu_1 = \mu_2$ (cu numere aleatoare) a arătat că forma curbei statisticii l pentru $n = 20$ este aproximativ aceeași cu a unei variabile $\chi^2(1)$.

§ 7. O generalizare a problemei Behrens-Fisher

Considerăm două mulțimi de variabile aleatoare

$$X_1, X_2, \dots, X_p, \quad X_i \sim N(\mu_i, \sigma_1^2)$$

și

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_p, \quad Y_i \sim N(\mu_i^*, \sigma_2^2),$$

parametrii $\mu_i, \mu_i^*, \sigma_1^2$ și σ_2^2 fiind necunoscuți.

Ne propunem să verificăm ipoteza

$$(55) \quad H_0: \mu_i = \mu_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

sau

$$(56) \quad H'_0: \mu_1 - \mu_1^* = \mu_2 - \mu_2^* = \dots = \mu_p - \mu_p^*$$

pe baza unor selecții de volum n_1 (n_2) asupra variabilelor aleatoare din prima (a doua) mulțime de variabile aleatoare.

Avem

$$\bar{X}_i \sim N\left(\mu_i, \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right); \quad S_1^2 \sim \sigma_1^2 \chi^2(p(n_1 - 1))$$

$$\bar{Y}_i \sim N\left(\mu_i^*, \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right), \quad S_2^2 \sim \sigma_2^2 \chi^2(p(n_2 - 1)) \text{ (corolarul III.3)}$$

unde am notat prin S_1^2 și S_2^2 suma pătratelor în interiorul selecțiilor.

Pentru verificarea ipotezei H_0 față de o alternativă generală Naik (1974) propune statistica

$$(57) \quad Z(l_1, l_2) = \frac{\sum (\bar{X}_i - \bar{Y}_i)^2/p}{l_1 s_1^2/n_1 + l_2 s_2^2/n_2}$$

unde $s_1^2 = S_1^2/f_1$, $f_1 = p(n_1 - 1)$, $s_2^2 = S_2^2/f_2$, $f_2 = p(n_2 - 1)$, l_1 și l_2 fiind constante care depind de pragul de semnificație α .

Pentru verificarea ipotezei H'_0 față de o alternativă generală Naik (1974) propune statistica

$$(58) \quad Z(l_1, l_2) = \frac{\sum \{(\bar{X}_i - \bar{Y}_i - (\bar{X} - \bar{Y}))\}^2/(p - 1)}{(l_1 s_1^2/n_1) + (l_2 s_2^2/n_2)}$$

unde $\tilde{X} = \sum \bar{X}_i/p$ și $\tilde{Y} = \sum \bar{Y}_i/p$. Constantele l_1 și l_2 din (57), (58) nu sînt aceleași.

Se respinge ipoteza H_0 sau H'_0 dacă

$$Z(l_1, l_2) > 1.$$

Variabilele aleatoare definite în (57) și (58) au structura

$$(59) \quad Z(l_1, l_2) = \chi^2(t, \lambda) / (\lambda_1 \chi^2(f_1) + \lambda_2 \chi^2(f_2))$$

unde: variabilele χ^2 sînt independente și

$$(60) \quad \lambda_i = r_i w_i, \quad r_i = l_i t / f_i, \quad w_i = (\sigma_i^2 / n_i) / \{(\sigma_1^2 / n_1) + (\sigma_2^2 / n_2)\}.$$

Cînd Z este definită de (57), $t = p$,

$$(61) \quad \lambda = \sum \delta_i^2 / \{(\sigma_1^2 / n_1) + (\sigma_2^2 / n_2)\}, \quad \delta_i = \mu_i - \mu_i^*, \\ = 0 \text{ cînd este adevărată ipoteza } H_0.$$

Cînd Z este definită de (58), $t = p - 1$,

$$(62) \quad \lambda = \sum (\delta_i - \bar{\delta})^2 / \{(\sigma_1^2 / n_1) + (\sigma_2^2 / n_2)\}, \quad \bar{\delta} = \sum \delta_i / p, \\ = 0 \text{ cînd este adevărată ipoteza } H_0.$$

În determinarea constantelor l_1, l_2 distingem

i) *Test bilateral*. În cazul în care nu este cunoscut nimic aprioric despre mărimea relativă a dispersiilor σ_1^2 și σ_2^2 , constantele l_1 și l_2 se definesc astfel încît volumul testului să fie α cînd $R = \sigma_1^2 / \sigma_2^2 = \infty$ sau cînd $R = 0$. Astfel l_i este α -punctul superior corespunzător variabilei $F(t, f_i)$, adică

$$(63) \quad l_1 = F_{1\alpha}(t, f_1), \quad l_2 = F_{2\alpha}(t, f_2).$$

Observație. Cînd α crește, constantele $l_i = F_{i\alpha}$, $i = 1, 2$, descresc. Astfel statistica Z crește cînd crește α și prin urmare dacă se respinge ipoteza H la pragul de semnificație α , se respinge de asemenea și la pragul $\alpha' > \alpha$.

2. *Test unilateral*. În cazul în care este cunoscut apriori că $R \geq 1$, constantele l_1 și l_2 sînt definite astfel încît volumul testului este α în $R = \infty$ și în $R = 1$. Astfel rezolvăm ecuațiile

$$P\{Z(l_1, l_2) > 1 | H, R = \infty\} = \alpha$$

$$P\{Z(l_1, l_2) > 1 | H, R = 1\} = \alpha.$$

Prima ecuație dă $l_1 = F_{1\alpha}$. A doua ecuație se poate scrie

$$(64) \quad P[\chi^2(t) > \lambda_1^0 \chi^2(f_1) + \lambda_2^0 \chi^2(f_2)] = \alpha,$$

unde

$$(65) \quad \lambda_1^0 = l_1(t/f_1) \{n_2/(n_1 + n_2)\}, \quad \lambda_2^0 = l_2(t/f_2) \{n_1/(n_1 + n_2)\}.$$

Folosind teoremele lui Robbins și Pitman (1949) sau Box (1954), putem rezolva ecuația (64) pentru λ_2^0 și astfel l_2 poate fi determinat.

Observație. Constanta l_2 depinde de α , t , f_1 , f_2 și n_1/n_2 .

Naik (1974) tablează valorile lui l_2 pentru statistica unilaterală pentru $\alpha = 0,10$; $0,05$ și $0,01$ și anumite combinații de t , f_1 , f_2 și n_1 , n_2 ce satisfac $f_1 = t(n_1 - 1)$, $f_2 = t(n_2 - 1)$;

TEOREMA 11. (Naik (1974 b)). Cînd $t = 1$ sau 2 volumul testului care este

$$P[\chi^2(t) > r_1 w_1 \chi^2(f_1) + r_2 w_2 \chi^2(f_2)]$$

nu depășește α , $0 < \alpha < 1$.

TEOREMA 12. Pentru orice valoare fixată a lui R testele introduse au funcția de putere monotonă în parametrul de necentricitate λ .

TEOREMA 13. Clasa testelor de volum $\leq \alpha$ de tipul resping H dacă $Z(c_1, c_2) > 1$,

unde c_1 , c_2 sînt constante, este admisibilă.

Demonstrația rezultă din faptul că nu putem să avem $c_1 \leq l_1$ și $c_2 \leq l_2$ cu inegalitate strictă în cel puțin una, fără a crește volumul peste α pentru anumiți R .

Naik (1974) dă valorile volumului testelor unilaterale și bilaterale pentru $\alpha = 0,05$ și w_1 variind între $n_2/(n_1 + n_2)$ și 1 .

Puterea testelor este dată de

$$P[\chi^2(t, \lambda) > \lambda_1 \chi^2(f_1) + \lambda_2 \chi^2(f)]$$

și este funcție de parametrul de necentricitate λ și de raportul R .

Dacă R este cunoscut, un test de volum α pentru H_0 respinge H_0 dacă

$$F_R = \frac{\sum (\bar{X}_i - \bar{Y}_i)^2 / p}{(S_1^2 / R + S_2^2) (R/n_1 + 1/n_2) / (f_1 + f_2)} > F_\alpha(t, f_1 + f_2), \quad t = p$$

unde F_α este α -punctul superior.

Naik (1974) compară puterea testului a) bilateral și b) unilateral, și puterea testului F_R pentru $\alpha = 0,05$; $f_1 = t(n_1 - 1)$, $f_2 = t(n_2 - 1)$.

§ 8. Teste unilaterale privind dispersia populației normale

Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Funcția de verosimilitate (8) constituie o familie exponențială cu doi parametri, care coincid cu (1) pentru

$$\theta = -1/2 \sigma^2, \quad \vartheta = n\mu/\sigma^2, \quad U(x) = \sum x_i^2, \quad T(x) = \bar{x}_n.$$

Teorema XIII.21 arată că pentru verificarea ipotezei $\theta \geq \theta_0$ care pentru $\theta_0 = -1/2 \sigma_0^2$ este echivalentă cu

$$H: \sigma \geq \sigma_0$$

există un test U.C.M.P. nedeplasat. Regiunea critică a acestui test poate fi obținută din (XIII.94) cu inegalitățile inversate deoarece în acest caz ipoteza de verificat este $\theta \geq \theta_0$. Aceasta este

$$(66) \quad \sum x_i^2 \leq c_0(\bar{x}_n)$$

unde

$$P_{\sigma_0} \{ \sum X_i^2 \leq c_0(\bar{x}_n) | \bar{x}_n \} = \alpha.$$

Dacă scriem (66) ca

$$\sum x_i^2 - n\bar{x}^2 \leq c'_0(\bar{x}_n)$$

din independența statisticilor $\sum X_i^2 - n\bar{X}_n^2 = \sum (X_i - \bar{X}_n)^2 = V$ și $\bar{X}_n$ (teorema III.5, sau exemplul 1) urmează că $c'_0(\bar{x}_n)$ nu depinde de $\bar{x}_n$. Prin urmare respingem ipoteza H când

$$(67) \quad \sum (x_i - \bar{x}_n)^2 \leq c'_0$$

sau echivalent când

$$(68) \quad \sum (x_i - \bar{x}_n)^2 / \sigma_0^2 \leq c_0$$

unde c_0 este determinat de

$$(69) \quad P_{\sigma_0} \{ \sum (X_i - \bar{X}_n)^2 / \sigma_0^2 \leq c_0 \} = \alpha.$$

Deoarece $\sum (X_i - \bar{X}_n)^2 / \sigma_0^2 \sim \chi^2(n-1)$ (corolarul III.3) din (69) urmează că

$$c_0 = \chi_{\alpha}^2(n-1).$$

Puterea testului avînd regiunea critică (68) este

$$\pi(\sigma) = P_{\sigma} \left\{ \frac{\sum (X_i - \bar{X}_n)^2}{\sigma^2} \leq c_0 \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \right\} = \int_0^{c_0 \sigma_0^2 / \sigma^2} h_{n-1}(y) dy.$$

Obținem același rezultat dacă folosim teorema 1. O statistică $V = h(U, T)$ de felul celei cerute de teoremă, adică „independentă de $\bar{X}_n$ pentru $\sigma = \sigma_0$ și toți μ ” este

$$V = \sum (X_i - \bar{X}_n)^2 = U - nT^2$$

Într-adevăr această statistică este independentă de $\bar{X}_n$ pentru toți μ și σ^2 . Deoarece $h(u, t)$ este o funcție crescătoare de u pentru fiecare t , urmează că testul U.C.M.P. nedepășat are regiunea critică de forma

$$V < c'_0.$$

Aceleași considerații arată că regiunea critică pentru

$$H : \sigma < \sigma_1 \text{ sau } \sigma \geq \sigma_2$$

este

$$(70) \quad c_1 < \sum (x_i - \bar{x}_n)^2 < c_2$$

unde c_1, c_2 sînt determinați de

$$(71) \quad \int_{c_1/\sigma_1^2}^{c_2/\sigma_1^2} h_{n-1}(y) dy = \int_{c_1/\sigma_2^2}^{c_2/\sigma_2^2} h_{n-1}(y) dy = \alpha.$$

Deoarece $h(u, t)$ este lineară în u , urmează că testul U.C.M.P. nedepășat pentru verificarea ipotezei

$$H : \sigma = \sigma_0$$

are regiunea de acceptare

$$(72) \quad c'_1 < \sum (x_i - \bar{x}_n)^2 / \sigma_0^2 < c'_2$$

unde constantele sînt determinate de

$$(73) \quad \int_{c'_1}^{c'_2} h_{n-1}(y) dy = 1 - \alpha.$$

§ 9. Compararea a două dispersii

Fie $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_1} [X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n_2}]$ o selecție asupra unei variabile aleatoare $X_1 [X_2] \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) [N(\mu_2, \sigma_2^2)]$, X_1 și X_2 fiind variabile independente.

Ne propunem să verificăm ipotezele :

$$H : \sigma_2^2 / \sigma_1^2 < \Delta_0 \text{ și } H' : \sigma_2^2 / \sigma_1^2 = \Delta_0.$$

Funcția de verosimilitate se poate scrie

$$C(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2) \exp \left(-\frac{1}{2\sigma_1^2} \sum x_{1i}^2 - \frac{1}{2\sigma_2^2} \sum x_{2j}^2 + \frac{n_1\mu_1}{\sigma_1^2} \bar{x}_1 + \frac{n_2\mu_2}{\sigma_2^2} \bar{x}_2 \right)$$

și este o familie exponențială cu patru parametri

$$(74) \quad \theta = -1/2 \sigma_2^2, \vartheta_1 = -1/2 \sigma_1^2, \vartheta_2 = n_2 \mu_2 / \sigma_2^2, \vartheta_3 = n_1 \mu_1 / \sigma_1^2$$

și statisticile suficiente.

$$(75) \quad U = \sum X_{2j}^2, \quad T_1 = \sum X_{1i}^2, \quad T_2 = \bar{X}_2, \quad T_3 = \bar{X}_1.$$

Ținând seama de lema XIII.6 exprimăm familia exponențială în termeni de parametrii

$$\theta^* = (-1/2 \sigma_2^2) + (1/2 \Delta_0 \sigma_1^2), \quad \vartheta_i^* = \vartheta_i, \quad i = 1, 2, 3$$

și statisticile

$$U^* = \sum X_{2j}^2, \quad T_1^* = \sum X_{1i}^2 + (1/\Delta_0) \sum X_{2j}^2, \quad T_2^* = \bar{X}_2, \quad T_3^* = \bar{X}_1.$$

Prin urmare, ținând seama de teorema XIII.21 pentru verificarea ipotezelor

$$\theta^* \leq 0 \quad \text{și} \quad \theta^* = 0$$

care sint echivalente cu H și respectiv H' , există teste U.C.M.P. nedeplasate.

Cind $\sigma_2^2 = \Delta_0 \sigma_1^2$ repartiția statisticii

$$V = \frac{\sum (X_{2j} - \bar{X}_2)^2 / \Delta_0}{\sum (X_{1i} - \bar{X}_1)^2} = \frac{\sum (X_{2j} - \bar{X}_2)^2 / \sigma_2^2}{\sum (X_{1i} - \bar{X}_1)^2 / \sigma_1^2}$$

nu depinde de σ_1 , μ_1 sau μ_2 și din corolarul 1, V este independentă de (T_1^*, T_2^*, T_3^*) . Prin urmare testul U.C.M.P. nedeplasat pentru verificarea ipotezei H este dat de (2) și (3), astfel încît regiunea critică poate fi scrisă ca

$$(76) \quad \frac{\sum (X_{2j} - \bar{X}_2)^2 / \Delta_0 (n_2 - 1)}{\sum (X_{1i} - \bar{X}_1)^2 / (n_1 - 1)} \geq C_0.$$

Cind $\sigma_2^2 = \Delta_0 \sigma_1^2$ membrul drept al relației (76) este repartizat $F(n_2 - 1, n_1 - 1)$, astfel încît C_0 din (76) este dat de

$$(77) \quad C_0 = F_{1-\alpha}(n_2 - 1, n_1 - 1).$$

Pentru aplicarea teoremei 1 la verificarea ipotezei H' considerăm statistica

$$W = \frac{\sum (X_{2j} - \bar{X}_2)^2 / \Delta_0}{\sum (X_{1i} - \bar{X}_1)^2 + (1/\Delta_0) \sum (X_{2j} - \bar{X}_2)^2}.$$

Cind $\sigma_2^2 = \Delta_0 \sigma_1^2$ statistica W este de asemenea independentă de $T^* = (T_1^*, T_2^*, T_3^*)$ și este lineară în U^* . Regiunea de acceptare a testului U.C.M.P. nedeplasat pentru verificarea ipotezei H' este

$$(78) \quad C_1 < W < C_2$$

cu constantele determinate de (5) și (6) unde V este înlocuită prin W . Împărțind numărătorul și numitorul statisticii W prin σ_1^2 , atunci pentru $\sigma_2^2 = \Delta_0 \sigma_1^2$, W este de forma

$$W_1 / (W_1 + W_2)$$

unde W_1 și W_2 sînt variabile aleatoare independente repartizate $\chi^2(n_2-1)$ respectiv $\chi^2(n_1-1)$. Echivalent,

$$W = Y(1 + Y)$$

unde $Y = W_1/W_2$ și unde

$$(n_1 - 1)Y/(n_2 - 1) \sim F(n_2 - 1, n_1 - 1).$$

Din teorema I.15 urmează că $W \sim B\left[\frac{1}{2}(n_2 - 1), \frac{1}{2}(n_1 - 1)\right]$.

Ținînd seama de relațiile

$$M(W) = \frac{n_2 - 1}{n_1 + n_2 - 2}$$

și

$$w b^{*}_{\frac{1}{2}(n_2-1), \frac{1}{2}(n_1-1)}(w) = \frac{n_2 - 1}{n_1 + n_2 - 2} b_{\frac{1}{2}(n_2+1), \frac{1}{2}(n_1-1)}(w)$$

condițiile (5) și (6) devin

$$(79) \int_{c_1}^{c_2} b_{\frac{1}{2}(n_2-1), \frac{1}{2}(n_1-1)}(w) dw = \int_{c_1}^{c_2} b_{\frac{1}{2}(n_2+1), \frac{1}{2}(n_1-1)}(w) dw = 1 - \alpha.$$

Din definiția statisticii V urmează că repartiția sa depinde numai de raportul σ_2^2/σ_1^2 , lucru adevărat și pentru W . Prin urmare puterea testelor ale căror regiuni critice sînt date de (76) și respectiv (78) este de asemenea funcție numai de variabila $\Delta = \sigma_2^2/\sigma_1^2$; poate fi exprimată explicit în termeni de repartiția F . Pentru testul cu regiunea critică (76) este

$$\begin{aligned} \pi(\Delta) &= P\left\{\frac{\sum (X_{2j} - \bar{X}_2)^2 / \sigma_2^2 (n_2 - 1)}{\sum (X_{1i} - \bar{X}_1)^2 / \sigma_1^2 (n_1 - 1)} \geq \frac{C_0 \Delta_0}{\Delta}\right\} = \\ &= \int_{c_0 \Delta_0 / \Delta}^{\infty} p_{F(n_2-1, n_1-1)}(y) dy \end{aligned}$$

§ 10. Testul lui Hartley pentru egalitatea dispersiilor

10.1. Definirea testului

Fie $X_{ij} (i = 1, 2, \dots, k, j = 1, 2, \dots, n+1)$ elementele a k selecții de volum $n+1$ asupra variabilelor independente $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ $i = 1, 2, \dots, k$.

$$s_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n+1} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 \text{ unde } \bar{X}_i = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} X_{ij}$$

este o estimație nedeplasată pentru σ_i^2 ($i = 1, 2, \dots, k$) și $n_i s_i^2 / \sigma_i^2 \sim \chi^2(n)$.

*) am notat prin b densitatea de repartiție a variabilei B .

Ipoteza

$$(80) \quad H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2$$

este echivalentă cu mulțimea ipotezelor

$$H_{ij}^0 : \sigma_i^2 = \sigma_j^2 \quad (i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, k).$$

Pentru oricare două dispersii σ_i^2 , ipoteza $\sigma_i^2 = \sigma_j^2$ poate fi verificată cu ajutorul unei statistici repartizate $F(n, n)$. Ipoteza $\sigma_i^2 = \sigma_j^2$ este acceptată dacă

$$(1/F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n, n)) < (s_i^2/s_j^2) < F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n, n).$$

Deoarece ipoteza H_0 este echivalentă cu mulțimea ipotezelor H_{ij}^0 ($i \neq j : i, j = 1, 2, \dots, k$), obținem testul pentru H_0 , luând intersecția tuturor celor C_k^2 regiuni de acceptare și acceptăm H_0 dacă (81)

$$(81) \quad \sup_{i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, k} (s_i^2/s_j^2) \leq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n, n)$$

echivalent cu a accepta H_0 dacă

$$F_{\max} = (s_{\max}^2/s_{\min}^2) \leq F_{1-\alpha, \max}(n, n).$$

Acesta este testul $F_{\max}$ a lui Hartley (1950).

10.2. Puterea testului.

Deoarece transformările de scară lasă testul invariant, probabilitatea erorii de ordinul doi este

$$\begin{aligned} \beta = & \sum_{i=1}^{k-1} \int_0^\infty p(u) \int_{u/\eta_i}^{F_{u/\eta_i}} p(v) dv \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k-1} \int_{u\eta_j/\eta_i}^{F_{u\eta_j/\eta_i}} p(w) dw du + \\ & + \int_0^\infty p(u) \prod_{j=1}^{k-1} \int_{u\eta_j}^{F_{u\eta_j}} p(v) dv du, \end{aligned}$$

unde

$$p(u) = \text{const } u^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}} \text{ și } \eta_{i-1} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_i^2}, \quad i = 2, 3, \dots, k.$$

Se observă că β depinde numai de $(k-1)$ parametri η și că este simetric în η . Urmează că și puterea acestui test este simetrică în η .

LEMA 3. Dacă condițiile lemei 2 sînt satisfăcute cînd $a_i \rightarrow 0$ sau $b_i \rightarrow \infty$ pentru orice i și pentru valorile a_j, b_j ($j \neq i, j = 1, 2, \dots, k$) fixe, $f(x_1, \dots, x_k) < A$ pentru toți $x \in D'$, unde

$$D' = \{x, 0 < x_i < \infty, 1 \leq i \leq k\}, x \neq P.$$

TEOREMA 14. (Ramachandran (1956)). Testul $\mathcal{F}_{\max}$ a lui Hartley este nedeplasat.

Demonstrație. Avem :

$$\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right) \frac{\partial \beta}{\partial \eta_1} = \int_0^\infty [u^{n-1} e^{-u(1+\mathcal{F}\eta_1)} - u^{n-1} e^{-u(\mathcal{F}+\eta_1)}] \prod_{j=2}^{k-1} \int_{u\eta_j}^{\mathcal{F}u\eta_j} p(v) dv du +$$

$$+ \sum_{i=2}^{k-1} \int_0^\infty [u^{n-1} e^{-u(\eta_i+\mathcal{F}\eta_1)} - u^{n-1} e^{-u(\eta_i+\mathcal{F}\eta_i)}] \times$$

$$\times \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^{k-1} \int_{u\eta_j}^{\mathcal{F}u\eta_j} p(v) dv \int_u^{\mathcal{F}u} p(w) dw du,$$

unde

$$p(x) = \text{const. } v^{\frac{n}{2}-1} e^{-v}.$$

Urmează că $\frac{\partial \beta}{\partial \eta_1}$ va fi negativ dacă $\eta_1 > 1$ și $\eta_1 > \eta_i$ ($i = 2, 3, \dots, k-1$) și pozitiv dacă $\eta_1 < 1$ și $\eta_1 < \eta_i$ ($i = 2, 3, \dots, k-1$). Analog

$$\frac{\partial \beta}{\partial \eta_i} < 0 \text{ dacă } \eta_i > 1 \text{ și } \eta_i = \eta_{\max}.$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \eta_i} > 0 \text{ dacă } \eta_i < 1 \text{ și } \eta_i = \eta_{\min}.$$

Se observă că $\left. \frac{\partial \beta}{\partial \eta_k} \right|_{\eta=1} = 0, k = 1, 2, \dots, k-1$. Dacă $\eta^0 \neq 1$, atunci $\eta_{\max}^0 > 1$ sau $\eta_{\min}^0 < 0$. Prin urmare primele derivate parțiale se pot anula simultan numai în $(1, 1, \dots, 1)$. Avem :

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial \eta_i^2} = (k-1) (1 - \mathcal{F}) c(\mathcal{F}),$$

unde

$$c(\mathcal{F}) = \frac{1}{\Gamma^k\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty u^n e^{-u} \left[\int_u^{\mathcal{F}u} v^{\frac{n}{2}-1} e^{-v} dv \right]^{k-2} du > 0.$$

Prin urmare

$$\left. \frac{\partial^2 \beta}{\partial \eta_i^2} \right|_{\eta=1} < 0, \quad 1 \leq i \leq k-1$$

$$\left. \frac{\partial^2 \beta}{\partial \eta_i \partial \eta_j} \right|_{\eta=1} = (\mathcal{F} - 1) c(\mathcal{F}) > 0 \quad (i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq k-1).$$

Punînd $g(\mathcal{F}) = (\mathcal{F} - 1) c(\mathcal{F})$, obţinem c  matricea :

$$\left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial \eta_i \partial \eta_j} \right)_{\eta=1} = \begin{pmatrix} -(k-1)g(\mathcal{F}) & g(\mathcal{F}) & \cdots & g(\mathcal{F}) \\ g(\mathcal{F}) & -(k-1)g(\mathcal{F}) & \cdots & g(\mathcal{F}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g(\mathcal{F}) & g(\mathcal{F}) & \cdots & -(k-1)g(\mathcal{F}) \end{pmatrix}$$

este negativ definit .

Teorema este complet demonstrată dacă arătăm că $\beta \rightarrow 0$ în fiecare punct al frontierei domeniului $D = \{\eta : \varepsilon_i < \eta_i < \lambda_i; i = 1, \dots, k-1\}$ c nd $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ sau $\lambda_1 \rightarrow \infty$ pentru valori ale lui ε_i, λ_i ($i = 2, 3, \dots, k-1$) fixate. Valoarea lui β în $\eta = 1$ este $1 - \alpha > 0$.

Prin urmare condițiile date în lema 3 sînt satisfăcute de funcția $\beta(\eta)$. Urmează că

$$\beta(\eta) < \beta(0) \text{ pentru orice } \eta \neq 1,$$

ceea ce ar t  că testul $\mathcal{F}_{\max}$ a lui Hartley este nedeplasat.

  11. Nedeplasarea testelor pentru egalitatea dispersiilor

Laue R.V. (1965)*) folosește pentru verificarea ipotezei H_0 o familie de statistici cu doi parametri, definită ca

$$(S2) \quad T(\lambda, \eta) = [(kn)/(\lambda - \eta)] \ln R(\lambda, \eta)$$

pentru toți λ  i η finite  i

$$R(\lambda, \eta) = M(\lambda)/M(\eta), \text{ cu } M(t) = \left[(1/k) \sum_{j=1}^k (s_j^2) t \right]^{1/t},$$

s_j^2 dispersia de selecție în selecția asupra variabilei X_j .

Observații. i) $T(1, 0)$ este legată de testul raportului de verosimilitate.

ii) $T(\infty, \infty)$ este legată de testul lui Hartley (1950).

TEOREMA 15 (Laue (1965)). Testele bazate pe familia de statistici (82) sînt consistente, similare iar statisticile de forma (82) sînt asimptotic repartizate χ^2 .

Cohen  i Strawderman (1971) ar t  că testele bazate pe (82) sînt nedeplasate ( n sensul că funcția de putere a testului are un minim c nd este adevărată ipoteza). Procedेaz  după cum urmează : problema este reformulată în termeni de verificarea omogenit ii parametrilor de translație. Aceasta este dată consider nd $z_i = \ln s_i^2$, $i = 1, 2, \dots, k$. Deoarece statisticile test sînt invariante la permutare  i invariante la translație în termeni de z_i , aplică teorema lui Mudholkar (1966). Aplicarea acestei teoreme reduce demonstrarea nedeplas rii la a demonstra că regiunile de acceptare ale testelor, exprimate în termeni de z_i sînt convexe.

*) Citat de Cohen  i Strawderman (1971)

Se dă

DEFINIȚIA 1. Funcția $f(z)$ definită pe spațiul euclidian k -dimensional L_k este unimodală dacă

$$K_u = \{z \mid f(z) \geq u\}$$

este convexă pentru fiecare $u \geq 0$

Fie $G = \{g_i, i=1, 2, \dots, N\}$ grupul măsurilor Lebesgue care păstrează transformările lineare ale lui L_k în L_k . Fie E o mulțime convexă invariantă sub G , sau G invariantă, adică $z \in E \rightarrow g_i z \in E, i = 1, 2, \dots, N$. Fie $f(z) \geq 0$ o funcție pe spațiul k -dimensional ce satisface

(83) i) condiția de unimodalitate

ii) condiția de G -invariantă; $f(g_i z) = f(z), i = 1, 2, \dots, N$,
pentru fiecare z în L_k

și

iii) $\int_E f(z) dz < \infty$ în sensul Lebesgue.

Fie $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}$ $\alpha_i \geq 0, \sum_1^N \alpha_i = 1$ și y un vector din spațiul k -dimensional definit de

$$(84) \quad \alpha(y) = \sum_{i=1}^N \alpha_i g_i y.$$

Are loc

TEOREMA 16 (Mudholkar (1966)). Fie $f(z)$ o funcție satisfăcând (83). Fie E convexă și G -invariantă. Pentru fiecare mulțime $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}$, $\alpha_i \geq 0, \sum_1^N \alpha_i = 1$ și vector y din L_k avem

$$(85) \quad \int_E f(z + \alpha(y)) dz \geq \int_E f(z + y) dz.$$

Pentru a se aplica teorema 16 când grupul G este grupul permutărilor în L_k , se alege $\alpha_i = 1/N, i=1, 2, \dots, N$ și o mulțime de vectori y care pot fi scriși ca

$$(86) \quad y = r \cdot 1 + y^*$$

unde y^* este astfel încât suma coordonatelor sale este zero, r este scalar și 1 este vectorul ale cărui componente sînt toate 1. Cu G, α și y astfel aleși, din (84), (85) devine

$$(87) \quad \int_E f(z + r1) dz \geq \int_E f(z + r \cdot 1 + y^*) dz.$$

Se consideră apoi un vector $\mathbf{Z}$ ($k \times 1$) — dimensional a cărui densitate este $f(\mathbf{z} - \mathbf{0})$, $\mathbf{0}$ fiind un vector $k \times 1$ și se verifică ipoteza

$$\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_k.$$

Pentru a folosi teorema 16 pentru demonstrarea proprietății de nedepasare a testului, Cohen și Strawderman (1971) demonstrează

TEOREMA 17. Fie f o familie de densități cu parametru de translație care satisface (83). Atunci orice test, a cărui regiune de acceptare E este

- i) convexă
- ii) invariantă la permutare
- iii) $E + r \cdot \mathbf{1} = E$,

este nedepasat.

Cu ajutorul acestei teoreme se demonstrează

TEOREMA 18. Pentru $\lambda \geq 0$, $\eta < 0$, testele definite de (82) sînt nedepasate.

Observații. 1) Statistica pe care se bazează testul lui Hartley (81) este echivalentă cu

$$\max s_i^2 / \min s_j^2,$$

care după (82) este o funcție monotonă de

$$(\lambda - \eta) T(\infty, -\infty).$$

Fie $\lambda = n$ și $\eta = -n$ și șirul $nT(n, -n)$ ale căror regiuni de acceptare corespunzătoare (în variabilele z) sînt închise și convexe. Din teorema 18 rezultă nedepasarea testului Hartley.

§ 12. Egalitatea a două sau mai multe dispersii față de alternative oarecari

12.1. Definirea testului

Pentru $(k+1)$ variabile normale unidimensionale, dorim să verificăm ipoteza compusă

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2 = \sigma_0^2.$$

Presupunem că avem selecțiile aleatoare de volume (n_i+1) , $i=0, 1, 2, \dots, k$ și fie s_i^2 o estimatie a lui σ_i^2 bazată pe n_i grade de libertate pentru $i=0, 1, \dots, k$. Vom alege σ_0^2 ca bază și comparăm $\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2$ cu σ_0^2 , astfel că H_0 este echivalentă cu

$$H'_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} = \dots = \frac{\sigma_k^2}{\sigma_0^2} = 1.$$

Ipoteza alternativă este

$$H'_1: \text{cel puțin un raport } \sigma_i^2 / \sigma_0^2 \neq 1.$$

Pentru fiecare ipoteză $H'_{0i} : \sigma_i^2 / \sigma_0^2 = 1$ față de $H'_{1i} : \sigma_i^2 / \sigma_0^2 \neq 1$, avem un test cu regiunea de acceptare,

$$(88) \quad \mathcal{F}_{i1} \leq F_i(n_i, n_0) \leq \mathcal{F}_{i2},$$

unde $\mathcal{F}_i(n_i, n_0) = s_i^2/s_0^2 \sim F(n_i, n_0)$ cînd este adevărată ipoteza H'_{0i} .

Se observă că

$$H'_0 = \bigcap_1^k H'_{0i} \text{ și } H'_1 = \bigcup_1^k H'_{1i},$$

de unde regiunea de acceptare pentru H'_1 , adică H_0

$$(89) \quad \mathcal{F}_{11} \leq F_1(n_1, n_0) \leq \mathcal{F}_{12}, \mathcal{F}_{21} \leq F_2(n_2, n_0) \leq \mathcal{F}_{22}, \dots, \mathcal{F}_{k1} \leq F_k(n_k, n_0) \leq \mathcal{F}_{k2}$$

iar regiunea critică este dată de reuniunea complementarelor regiunilor (88).

Deoarece alegerea optimă a valorilor $\mathcal{F}_{i1}, \mathcal{F}_{i2}, i = 1, 2, \dots, k$ nu este cunoscută, vom alege pe $\mathcal{F}_{i1}$ și $\mathcal{F}_{i2}$ astfel încît toate regiunile (88) individuale să aibă același coeficient de încredere $1 - \alpha^*$, unde α^* este astfel că coeficientul de încredere al intersecției (89) este $(1 - \alpha)$ pentru un α dat dinainte. În general $(1 - \alpha) \neq (1 - \alpha^*)$, însă dat α putem determina α^* și reciproc, condiție care nu determină însă complet regiunea (89). De aceea vom cere ca pentru fiecare i , testul cu regiunea de acceptare (88) să fie local nedeplasat.

$F_i(n_i, n_0)$ pentru $i = 1, 2, \dots, k$ sînt cvasi-independente, adică numărătorii, excepție făcînd constanta de multiplicare, sînt repartizați χ^2 și independent de numitorul lor comun, care este repartizat, excepție făcînd o constantă de multiplicare, χ^2 .

Testul $F_{\max}$ a lui Hartley în cazul selecțiilor de același volum nu este echivalent cu testul de mai sus chiar cînd toate selecțiile au același volum, deoarece alternativele în aceste două cazuri sînt diferite.

12.2. Proprietăți ale puterii testului propus

Puterea, sau echivalent, eroarea de ordinul doi conține ca parametru numai k rapoarte $\delta_i = \sigma_i^2 / \sigma_0^2$ ($i = 1, 2, \dots, k$). Avem :

$$\begin{aligned} \beta &= P[\mathcal{F}_{11} \leq F_1(n_1, n_0) \leq \mathcal{F}_{12}, \dots, \mathcal{F}_{k1} \leq F_k(n_k, n_0) \leq \mathcal{F}_{k2} | H'_1] = \\ &= P\left[\frac{\mathcal{F}_{11}}{\delta_1} \leq \frac{F_1(n_1, n_0)}{\delta_1} \leq \frac{\mathcal{F}_{12}}{\delta_1}, \dots, \frac{\mathcal{F}_{k1}}{\delta_k} \leq \frac{F_k(n_k, n_0)}{\delta_k} \leq \frac{\mathcal{F}_{k2}}{\delta_k} \mid H'_1\right], \end{aligned}$$

unde pentru $i = 1, 2, \dots, k$, $F_i(n_i, n_0)/\delta_i \sim F(n_i, n_0)$ și diferiți F sînt cvasi-independenți.

Arătăm că pentru alegerea lui $\mathcal{F}_{i1}, \mathcal{F}_{i2}$ menționată în § 12.1 puterea testului are proprietatea de a fi monotonă.

Fie $v_i = s_i^2/\sigma_i^2$, $i = 0, 1, 2, \dots, k$ și $p(v_i)$ densitatea de repartiție corespunzător lui $\chi^2(n_i)$.

Avem

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta}{\partial \delta_1} &= \frac{\partial}{\partial \delta_1} \int_0^\infty p(v_0) \left[\prod_{i=1}^k \int_{\frac{v_0 \mathfrak{F}_{i1}}{\delta_i}}^{\frac{v_0 \mathfrak{F}_{i2}}{\delta_i}} p(v_i) dv_i \right] dv_0 = \int_0^\infty p(v_0) dv_0 \frac{\partial}{\partial \delta_1} \left[\prod_{i=1}^k \int_{\frac{v_0 \mathfrak{F}_{i1}}{\delta_i}}^{\frac{v_0 \mathfrak{F}_{i2}}{\delta_i}} p(v_i) dv_i \right] = \\ &= \int_0^\infty p(v_0) \left[\left(\frac{\partial}{\partial \delta_1} \int_{\frac{v_0 \mathfrak{F}_{11}}{\delta_1}}^{\frac{v_0 \mathfrak{F}_{12}}{\delta_1}} p(v_1) dv_1 \right) \prod_{i=2}^k \int_{\frac{v_0 \mathfrak{F}_{i1}}{\delta_i}}^{\frac{v_0 \mathfrak{F}_{i2}}{\delta_i}} p(v_i) dv_i \right] dv_0 = \\ (90) \quad &= \int_0^\infty p(v_0) \left\{ \left(\frac{n_1}{2} \right)^{\frac{n_1}{2}} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\delta_1} \left[\left(\frac{v_0 \mathfrak{F}_{11}}{\delta_1} \right)^{\frac{n_1}{2}} e^{-\frac{n_1 v_0 \mathfrak{F}_{11}}{2\delta_1}} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{v_0 \mathfrak{F}_{12}}{\delta_1} \right)^{\frac{n_1}{2}} e^{-\frac{n_1 v_0 \mathfrak{F}_{12}}{2\delta_1}} \right] \prod_{i=2}^k \int_{\frac{v_0 \mathfrak{F}_{i1}}{\delta_i}}^{\frac{v_0 \mathfrak{F}_{i2}}{\delta_i}} p(v_i) dv_i \right\} dv_0. \end{aligned}$$

Punind

$$f(v_0) = v_0^{\frac{n_1}{2}} \left[\mathfrak{F}_{11}^{\frac{n_1}{2}} e^{-\frac{n_1 v_0 \mathfrak{F}_{11}}{2\delta_1}} - \mathfrak{F}_{12}^{\frac{n_1}{2}} e^{-\frac{n_1 v_0 \mathfrak{F}_{12}}{2\delta_1}} \right] \prod_{i=2}^k \int_{\frac{v_0 \mathfrak{F}_{i1}}{\delta_i}}^{\frac{v_0 \mathfrak{F}_{i2}}{\delta_i}} p(v_i) dv_i,$$

obținem :

$$\frac{\partial \beta}{\partial \delta_1} = c \int_0^\infty p(v_0) f(v_0) dv_0, \quad c \geq 0.$$

Deoarece $v_0, \delta_i, \mathfrak{F}_{i2} > \mathfrak{F}_{i1}$ ($i = 1, 2, \dots, k$) sînt pozitive și fiecare integrală din produsul

$$\prod_{i=2}^k \int_{\frac{v_0 \mathfrak{F}_{i1}}{\delta_i}}^{\frac{v_0 \mathfrak{F}_{i2}}{\delta_i}} p(v_i) dv_i$$

este pozitivă (fiind o probabilitate variază între zero și unu), $\partial \beta / \partial \delta_1 \geq 0$ în conformitate cu

$$\mathfrak{F}_{11}^{\frac{n_1}{2}} e^{-\frac{n_1 v_0 \mathfrak{F}_{11}}{2\delta_1}} - \mathfrak{F}_{12}^{\frac{n_1}{2}} e^{-\frac{n_1 v_0 \mathfrak{F}_{12}}{2\delta_1}} \geq 0$$

sau

$$(91) \quad \left(\frac{\mathfrak{F}_{11}}{\mathfrak{F}_{12}} \right)^{\frac{n_1}{2}} \geq e^{-\frac{n_1 v_0}{2\delta_1} (\mathfrak{F}_{12} - \mathfrak{F}_{11})}.$$



Se observă că condiția ca regiunea $\mathcal{F}_{11} \leq F_1(n_1, n_0) \leq \mathcal{F}_{12}$ să fie local nedeplasată se reduce la

$$(92) \quad \left(\frac{\mathcal{F}_{11}}{\mathcal{F}_{12}} \right)^{\frac{n_1}{2}} = e^{-\frac{n_1 v_0}{2} (\mathcal{F}_{12} - \mathcal{F}_{11})}.$$

Din (91) și (92)

$$\frac{\partial \beta}{\partial \delta_1} \geq 0 \text{ în conformitate cu } \delta_1 \leq 0.$$

Prin urmare, puterea este o funcție monoton crescătoare sau descrescătoare în δ_1 , după cum $\delta \geq 1$. Proprietatea demonstrată pentru δ_1 este adevărată și pentru $\delta_2, \delta_3, \dots, \delta_k$.

Dacă $\delta' = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k)$, atunci din (90) și (92), dacă $\mathcal{F}_{i1}, \mathcal{F}_{i2}$ sînt alese astfel încît regiunea (88) este local nedeplasată, atunci

$$\left. \frac{\partial \beta}{\partial \delta_i} \right|_{\delta' = (1, 1, \dots, 1)} = 0.$$

Din proprietatea de monotonie a puterii testului considerat rezultă că testul este nedeplasat.

12.3. Intervale de încredere simultane pentru σ_i^2/σ_0^2 ($i=1, 2, \dots, k$)

Dacă este adevărată ipoteza alternativă, atunci $F_i(n_i, n_0)/\delta_i$, pentru $i=1, 2, \dots, k$ sînt repartizate cvasi-independente. Deci putem face imultan presupunerile :

$$(93) \quad \mathcal{F}_{11} \leq \frac{F_1(n_1, n_0)}{\delta_1} \leq \mathcal{F}_{12}, \dots, \mathcal{F}_{k1} \leq \frac{F_k(n_k, n_0)}{\delta_k} \leq \mathcal{F}_{k2}$$

unde $\mathcal{F}_{i1}, \mathcal{F}_{i2}$ ($i=1, 2, \dots, k$) sînt astfel încît :

$$(94) \quad P[\mathcal{F}_{11} \leq F_1(n_1, n_0) \leq \mathcal{F}_{12}, \dots, \mathcal{F}_{k1} \leq F_k(n_k, n_0) \leq \mathcal{F}_{k2}] = (1 - \alpha).$$

Urmează că probabilitatea asociată lui (93) este $(1 - \alpha)$.

Din (93) obținem următoarele intervale de încredere simultane

$$(95) \quad \frac{s_i^2}{s_0^2 \mathcal{F}_{i2}} \leq \delta_i \leq \frac{s_i^2}{s_0^2 \mathcal{F}_{i1}}$$

avînd coeficientul de încredere comun $(1 - \alpha)$.

Aceste rezultate sînt adevărate pentru toate alegerile lui $\mathcal{F}_{i1}, \mathcal{F}_{i2}$, ($i=1, 2, \dots, k$) satisfăcînd (94). Prin urmare, dacă $\mathcal{F}_{i1}, \mathcal{F}_{i2}$, ($i=1, 2, \dots, k$)

sînt alese ca în § 12.1, atunci din faptul că testul este nedeplasat și puterea sa este monotonă, intervalele date în (95) sînt cele mai scurte.

Rezultatele din aceste paragrafe se datoresc lui R. Gnanadesikan, (1959).

§ 13. Testul lui Lehman

13.1. Definirea testului

Fie X_{ij} ($i = 1, 2, \dots, k, j = 1, 2, \dots, N_i$) elementele a k selecții de volum N_i ($i = 1, 2, \dots, k$) asupra variabilelor independente $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$. Pentru verificarea ipotezei

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2$$

față de alternativele

$$H: \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2 (i \neq j)$$

cu μ_i nespecificați, Lehman (1959) a construit statistica

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^k n_{\alpha} \left[\ln \frac{S_{\alpha}}{n_{\alpha}} - \frac{1}{n} \sum_{\beta=1}^k n_{\beta} \ln \frac{S_{\beta}}{n_{\beta}} \right]^2$$

unde $S_j = \sum_{\alpha=1}^{N_j} (X_{j\alpha} - \bar{X}_j)^2$ cu $\bar{X}_j = \frac{1}{N_j} \sum_{\alpha=1}^{N_j} X_{j\alpha}$, $n_j = N_j - 1$ și $n = \sum_{\alpha=1}^k n_{\alpha}$.

Testul bazat pe statistica L respinge ipoteza H_0 cînd valoarea observată a statisticii L este mai mare decît o constantă fixată.

13.2. Puterea testului

TEOREMA 19 (Sugiura, Nagao (1969)). În cazul a două selecții, testul L este nedeplasat dacă și numai dacă volumele celor două selecții sînt egale.

Demonstrație. Pentru $k = 2$, L devine

$$L = \frac{n_1 n_2}{2n} \left(\ln \frac{n_2 S_1}{n_1 S_2} \right)^2$$

iar regiunea de acceptare a testului L este

$$c < n_2 S_1 / n_1 S_2 < \frac{1}{c}$$

pentru constanta c ($0 < c < 1$).

Ramachandran (1958) a arătat că o regiune de acceptare de forma

$$c_1 < \frac{n_2 S_1}{n_1 S_2} < c_2, \quad 0 < c_1 < c_2$$

conduce la un test nedreptat dacă și numai dacă este îndeplinită condiția

$$\frac{c_2^{n_1}}{\left(1 + \frac{n_1 c_2}{n_2}\right)^n} = \frac{c_1^{n_1}}{\left(1 + \frac{n_1 c_1}{n_2}\right)^n}.$$

În cazul $c_1 = c$ și $c_2 = \frac{1}{c}$ această condiție devine :

$$c^{n_1 - n_2} = \left(\frac{n_2 + n_1 c}{n_1 + n_2 c}\right)^n$$

pentru $0 < c < 1$.

Mai rămâne de arătat că această condiție admite o soluție numai pentru $n_1 = n_2$.

Logaritmînd în ambii membri, obținem :

$$(n_1 - n_2) \ln c = n \ln \frac{n_2 + n_1 c}{n_1 + n_2 c}$$

Ținem seama că $n_1 + n_2 = n$, $v = \frac{n_1}{n}$, $\frac{n_2}{n} = 1 - v$ și introducem

funcția :

$$f(v) = (2v - 1) \ln c - \ln \frac{1 + v(c - 1)}{v(1 - c) + c}.$$

Se observă că $f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) = 0$ și că deci singura soluție nebanală este $v = \frac{1}{2}$ adică $n_1 = n_2$.

13.3. Repartiția limită a statisticii L

În cazul ipotezelor alternative, pentru determinarea repartiției limită vom reprezenta statistica L cu ajutorul statisticilor

$$T_\alpha = \left[\frac{S_\alpha}{\sigma_\alpha^2} - n_\alpha \right] : \sqrt{2n_\alpha}$$

deoarece se știe că statistica

$$\frac{S_\alpha}{\sigma_\alpha^2} = \sum_{\beta=1}^{N_\alpha} (X_{\alpha\beta} - \bar{X}_\alpha)^2 / \sigma_\alpha^2$$

are la limită o repartiție $\chi^2(n_\alpha)$ și deci T_α are o repartiție normală.

Are loc

TEOREMA 20. (Sugiura, Nagao, (1969)). În ipotezele alternative $H_\delta : \sigma_\alpha = \sigma + \theta_\alpha n^{-\delta}$, $\alpha = 1, 2, \dots, k$, $\delta > 0$ repartiția asimptotică a statisticii L pentru $n \rightarrow \infty$ și cu $\frac{n_\alpha}{n}$ fixați este următoarea

1) Când $0 < \delta < \frac{1}{2}$, $n^{\delta - \frac{1}{2}} \left[L - \frac{n}{2} \sum_{\alpha=1}^k \frac{n_\alpha}{n} (\bar{\sigma}_\alpha - \bar{\sigma})^2 \right]$ are asimptotic o repartiție

$$N \left(0, \sigma_L^{*2} = \frac{8}{\sigma^2} \sum_{\alpha=1}^k \rho_\alpha (\theta_\alpha - \bar{\theta})^2 \right)$$

$$\text{cu } \bar{\theta} = \sum_{\alpha=1}^k \rho_\alpha \theta_\alpha, \bar{\sigma}_\alpha = \ln \sigma_\alpha^2 \text{ și } \bar{\sigma} = \sum_{\alpha=1}^k \rho_\alpha \bar{\sigma}_\alpha, \rho_\alpha = \frac{n_\alpha}{n}.$$

2) Când $\delta > \frac{1}{2}$, L are asimptotic o repartiție $\chi^2(k-1)$.

3) Când $\delta = \frac{1}{2}$, L are asimptotic o repartiție χ^2 necentrată cu $k-1$ grade de libertate și parametrul de necentricitate

$$\delta_L^2 = \frac{2}{\sigma^2} \sum_{\alpha=1}^k \rho_\alpha (\theta_\alpha - \bar{\theta})^2.$$

Demonstrație. Fie $\rho_\alpha = \frac{n_\alpha}{n}$ cu $\sum_{\alpha=1}^k \rho_\alpha = 1$. Avem

$$\ln \frac{S_\alpha}{n_\alpha} = \ln \sigma_\alpha^2 + \ln \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n_\alpha}} T_\alpha \right)$$

care pentru $n \rightarrow \infty$ și ρ_α fixat aduce pe L la forma

$$\begin{aligned} L &= \frac{n}{2} \sum_{\alpha=1}^k \rho_\alpha (\bar{\sigma}_\alpha - \bar{\sigma})^2 + n \sum_{\alpha=1}^k \rho_\alpha (\bar{\sigma}_\alpha - \bar{\sigma}) \ln \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n_\alpha}} T_\alpha \right) + \\ &+ \frac{n}{2} \sum_{\alpha=1}^k \rho_\alpha \left[\ln \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n_\alpha}} T_\alpha \right) - \sum_{\beta=1}^k \rho_\beta \ln \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n_\beta}} T_\beta \right) \right]^2 = \\ &= \frac{n}{2} \sum_{\alpha=1}^k \rho_\alpha (\bar{\sigma}_\alpha - \bar{\sigma})^2 + \sqrt{2n} \sum_{\alpha=1}^k \sqrt{\rho_\alpha} (\bar{\sigma}_\alpha - \bar{\sigma}) T_\alpha + \\ &+ \sum_{\alpha=1}^k (\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_\alpha + 1) T_\alpha^2 - \left(\sum_{\alpha=1}^k \rho_\alpha^2 T_\alpha \right)^2 + o_p(n^{-\frac{1}{2}}), \end{aligned}$$

Scriem șirul de alternative sub forma :

$$H_\delta : \sigma_\alpha = \sigma + \theta_\alpha n^{-\delta} \text{ pentru } \alpha = 1, 2, \dots, k, \delta > 0,$$

unde nu toți θ se presupun egali.

Pentru $0 < \delta < \frac{1}{2}$ expresia lui L devine

$$L = \frac{n}{2} \sum_{\alpha=1}^k \rho_\alpha (\bar{\sigma}_\alpha - \bar{\sigma})^2 + \frac{2^{\frac{3}{2}} n^{\frac{1}{2}-\delta}}{\sigma} \sum_{\alpha=1}^k (\theta_\alpha - \bar{\theta}) \sqrt{\rho_\alpha} T_\alpha + o(n^{\frac{1}{2}-\delta})$$

unde $\bar{\theta} = \sum_{\alpha=1}^k \rho_\alpha \theta_\alpha$ sau izolind cel de-al 2-lea termen rezultă că

$$n^{\delta-\frac{1}{2}} \left[L - \frac{n}{2} \sum_{\alpha=1}^k \rho_\alpha (\bar{\sigma}_\alpha - \bar{\sigma})^2 \right]$$

are asimptotic o repartiție $N\left(0, \sigma^{*2} = (8/\sigma^2) \sum_{\alpha=1}^k \rho_\alpha (\theta_\alpha - \bar{\theta})^2\right)$.

Dacă $\delta > \frac{1}{2}$ scriem statistica L în forma următoare

$$L = \sum_{\alpha=1}^k T_\alpha^2 - \left(\sum_{\alpha=1}^k \sqrt{\rho_\alpha} T_\alpha \right)^2 + o(n^{\frac{1}{2}-\delta}),$$

ceea ce arată că L are asimptotic o repartiție $\chi^2(k-1)$.

Pentru $\delta = \frac{1}{2}$, expresia lui L devine :

$$L = \sum_{\alpha=1}^k \left[T_\alpha + \frac{\sqrt{2\rho_\alpha}}{\sigma} (\theta_\alpha - \bar{\theta}) \right]^2 - \left(\sum_{\alpha=1}^k \sqrt{\rho_\alpha} T_\alpha \right)^2 + o(n^{-\frac{1}{2}})$$

și în acest caz statistica L urmează la limită o repartiție

$$\chi^2(k-1, \delta_L^2 = \frac{2}{\sigma^2} \sum_{\alpha=1}^k \rho_\alpha (\theta_\alpha - \bar{\theta})^2).$$

§ 14. Testul lui Bartlett

14.1. Definirea testului

O altă statistică folosită pentru verificarea ipotezei

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2$$

față de alternativele

$$H: \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2 (i \neq j) \text{ și } \mu_i \text{ nespecificate}$$

este statistica M construită de Bartlett (1957) și care are expresia

$$M = n \ln \left(\sum_{\alpha=1}^k \frac{S_{\alpha}^2}{n} \right) - \sum_{\alpha=1}^k n_{\alpha} \ln \frac{S_{\alpha}^2}{n_{\alpha}}.$$

TEOREMA 21. *Testul M este un test nedepășat.*

TEOREMA 22. (Pitman (1939)). *Testul M este echivalent cu testul modificat al raportului de verosimilități în care se înlocuiește volumul selecției N_{α} cu gradele de libertate n_{α} .*

14.2. Repartiția limită a statisticii M

Are loc

TEOREMA 23 (Sugiura, Nagao (1969)). *În șirul de ipoteze alternative*

$$k_{\delta}: \sigma_{\alpha} = \sigma + \frac{\theta_{\alpha}}{n^{\delta}}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, k, \quad \delta > 0$$

repartiția asimptotică a statisticii M pentru $n \rightarrow \infty$ și $\frac{n_{\alpha}}{n}$ constanți este

$$1) \text{ pentru } 0 < \delta < \frac{1}{2},$$

$$n^{\delta - \frac{1}{2}} \left[M - n \ln \left(\sum_{\alpha=1}^k \rho_{\alpha} \sigma_{\alpha}^2 / \prod_{\alpha=1}^k \sigma_{\alpha}^{2\rho_{\alpha}} \right) \right]$$

are asimptotic o repartiție $N \left(0, \sigma_M^2 = \frac{8}{\sigma^2} \sum_{\alpha=1}^k \rho_{\alpha} (\theta_{\alpha} - \bar{\theta})^2 \right)$;

$$2) \text{ pentru } \delta > \frac{1}{2}, \quad M \text{ are asimptotic o repartiție } \chi^2(k-1);$$

$$3) \text{ pentru } \delta^2 = \frac{1}{2}, \quad M \text{ are asimptotic o repartiție}$$

$$\chi^2 \left(k-1, \delta_M^2 = \frac{2}{\sigma^2} \sum_{\alpha=1}^k \rho_{\alpha} (\theta_{\alpha} - \bar{\theta})^2 \right).$$

Demonstrație. Plecînd de la aceleași considerente ca și în teorema 20 scriem statistica M sub forma

$$M = n(\ln \bar{\sigma} - \bar{\sigma}) + \sqrt{2n} \sum_{\alpha=1}^k (v_{\alpha} - 1) \sqrt{\rho_{\alpha}} T_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^k T_{\alpha}^2 - \left(\sum_{\alpha=1}^k \sqrt{\rho_{\alpha}} v_{\alpha} T_{\alpha} \right)^2 + o(n^{-\frac{1}{2}}),$$

cu

$$\bar{\sigma} = \sum_{\alpha=1}^k \rho_{\alpha} \sigma_{\alpha}^2 \text{ și } v_{\alpha} = \sigma_{\alpha}^2 / \sigma$$

și în mod asemănător ca în teorema 20 obținem cele trei cazuri.

§ 15. Procedee pentru verificarea ipotezei existenței unei relații liniare între dispersii

15.1. Introducere

Fie s_i^2 , $i = 1, 2$, și 3 variabile aleatoare independente, astfel încît f_i , $s_i^2 / \sigma_i^2 \sim \chi^2(f_i)$. Ne propunem să verificăm ipoteza

$$H_0: \sigma_3^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

față de ipoteza alternativă

$$H_1: \sigma_3^2 > \sigma_1^2 + \sigma_2^2.$$

15.2. Definirea testului

Naik (1974 b) folosește, pentru verificarea ipotezei H_0 față de H_1 , statistica

$$(96) \quad Z(l_1, l_2) = \frac{s_3^2}{l_1 s_1^2 + l_2 s_2^2},$$

unde l_1, l_2 sînt constante pozitive care depind de f_1, f_2 și f_3 și de pragul de semnificație α stabilit,

$$l_1 = F_{1-\alpha}(f_3, f_1)$$

(97)

$$l_2 = F_{1-\alpha}(f_3, f_2)$$

și respinge ipoteza H_0 dacă

$$(98) \quad Z(l_1, l_2) > 1.$$

15.3. Volumul și funcția de putere a testului

Dacă este adevărată ipoteza H_0 , atunci $Z(l_1, l_2)$ are următoarea structură

$$(99) \quad Z(l_1, l_2) = \frac{\chi^2(f_3)}{r_1 \omega_1 \chi^2(f_1) + r_2 \omega_2 \chi^2(f_2)}$$

unde: variabilele χ^2 sînt independente,

$$(100) \quad r_1 = (f_3/f_1) l_1, \quad r_2 = (f_3/f_2) l_2,$$

$$\omega_1 = \sigma_1^2 / (\sigma_1^2 + \sigma_2^2), \omega_2 = \sigma_2^2 / (\sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

Repartiția statisticilor de tipul (99) a fost obținută printre alții de Robbins și Pitman (1949) și Box (1954).

Volumul testului este

$$(101) \quad P[Z(l_1, l_2) > 1 | H_0] = P[\chi^2(f_3) > r_1 \omega_1 \chi^2(f_1) + r_2 \omega_2 \chi^2(f_2)],$$

și este prin urmare o funcție de parametrul $R = \sigma_1^2 / \sigma_2^2$.

Funcția de putere a testului este dată de membrul drept al relației (101) cu ω înlocuit cu ω'

$$(102) \quad \omega'_1 = \sigma_1^2 / \sigma_3^2, \quad \omega'_2 = \sigma_2^2 / \sigma_3^2.$$

15.4. Proprietăți optime ale testului pentru $\alpha \leq 0,05$

TEOREMA 24. Dacă $(X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i})$ este o selecție asupra unei variabile $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ atunci problema verificării ipotezei H_0 față de H_1 este invariantă în raport cu grupul G al transformărilor de tipul

$$(103) \quad X'_{ij} = c(X_{ij} - a_i), \quad -\infty < a_i < \infty, \quad c > 0.$$

Demonstrația rezultă ținînd seama că

$$s_i^2 = \sum_j (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 / (n_i - 1), \quad f_i = n_i - 1, \quad i = 1, 2, \text{ și } 3.$$

TEOREMA 25. Puterea este o funcție monoton crescătoare de σ_3^2 .
Demonstrație. Funcția de putere a testului este

$$(104) \quad P[\chi^2(f_3) > r_1 \omega'_1 \chi^2(f_1) + r_2 \omega'_2 \chi^2(f_2)].$$

Variabila aleatoare

$$r_1 \omega'_1 \chi^2(f_1) + r_2 \omega'_2 \chi^2(f_2) = (\sigma_3^2)^{-1} (r_1 \sigma_1^2 \chi^2(f_1) + r_2 \sigma_2^2 \chi^2(f_2))$$

este o funcție descrescătoare de σ_3^2 . Teorema este demonstrată.

TEOREMA 26. (Naik (1974 b)). *Printre testele bazate pe statistici de forma*

$$(105) \quad Z(c_1, c_2) = \frac{s_3^2}{c_1 s_1^2 + c_2 s_2^2}$$

unde c_1, c_2 sînt constante pozitive, testul propus este C.M.P. test de volum $\leq \alpha$ pentru verificarea ipotezei H_0 față de H_1 .

Demonstrație. C.M.P. test pentru verificarea ipotezei H_0 față de o ipoteză alternativă particulară H_1 bazat pe statistica $Z(c_1, c_2)$ este dat de: respingem H_0 dacă

$$(106) \quad \frac{p(z(c_1, c_2)|H_1)}{p(z(c_1, c_2)|H_0)} > a \text{ o constantă pozitivă,}$$

unde $p(z|H_0)[p(z|H_1)]$ este densitatea de repartiție a variabilei cînd este adevărată ipoteza $H_0[H_1]$. Avem

$$(107) \quad p(z|H_0) = \int_0^\infty \int_0^\infty c \exp\{-(zu)/2\} (zu)^{\frac{1}{2}(t_3-2)} u p[\chi^2(f_1)] \times \\ \times p[\chi^2(f_2)] d\chi^2(f_1) d\chi^2(f_2),$$

unde

$$(108) \quad u = d_1 \chi^2(f_1) + d_2 \chi^2(f_2), \\ d_1 = d_1 \omega_1 f_3 / f_1, \quad d_2 = c_2 \omega_2 f_3 / f_2$$

și $p[\chi^2(f)]$ este densitatea de repartiție a unei variabile $\chi^2(f)$.

De asemenea

$$(109) \quad p(z|H_1) = \int_0^\infty \int_0^\infty c \exp\{-(zau)/2\} (zau)^{\frac{1}{2}(t_3-2)} a u p[\chi^2(f_1)] \times \\ \times p[\chi^2(f_2)] d\chi^2(f_1) d\chi^2(f_2),$$

unde

$$(110) \quad a = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) / \sigma_3^2 < 1.$$

Dacă punem

$$v_1 = z\chi^2(f_1), \quad v_2 = z\chi^2(f_2),$$

membrul stîng al relației (106) se poate scrie

$$(111) \quad \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty \exp\{-(a/2)(d_1v_1 + d_2v_2)\} (d_1v_1 + d_2v_2)^{\frac{1}{2}f_3} p(v_1/z) p(v_2/z) dv_1 dv_2}{\int_0^\infty \int_0^\infty \exp\{-(d_1v_1 + d_2v_2)/2\} (d_1v_1 + d_2v_2)^{\frac{1}{2}f_3} p(v_1/z) p(v_2/z) dv_1 dv_2} =$$

$$= M_{f_3}[\exp\{(d_1v_1 + d_2v_2)(1-a)/2\}],$$

unde

$$(112) \quad f_z(v_1, v_2) =$$

$$= \frac{\exp[-\{(d_1v_1 + d_2v_2)/2 + (v_1 + v_2)/(2z)\}] (d_1v_1 + d_2v_2)^{\frac{1}{2}f_3} v_1^{\frac{1}{2}(f_1-2)} v_2^{\frac{1}{2}(f_2-2)}}{\int_0^\infty \int_0^\infty \exp[-\{(d_1v_1 + d_2v_2)/2 + (v_1 + v_2)/(2z)\}] (d_1v_1 + d_2v_2)^{\frac{1}{2}f_3} v_1^{\frac{1}{2}(f_1-2)} v_2^{\frac{1}{2}(f_2-2)} dv_1 dv_2}.$$

Familia $\{f_z(v_1, v_2)\}$ este o familie ordonată de densități (Lehmann (1955)) și

$$(113) \quad g(v_1, v_2) = \exp\{(d_1v_1 + d_2v_2)(1-a)/2\}$$

este o funcție crescătoare atât în v_1 cât și în v_2 . Prin urmare condiția

$$(114) \quad \frac{p(z|H_1)}{p(z|H_0)} > a \text{ o constantă pozitivă poate fi scrisă ca}$$

$$z > z_0.$$

C.M.P. test pentru verificare ipotezei H_0 , de volum $\leq \alpha$, față de orice alternativă H_1 , bazat pe $Z(c_1, c_2)$ poate fi scris sub forma

$$(115) \quad \text{Resping } H_0 \text{ dacă } Z(c_1, c_2) > 1,$$

unde c_1, c_2 sînt definite astfel încît volumul testului să nu depășească α . Puterea testului (115) poate fi mărită luînd c_1 și c_2 cît mai mici posibil. Însă c_1 nu poate fi mai mic decît l_1 definit în (97); dacă $c_1 < l_1$, volumul testului va fi mai mare decît α pentru valori ale raportului σ_2^2/σ_1^2 apropiate de zero.

Analog c_2 nu poate fi mai mic decît l_2 . Teorema este demonstrată.

Naik (1974 b) tablează puterea testului pentru verificarea ipotezei H_0 față de H_1 pentru $f_3 = 4$ și $\alpha = 0,05$, (a) $f_1 = f_2 = 8$; (b) $f_1 = f_3 = 12$.

15.5. Alte ipoteze alternative

Naik (1974 b) mai verifică ipoteza H_0 față de alternativele

$H_2 = \sigma_3^2 < \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ cu procedeul A : cînd $f_3 > 2$,

B : cînd $f_3 \leq 2$,

(tabelul 3)

$H_3 : \sigma_3^2 \neq \sigma_1^2 + \sigma_2^2$

TABELUL 3

Ipoteza alternativă	Statistica test	Testul	Volumul testului
		Resping H_0 dacă	
H_2	Procedeu A (116) $Z(l'_1, l'_2) = \frac{s_3^2}{l'_1 s_1^2 + l'_2 s_2^2}$ unde (117) $\begin{cases} l'_1 = F_{1-\alpha}(f_3, f_1) \\ l'_2 = F_{1-\alpha}(f_3, f_2) \end{cases}$ sînt α-punctele inferioare ale variabilei F	(118) $Z(l'_1, l'_2) < 1$	(119) $P[\chi^2(f_3) < (r'_1 \omega_1 \chi^2(f_1) + r'_2 \omega_2 \chi^2(f_2))]$, unde (120) $r'_i = (f_3/f_i) l'_i, i = 1, 2$
	Procedeu B (121) $Z(l') = \frac{s_3^2}{l'(s_1^2 + s_2^2)}$ unde $l' > 0$ este definit astfel încît volumul max. al testului este α $l' = F_{1-\alpha}(2, f_1 + f_2), f_3 = 2$	(122) $Z(l') < 1$	este tabelat pentru $f_3 = 2$ și $f_1 = f_2 = 4$ și $f_1 = 4, f_2 = 8$ și $\alpha = 0,05$

Pentru verificarea ipotezei H_0 față de ipoteza alternativă H_3 la un prag α stabilit se poate obține un test cu ajutorul principiului de intersecție a lui Roy și Bose (1953).

Se poate obține un test pentru verificarea ipotezei H_0 față de H_3 la pragul α prin aplicarea simultană a două teste

- un test pentru verificarea ipotezei H_0 față de H_1 la pragul α_1 și
 - un test pentru verificarea ipotezei H_0 față de H_1 la pragul α_2 ,
- cu condiția $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$.

Mai întii considerăm cazul $f_3 > 2$. Pentru verificarea ipotezei H_0 față de H_3 construim două statistici, $Z(l_1, l_2)$ și $Z(l'_1, l'_2)$ unde

$$(123) \quad \begin{aligned} l_1 &= F_{\alpha_1}(f_3, f_1), \quad l_2 = F_{\alpha_2}(f_3, f_2) \\ l'_1 &= F_{1-\alpha_1}(f_3, f_1), \quad l'_2 = F_{1-\alpha_2}(f_3, f_2) \end{aligned}$$

și $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$. Testul pentru verificarea ipotezei H_0 față de H_1 de prag $\leq \alpha$ este dat de

$$(124) \quad \text{Resping } H_0 \text{ dacă } Z(l_1, l_2) > 1 \text{ sau } Z(l'_1, l'_2) < 1.$$

În aplicarea acestei metode presupunem că $\alpha_1 \leq 0,5$ și $\alpha_2 \leq 0,1$, astfel că testele individuale pentru H_0 față de H_1 și H_0 față de H_2 au volume ce nu depășesc α_1 și respectiv α_2 .

În cazul $f_3 \leq 2$, procedeul de verificare este același ca în (100) cu singura deosebire că $Z(l'_1, l'_2)$ este înlocuită prin $Z(l')$. Statistica $Z(l')$ este definită astfel încît testul pentru verificarea ipotezei H_0 față de H_2 are volumul $\leq \alpha$.

Observație. În acest caz nu avem nici o restricție în alegerea pragurilor α_1 și α_2 a testelor individuale; ele trebuie să satisfacă numai condiția $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha, 0 < \alpha < 1$.

15.6. Generalizări

Pentru verificarea ipotezei

$$H_0: \sigma_{k+1}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_k^2, \quad k > 2$$

față de

$$H_1 = \sigma_{k+1}^2 > \sum_{i=1}^k \sigma_i^2,$$

Naik (1794 b) folosește statistica

$$(125) \quad Z(l_1, l_2, \dots, l_k) = s_{k+1}^2 / \sum_{i=1}^k l_i s_i^2$$

unde

$$(126) \quad l_i = F_{\alpha}(f_{k+1}, f_i), \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Se respinge ipoteza H_0 , dacă

$$(127) \quad Z(l_1, l_2, \dots, l_k) > 1.$$

Pentru verificarea ipotezei H_0 față de

$$H_2 = \sigma_{k+1}^2 < \sum_{i=1}^k \sigma_i^2 \text{ cînd } f_{k+1} > 2$$

Naik (1974 b) folosește statistica $Z(l'_1, l'_2, \dots, l'_k)$, unde

$$(128) \quad l'_i = F_{1-\alpha}(f_{k+1}, f_i), \quad i = 1, 2, \dots, k$$

și se respinge ipoteza H_2 dacă

$$Z(l'_1, \dots, l'_k) < 1.$$

Pentru $\alpha \leq 0,1$, volumul acestui test nu depășește α .
Cînd $f_{k+1} \leq 2$, testul este bazat pe

$$(129) \quad Z(l') = s_{k+1}^2 / l' \left(\sum_{i=1}^k s_i^2 \right)$$

unde l' este ales astfel încît volumul maxim al testului este α .
Cînd $f_{k+1} = 2$, constanta l' este dată de

$$(130) \quad l' = F_{1-\alpha} \left(2, \sum_{i=1}^k f_i \right).$$

Volumul acestui test nu depășește α pentru orice valoarea a lui α , $0 < \alpha < 1$. Cînd $f_{k+1} = 1$ și f_i , $i = 1, 2, \dots, k$ sînt egale cu f , constanta l' este

$$(131) \quad l' = F_{1-\alpha}(1, kf).$$

Cînd f_i nu sînt egale, o valoare aproximativă pentru l' este

$$(132) \quad l' = F_{1-\alpha}(1, kf^*)$$

unde $f^* = \max\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$. În acest caz volumul maxim al testului va fi mai mic decît α .

Diferența $\{\alpha - \text{volumul testului}\}$ crește odată cu creșterea lui k .

§ 16. Teste privind media repartiției log-normală cu dispersia cunoscută

16.1. Considerații preliminare

DEFINIȚIA 2. Dacă $y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$, atunci x definită prin $y = \ln x$ este o variabilă log-normală cu densitatea

$$(133) \quad \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{x} \exp \left[-\frac{(\ln x - \mu_y)^2}{2\sigma_y^2} \right].$$

Avem :

$$(134) \quad \begin{aligned} \mu_x &= \exp [\mu_y + \sigma_y^2/2] \\ \sigma_x^2 &= \{\exp[2\mu_y + \sigma_y^2]\} \{[\exp \sigma_y^2] - 1\}, \text{ (Finney (1941))} \end{aligned}$$

de unde :

$$(135) \quad \begin{aligned} \mu_y &= \ln \frac{\mu_x^2}{\sigma_x^2 + \mu_x^2} \\ \sigma_y^2 &= \ln \left[1 + \frac{\sigma_x^2}{\mu_x^2} \right]. \end{aligned}$$

Dacă presupunem că σ_x^2 este cunoscută, se pune problema verificării ipotezei $H_2: \mu_x = \mu_{0x}$, față de alternativa simplă $H_1: \mu_x = \mu_{1x} > \mu_{0x}$. Fără a micșora generalitatea, luăm $\sigma_x^2 = 1$, deoarece este posibil să se facă o schimbare de variabile, împărțind variabila x , prin abaterea medie pătratică σ_x care este cunoscută. În acest caz, ecuațiile (135) se pot scrie :

$$(136) \quad \begin{aligned} \mu_y &= \ln \frac{\mu_x^2}{1 + \mu_x^2} \\ \sigma_y^2 &= \ln \left[1 + \frac{1}{\mu_x^2} \right] \end{aligned}$$

16.2. Procedee pentru verificarea ipotezei H_0 .

I. Primul procedeu este determinat de faptul că variabila aleatoare $y = \ln x$ este repartizată normal. Dacă ipoteza H_0 este adevărată, $y \sim N(\mu_{0y}, \sigma_{0y}^2)$ unde μ_{0y} și σ_{0y}^2 reprezintă valorile din (136) în $\mu_x = \mu_{0x}$. Deoarece $\mu_{1y} > \mu_{0y}$, unde μ_{1y} este valoarea lui μ_y pentru $\mu_x = \mu_{1x}$, se poate verifica ipoteza

$$H'_0: \mu_y = \mu_{0y} \text{ față de } H'_1: \mu_y = \mu_{1y} > \mu_{0y},$$

folosind statistica $(\bar{y} - \mu_{0y})/\sqrt{n}/\sigma_{0y}$. În acest caz regiunea critică este

$$(137) \quad T_1 = \left\{ (x_1, \dots, x_n); \frac{\sum \ln x_i}{n} - \mu_{0y} \geq u_{1-\alpha} \frac{\sigma_{0y}}{\sqrt{n}} \right\}$$

unde $u_{1-\alpha}$ este cuantila de ordin $1 - \alpha$ a variabilei $N(0, 1)$.

Dacă ipoteza $H_1: \mu_x > \mu_{0x}$ este adevărată, $\bar{y} = \sum \ln x_i / n \sim N(\mu_y, \sigma_y^2/n)$, astfel încât funcția caracteristică operatoare este

$$(138) \quad \beta_{T_1} = P \left\{ \bar{y} \leq u_{1-\alpha} \frac{\sigma_{0y}}{\sqrt{n}} + \mu_{0y} \right\} = P \left\{ \frac{\bar{y} - \mu_{0y}}{\sigma_y/\sqrt{n}} \leq \frac{u_{1-\alpha} \sigma_{0y} - (\mu_y - \mu_{0y})\sqrt{n}}{\sigma_y} \right\}$$

Din (136), obținem

$$(139) \quad \beta_{T_1} = \Phi \left\{ \frac{u_{1-\alpha} \sqrt{\ln \left(1 + \frac{1}{\mu_{0x}^2} \right)} - \left[\ln \frac{\mu_x^2}{\sqrt{1 + \mu_x^2}} - \ln \frac{\mu_{0x}^2}{\sqrt{1 + \mu_{0x}^2}} \right] \sqrt{n}}{\ln \left(1 + \frac{1}{\mu_x^2} \right)} \right\}$$

care depinde de μ_{0x} , μ_x , α și n .

Se observă că pentru $\mu_x = \mu_{0x}$, $\beta_{T_1} = \Phi(u_{1-\alpha})$ pentru orice n . Când $\mu_x > \mu_{0x}$, atunci

$$\ln \frac{\mu_x^2}{\sqrt{1 + \mu_x^2}} - \ln \frac{\mu_{0x}^2}{\sqrt{1 + \mu_{0x}^2}} = \ln \frac{\mu_x^2}{\sqrt{1 + \mu_x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \mu_{0x}^2}}{\mu_{0x}^2}$$

este întotdeauna pozitivă.

Deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_{T_1} = \begin{cases} \Phi(u_{1-\alpha}) = 1 - \alpha & \mu_x = \mu_{0x} \\ \Phi(-\infty) = 0 & \mu_x > \mu_{0x} \end{cases}$$

cea ce arată funcția caracteristică operatoare a testului T_1 , își păstrează forma pentru $n \rightarrow \infty$.

Funcția caracteristică a testului T_1 a fost calculată pentru următoarele patru cazuri:

TABELUL 4

n	μ_{0x}	α
4	1	0,05
4	10	0,05
25	1	0,05
25	10	0,05

Valorile calculate sînt date în tabelul 5 și curbele corespunzătoare sînt reprezentate în figura 2 unde s-a folosit următoarea notație:

$$(140) \quad \delta = \mu_x - \mu_{0x}$$

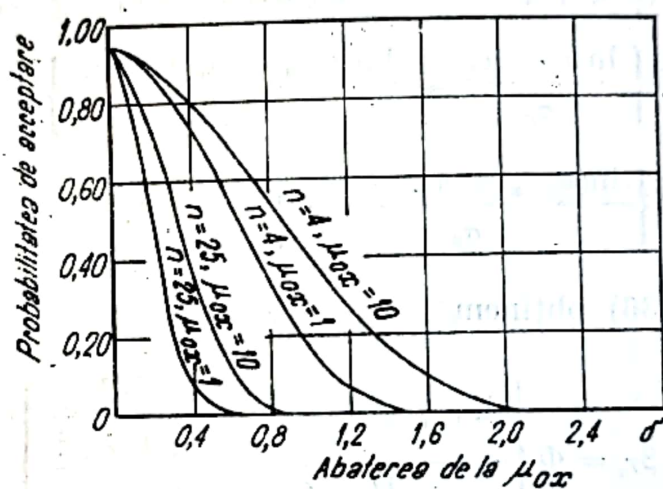


Fig. 2

Puterea nu este invariantă la o translație în μ_{0x} . Testul este mai puternic cînd valoarea specificată în ipoteza nulă este mică, decît atunci cînd este mare.

TABELUL 5

Probabilitățile ca testul T_1 , pe baza unei selecții de volum n , să accepte $\mu_x = \mu_{0x}$, cînd media este $\mu_{0x} + \delta$.

δ/μ_{0x}	$n = 4$		$n = 25$	
	1	10	1	10
0,0	0,95	0,95	0,95	0,95
0,2	0,88	0,89	0,53	0,74
0,4	0,74	0,81	0,06	0,37
0,6	0,55	0,68	0,00	0,10
0,8	0,33	0,54	0,00	0,01
1,0	0,16	0,39		
1,2	0,05	0,26		
1,4	0,01	0,16		
1,6	0,00	0,09		
1,8	0,00	0,03		
2,0	0,00	0,01		

II. Considerînd greșit variabila log-normală $x \sim N(\mu_x, 1)$ obținem regiunea critică

$$T_2 = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid \frac{\bar{x} - \mu_{0x}}{1/\sqrt{n}} \geq u_{1-\alpha} \right\}$$

Mai întii vom determina funcția caracteristică operatorie a testului T_2 în cazul $n = 1$.

Dacă media lui x este $\mu_x > \mu_{0x}$, atunci $y = \ln x \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$ unde

$$\mu_y = \ln[\mu_x^2 / (1 + \mu_x^2)] \text{ și } \sigma_y^2 = \ln[1 + 1/\mu_x^2]$$

Urmează că

$$\begin{aligned} \beta_{T_2} &= P(x \leq u_{1-\alpha} + \mu_{0x}) = P[\ln x \leq \ln(u_{1-\alpha} + \mu_{0x})] = \\ &= P\left\{ \frac{\ln x - \mu_y}{\sigma_y} \leq \frac{\ln(u_{1-\alpha} + \mu_{0x}) - \mu_y}{\sigma_y} \right\} = \\ &= \Phi\left\{ \frac{\ln(u_{1-\alpha} + \mu_{0x}) - \mu_y}{\sigma_y} \right\} \end{aligned}$$

Folosind (136) obținem

$$(141) \quad \beta_{T_2} = \Phi\left\{ \frac{\ln(u_{1-\alpha} + \mu_{0x}) - \ln \frac{\mu_x^2}{\sqrt{1 + \mu_x^2}}}{\sqrt{\ln\left(1 + \frac{1}{\mu_x^2}\right)}} \right\}$$

expresie ce depinde numai de μ_{0x} , μ_x și α .

Funcția caracteristică operatorie a testului T_2 se obține mai greu în cazul în care $n > 1$, deoarece compunerea a n variabile log-normale este dificilă. În acest caz se folosește dezvoltarea lui Edgeworth (teorema II.29) pentru repartiția variabilei

$$X = \frac{\xi_n - M(\xi_n)}{\sigma_{\xi_n}}$$

unde $\xi_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, variabilele x_i fiind independente, iar

$$(142) \quad \begin{aligned} F(X) &= \Phi(X) - \frac{1}{3!} \gamma'_1 \frac{\Phi^{(3)}(X)}{\sqrt{n}} + \frac{1}{4!} \gamma'_2 \frac{\Phi^{(4)}(X)}{n} + \\ &+ \frac{10}{6!} \gamma'^2_1 \frac{\Phi^{(6)}(X)}{n} + o(n^{-\frac{3}{2}}) \end{aligned}$$

unde γ'_1 și γ'_2 sînt oblicitatea și respectiv excesul variabilei X .

Pentru variabila log-normală, oblicitatea și excesul sînt

$$(143) \quad \begin{aligned} \gamma'_1 &= (e^{\sigma_v^2} - 1)^{1/2} (e^{\sigma_v^2} + 2) \\ \gamma'_2 &= (e^{\sigma_v^2} - 1)[(e^{\sigma_v^2})^3 + 3(e^{\sigma_v^2})^2 + 6(e^{\sigma_v^2}) + 6] \end{aligned}$$

Pentru $n > 1$, funcția caracteristică operatoare a testului T_2 este

$$(144) \quad \begin{aligned} \beta_{T_2} &= P \left\{ \bar{x} \leq u_{1-\alpha} \frac{1}{\sqrt{n}} + \mu_{0x} \right\} = \\ &= P \left\{ \frac{\bar{x} - \mu_x}{1/\sqrt{n}} \leq \frac{u_{1-\alpha}\sqrt{n} + n\mu_{0x} - n\mu_x}{\sqrt{n}} \right\} = \\ &= P \{ X \leq u_{1-\alpha} - \delta\sqrt{n} \} \end{aligned}$$

Prin urmare, pentru $n > 1$, funcția caracteristică operatoare pentru T_2 , cu o medie $\mu_x > \mu_{0x}$ se poate scrie

$$(145) \quad \beta_{T_2} = F(u_{1-\alpha} - \delta\sqrt{n})$$

unde $F(X)$ este dată de (142) cu coeficienți determinați de (143).

TABELUL 6

Probabilitățile ca testul T_2 , pe baza unei selecții de volum n , să accepte $\mu_x = \mu_{0x}$ cînd media este $\mu_{0x} + \delta$

δ/μ_{0x}	$n = 4$		$n = 25$	
	1	10	1	10
0,0	0,96	0,95	0,94	0,95
0,2	0,92	0,89	0,77	0,74
0,4	0,85	0,80	0,39	0,36
0,6	0,73	0,68	0,07	0,09
0,8	0,58	0,53	0,00	0,01
1,0	0,41	0,37		
1,2	0,23	0,23		
1,4	0,11	0,12		
1,6	0,04	0,06		
1,8	0,00	0,02		
2,0	0,00	0,01		

Curbele corespunzătoare funcției caracteristice operatoare sînt reprezentate în figura 3.

Se observă că procedeul T_2 dă un prag α satisfăcător cînd valoarea specificată de ipoteza nulă este mare (sau, în general, cînd raportul dintre valoarea specificată de ipoteza nulă și abatere este mare).

III. Al treilea procedeu decurge din lema Neyman-Pearson și este caracterizat de regiunea critică :

$$(146) \quad T_3 = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid \frac{P(x, \mu_x)}{P(x, \mu_{0x})} \geq k \right\}$$

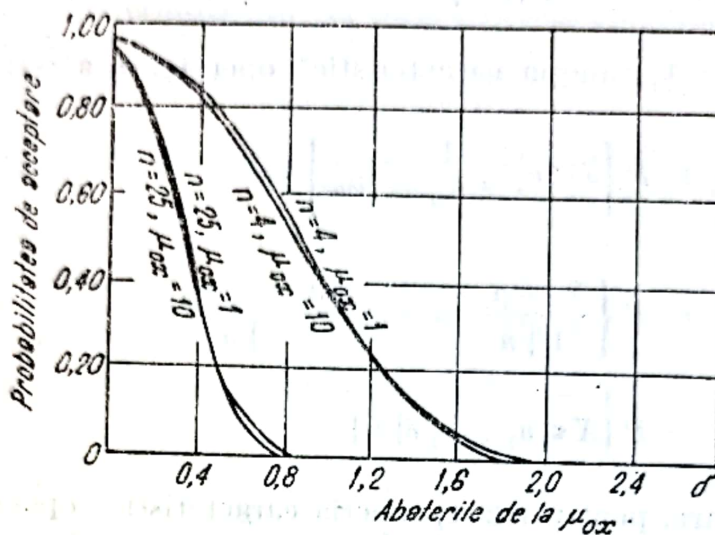


Fig. 3

unde k este astfel încît :

$$(147) \quad \int_{T_3} P(x, \mu_{0x}) dx = \alpha$$

Inegalitatea

$$\frac{P(x, \mu_x)}{P(x, \mu_{0x})} \geq k$$

se mai poate scrie

$$\sum \left(\ln x_i - \frac{b}{a} \right)^2 \leq k'$$

unde

$$(148) \quad a = \left(\frac{\sigma_{1y}}{\sigma_{0y}} \right)^2 - 1, \quad b = \left(\frac{\sigma_{1y}}{\sigma_{0y}} \right)^2 \mu_{0y} - \mu_{1y},$$

$$k' = \left[2 \sigma_{1y}^2 \ln k - 2 \sigma_{1y}^2 \ln \left(\frac{\sigma_{0y}}{\sigma_{1y}} \right)^n + n \mu_{1y}^2 - n \left(\frac{\sigma_{1y}}{\sigma_{0y}} \right)^2 \mu_{0y}^2 \right] \frac{1}{a} + \frac{nb^2}{a^2}$$

Valoarea lui k' se determină astfel încît (147) este satisfăcută. Dacă ipoteza H_0 este adevărată, $u = \ln x - (b/a) \sim N \left(\mu_{0y} - \frac{b}{a}, \sigma_{0y}^2 \right)$.

Variabila $\chi'^2 = \sum u_i^2 / \sigma^2$ unde u_i sînt independente și repartizate $N(\alpha_i, \sigma^2)$ cu α_i nu toți nuli, este repartizată χ^2 necentrat cu densitatea dată de (I.70), adică

$$(149) \quad f(\chi'^2) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\chi'^2} e^{-\frac{1}{2}\lambda}}{2^{\frac{n}{2}}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\chi'^2)^{\frac{1}{2}n+j-1} \lambda^j}{2^{2j} j! \Gamma\left(\frac{n}{2} + j\right)},$$

unde $\lambda = \sum \alpha_i^2 / \sigma^2$. Deci k' este ales astfel încît

$$(150) \quad \int_0^{k'/\sigma_{0y}^2} f(\chi'^2) d\chi'^2 = \alpha,$$

unde parametrul λ din funcția $f(\chi'^2)$ este dat de

$$\lambda = n \left(\mu_{0y} - \frac{b}{a} \right)^2 / \sigma_{0y}^2$$

Dacă valoarea lui k'/σ_{0y}^2 care satisface (150) este notată $\chi_{0,\alpha}'^2$ atunci regiunea critică (146) se poate scrie

$$(151) \quad T_3 = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid \frac{\sum [\ln x_i - b/a]^2}{\sigma_{0y}^2} \leq \chi_{0,\alpha}'^2 \right\}$$

Se observă că acest test, cu toate că este C.M.P. pentru verificarea ipotezei H_0 față de alternativa simplă H_1 , nu este U.C.M.P. față de orice clasă de alternative, deoarece repartitia statisticii test conține cantitatea b/a care depinde nu numai de μ_{0x} , dar și de μ_{1x} .

Cînd media lui x este $\mu_x > \mu_{0x}$, atunci variabila $\ln x - (b/a) \sim N(\mu_y - (b/a), \sigma_y^2)$, unde μ_y și σ_y^2 sînt determinați din (148). Prin urmare variabila

$$(152) \quad \chi'^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(\ln x_i - b/a)^2}{\sigma_y^2} \sim \chi^2(n, \lambda = n[\mu_y - (b/a)]^2 / \sigma_y^2)$$

Ținînd seama de cele de mai sus, funcția caracteristică operatoare a lui T_3 pentru $\mu_x > \mu_{0x}$ devine

$$(153) \quad \begin{aligned} \beta_{T_3} &= P\{\chi_0'^2 \geq \chi_{0,\alpha}'^2\} \\ &= P\left\{ \frac{\sigma_{0y}^2}{\sigma_{1y}^2} \cdot \frac{\sum (\ln x_i - b/a)^2}{\sigma_{0y}^2} \geq \frac{\sigma_{0y}^2}{\sigma_{1y}^2} \cdot \chi_{0,\alpha}'^2 \right\} \\ &= P\{\chi'^2 \geq c \chi_{0,\alpha}'^2\}, \end{aligned}$$

unde

$$(154) \quad c = \frac{\sigma_{0y}^2}{\sigma_{1y}^2}$$

și

$$\lambda = \frac{n(\mu_y - b/a)^2}{\sigma_y^2}$$

Din teorema lui Lindeberg-Levy rezultă că pentru $n \rightarrow \infty$, χ'^2 dat de (152) este repartizată

$$N \left\{ n \left[1 + \left(\frac{\mu_y - b/a}{\sigma_y} \right)^2 \right], 2n \left[1 + 2 \left(\frac{\mu_y - b/a}{\sigma_y} \right)^2 \right] \right\}.$$

Pentru valori mari ale lui n , funcția caracteristică operatorie pentru orice $\mu_x > \mu_{0x}$ este aproximată de

$$\begin{aligned} \beta_{T_s} &= P\{\chi'^2 \geq u_{1-\alpha} \sqrt{2n(1 + 2\mu_0^2)} + (1 + \mu_0^2)n\} = \\ &= P\left\{ \frac{\chi'^2 - (1 + \mu^2)n}{\sqrt{2n(1 + 2\mu^2)}} \geq \frac{u_{1-\alpha} \sqrt{2(1 + 2\mu_0^2)} - (\mu^2 - \mu_0^2)\sqrt{n}}{\sqrt{2(1 + 2\mu^2)}} \right\} = \\ &= \Phi \left\{ \frac{u_{1-\alpha} \sqrt{2(1 + 2\mu_0^2)} - (\mu^2 - \mu_0^2)\sqrt{n}}{\sqrt{2(1 + 2\mu^2)}} \right\}, \end{aligned}$$

unde am notat

$$\mu = \frac{\mu_y - b/a}{\sigma_y}$$

iar μ_0 reprezintă valoarea lui μ pentru $\mu_x = \mu_{0x}$.

Funcția caracteristică operatorie a fost calculată pentru următoarele cazuri:

TABELUL 7

n	μ_{0x}	μ_{0x}	α
4	1	2	0,05
4	1	10	0,05
4	10	11	0,05
25	1	2	0,05

Valorile obținute sînt date în tabelul 8 și curbele corespunzătoare în figura 4.

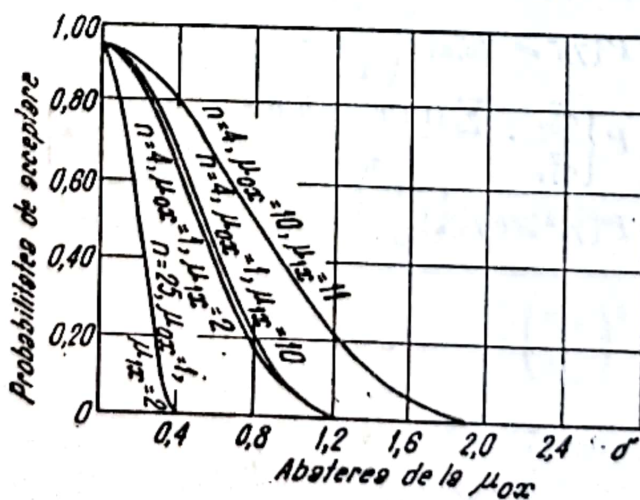


Fig. 4

TABELUL 8

Probabilitățile ca testul T_3 , pe baza unei selecții de volum n , pentru verificarea ipotezei $H_0: \mu_x = \mu_{0x}$ față de $H_1: \mu_x = \mu_{1x}$, să accepte ipoteza H_0 când $\mu_x = \mu_{0x} + \delta$

δ/μ_{1x}	$n = 4$			$n = 25$
	$\mu_{0x} = 1$		$\mu_{0x} = 10$	$\mu_{0x} = 1$
	2	10	11	2
0,0	0,95	0,95	0,95	0,95
0,1				0,79
0,2	0,85		0,90	0,49
0,3				0,14
0,4	0,64	0,67	0,80	0,02
0,6	0,39		0,67	0,00
0,8	0,17		0,52	0,00
1,0	0,06	0,08	0,36	
1,2	0,01		0,19	
1,4	0,00	0,00	0,12	
1,6	0,00	0,00	0,05	

16.3. Proprietăți asimptotice ale testelor pentru valori mari ale ipotezei nule

Dacă $x \sim N(\mu_x, 1)$, atunci C.M.P. test pentru verificarea ipotezei H_0 față de H_1 are regiunea critică:

$$(155) \quad T = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid \frac{\bar{x} - \mu_{0x}}{1/\sqrt{n}} \geq u_{1-\alpha} \right\}$$

și funcția caracteristică operatorie va fi:

$$(156) \quad \beta_T = \Phi(u_{1-\alpha} - \delta\sqrt{n})$$

Funcțiile operatorie caracteristice pentru T , T_1 , T_2 și T_3 pentru $n = 4$ și $\mu_{0x} = 1$ ($\mu_{0x} = 10$) sînt reprezentate împreună în figura 5 (figura 6). Examinarea acestor curbe arată că puterea depinde nu numai de testul folosit, dar și de valoarea specificată de ipoteza nulă. Graficele funcțiilor

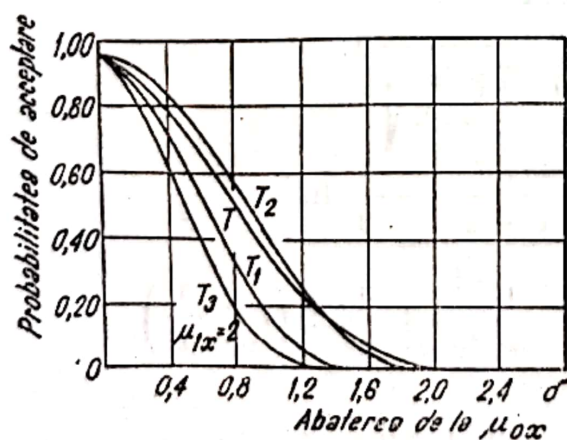


Fig. 5

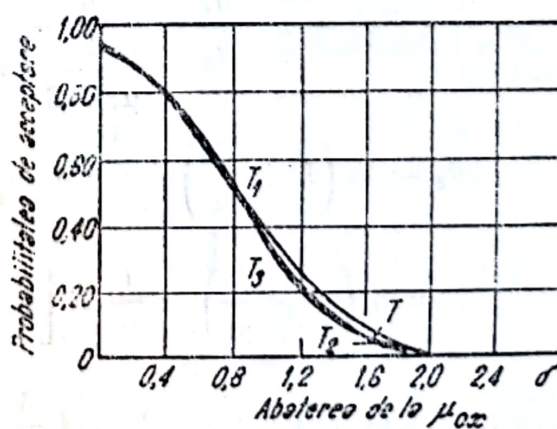


Fig. 6

caracteristice operatorie ale testelor T_1 , T_2 și T_3 date în figura 6 sînt mai concentrate în jurul graficului funcției operatorie a testului T decît acelea date în figura 5. Prin urmare atunci cînd media crește, cele trei funcții caracteristice operatorie se apropie de funcția caracteristică operatorie a testului T .

În cele ce urmează vom folosi notația μ , în loc de μ_{0x} și o ipoteză alternativă $\mu_x > \mu_{0x}$ se va scrie

$$\mu_x = \mu + \delta,$$

unde δ reprezintă numărul de abateri de la medie ipotetică.

Ținînd seama de cele de mai sus, ipoteza nulă $H_0: \mu_x = \mu_{0x}$ și alternativă $H_1: \mu_x = \mu_{1x} > \mu_{0x}$, devin

$$(157) \quad \begin{aligned} H_0: \delta &= 0 \\ H_1: \delta &= \delta_1 = \mu_{1x} - \mu_{0x} \end{aligned}$$

TEOREMA 27 (Severo (1957))

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \beta_{T_1} = \beta_T$$

Demonstrație. Funcția caracteristică operatorie a testului T_1 se poate scrie

$$\beta_{T_1} = \Phi \left\{ \frac{u_{1-\alpha} \sqrt{\ln \left(1 + \frac{1}{\mu^2} \right)} - \sqrt{n} \left[\ln \frac{(\mu + \delta)^2}{\sqrt{1 + (\mu + \delta)^2}} - \ln \frac{\mu^2}{\sqrt{1 + \mu^2}} \right]}{\sqrt{\ln \left(1 + \frac{1}{(\mu + \delta)^2} \right)}} \right\}$$

$$= \Phi \left\{ \frac{a_1 u_{1-\alpha} - a_2 \sqrt{n}}{a_3} \right\}$$

și ținînd seama că :

$$\frac{a_1}{a_3} = \frac{\frac{1}{\mu} \sqrt{1 + 0(\mu^{-2})}}{\frac{1}{\mu + \delta} \sqrt{1 + 0(\mu + \delta)^{-2}}} \rightarrow 1,$$

$$a_2 = \ln \left(1 + \frac{\delta}{\mu} \right) + \frac{1}{2} \ln \frac{(\mu + \delta)^2}{1 + (\mu + \delta)^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{\mu^2}{1 + \mu^2} =$$

$$= \ln \left(1 + \frac{\delta}{\mu} \right) - \frac{1}{2} \ln \left[1 + \frac{1}{(\mu + \delta)^2} \right] + \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{\mu^2} \right)$$

$$= \frac{\delta}{\mu} + 0(\mu^{-2})$$

și

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{\frac{\delta}{\mu} + o(\mu^{-2})}{\frac{1}{\mu + \delta} \sqrt{1 + o(\mu + \delta)^{-2}}} \rightarrow \delta$$

obținem

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \beta_{T_1} = \Phi(u_{1-\alpha} - \delta\sqrt{n}) = \beta_T$$

TEOREMA 28 (Severo(1957))

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \beta_{T_2} = \beta_T.$$

Demonstrație. Funcția caracteristică operatoare a testului T_2 dată în (145) se poate scrie

$$(158) \quad \beta_{T_2} = \int_{C_{T_2}} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\ln x_i - \mu_y)^2}{2\sigma_y^2} \right] \frac{dx_i}{x_i}$$

sau, punind $w_i = x_i - \mu_i$

$$\beta_{T_2} = \int_{T'_2} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{[\ln(w_i + \mu) - \mu_y]^2}{2\sigma_y^2} \right\} \frac{dw_i}{w_i + \mu},$$

unde

$$T'_2 = \{(w_1, \dots, w_n), \bar{w} \leq u_{1-\alpha}/\sqrt{n}\}$$

Se observă că integrantul din (158) este o densitate astfel încât rămâne să arătăm că și limita acestei densități este de asemenea o densitate. De asemenea, deoarece limita produsului este produsul limitelor, este necesar să considerăm numai comportarea unuia din factori. Fie

$$\begin{aligned} f_\mu(w_i, \delta) &= \\ &= \frac{\exp \left\{ -\left[\ln(w_i + \mu) - \ln \frac{(\mu + \delta)^2}{\sqrt{1 + (\mu + \delta)^2}} \right]^2 / 2 \ln \left(1 + \frac{1}{(\mu + \delta)^2} \right) \right\}}{\sqrt{2\pi \ln \left[1 + \frac{1}{(\mu + \delta)^2} \right]}} \cdot \frac{1}{w_i + \mu} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} a_1} \cdot \exp \left[-\frac{a_2^2}{2a_3} \right] \end{aligned}$$

Pentru o valoare w_i fixată, pentru $\mu \rightarrow \infty$

$$(159) \quad a_1 = (w_i + \mu) \sqrt{\ln \left(1 + \frac{1}{(\mu + \delta)^2} \right)} = \frac{w_i + \mu}{\mu + \delta} \sqrt{1 + o(\mu + \delta)^{-2}} \rightarrow 1$$

și cum

$$\begin{aligned} a_2 &= \ln \left(\frac{w_i + \mu}{\mu + \delta} \right) + \frac{1}{2} \ln \left[1 + \frac{1}{(\mu + \delta)^2} \right] = \\ &= \ln \left[1 + \frac{w_i - \delta}{\mu + \delta} \right] + o(\mu + \delta)^{-2} = \\ &= \frac{w_i - \delta}{\mu + \delta} + o(\mu^{-2}), \\ a_3 &= \ln \left[1 + \frac{1}{(\mu + \delta)^2} \right] = \frac{1}{(\mu + \delta)^2} + o(\mu^{-4}), \end{aligned}$$

pentru w_i fixat

$$(160) \quad \frac{a_2^2}{a_3^2} \rightarrow (w_i - \delta)^2$$

Din (159) și (160) urmează că

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} f_{\mu}(w_i, \delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(w_i - \delta)^2}{2} \right]$$

care este o densitate.

Prin urmare

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow \infty} \beta_{T_2} &= \int_{w \leq u_{1-\alpha}/\sqrt{n}} \prod_1^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2}(w_i - \delta)^2 \right] dw_i = \\ &= \int_{-\infty}^{u_{1-\alpha}/\sqrt{n}} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{n(t - \delta)^2}{2} \right] dt = \Phi(u_{1-\alpha} - \delta\sqrt{n}) \end{aligned}$$

sau

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \beta_{T_2} = \beta_T.$$

COROLARUL 2(3). Variabila log-normală standardizată $w = x - \mu_x$ este asimptotic repartizată $N(0,1)$ când $\mu_x \rightarrow \infty$ ($\sigma_y^2 \rightarrow 0$).

Asemănător se demonstrează și

TEOREMA 29. $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \beta_{T_2} = \beta_T$

§ 17. Un test privind egalitatea mediilor a 2 populații log-normale în cazul coeficienților de dispersie omogeni

TEOREMA 30. (Craiu Mariana (1972)). Fie X_{ij} , $i = 1, 2$; $j = 1, \dots, n$, variabile independente provenind din populații repartizate log-normal cu media μ_i , dispersia $\sigma_i^2 = \beta^2 \mu_i^2$ unde β este coeficientul de dispersie.

Spațiul parametrilor fiind $0 < \mu_i < \infty$, $0 < \beta < \infty$, $i = 1, 2$, estimatorii de maximă verosimilitate pentru aceștia sînt:

$$(161) \quad \mu_1 = \bar{x}_1 e^s, \mu_2 = \bar{x}_2 e^s, \beta = \sqrt{e^{2s} - 1},$$

unde

$$(162) \quad \bar{x}_i = \sqrt[n]{x_{i1} x_{i2} \dots x_{in}}, \quad S = \frac{1}{4n} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n \ln^2 \frac{x_{ij}}{\bar{x}_i}$$

Demonstrație. Funcția de verosimilitate este

$$P = \frac{1}{(2\pi)^n \ln^n(1 + \beta^2) \prod_{i,j} x_{ij}} \exp - \frac{1}{2 \ln(1 + \beta^2)} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n \ln^2 \frac{x_{ij} \sqrt{1 + \beta^2}}{\mu_i}$$

Anulând derivatele de ordinul întâi ale acesteia obținem sistemul

$$\ln \prod_{j=1}^n \frac{x_{ij} \sqrt{1 + \beta^2}}{\mu_i} = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$2n \ln(1 + \beta^2) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n \ln^2 \frac{x_{ij} \sqrt{1 + \beta^2}}{\mu_i}$$

cu soluțiile din enunțul teoremei.

Rămâne să arătăm că soluția (161) maximizează funcția de verosimilitate.

Calculul derivatelor de ordinul doi ne conduce pentru acestea la următoarele valori

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \mu_i^2} = \frac{C_n \sqrt{e^{2s} - 1}}{e^{3s} (2S)^{n+1} \bar{x}_i}, \quad i = 1, 2,$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \mu_1 \partial \mu_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial \beta^2} = -\frac{2nC(e^{2s} - 1)}{e^{4s} - (2S)^{n+1}} \left(\frac{1}{S} + 1 \right)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \beta \partial \mu_i} = \frac{C \sqrt{e^{2s} - 1}}{e^{3s} (2S)^{n+1}} \cdot \frac{n}{\bar{x}_i}, \quad i = 1, 2,$$

unde cu C am notat

$$C = \frac{1}{(2\pi)^n \prod_{i,j} x_{ij}} \exp \left(-\frac{1}{4S} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n \ln^2 \frac{x_{ij}}{\bar{x}_i} \right)$$

Deoarece $e^{2s} - 1 > 2$, $S > 0$ și

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 P}{\partial \beta^2} < 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 P}{\partial \beta^2} & \frac{\partial^2 P}{\partial \beta \partial \mu_1} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial \mu_1 \partial \beta} & \frac{\partial^2 P}{\partial \mu_1^2} \end{vmatrix} = \frac{n^2 C^2 (e^{2s} - 1)}{(2S)^{2n+1} \bar{x}_1^2 e^{6s}} \left(\frac{3}{2S} + 1 \right) > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 P}{\partial \beta^2} & \frac{\partial^2 P}{\partial \beta \partial \mu_1} & \frac{\partial^2 P}{\partial \beta \partial \mu_2} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial \mu_1 \partial \beta} & \frac{\partial^2 P}{\partial \mu_1^2} & \frac{\partial^2 P}{\partial \mu_1 \partial \mu_2} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial \mu_2 \partial \beta} & \frac{\partial^2 P}{\partial \mu_2 \partial \mu_1} & \frac{\partial^2 P}{\partial \mu_2^2} \end{vmatrix} = \frac{C^3(e^{2s} - 1) n^3}{e^{8s} (2S)^{3n+1} \bar{x}_1^2 \bar{x}_2^2} \left(-\frac{1}{S} - 2 \right) < 0$$

ceea ce ne arată că funcția de verosimilitate este maximizată de soluția (161), aceasta constituind estimarea parametrilor μ_1, μ_2, β .

TEOREMA 31. (Craiu Mariana (1972)). *Fie $x_{ij}, i = 1, 2, j = 1, \dots, n$, independente, repartizate log-normal cu media $\mu, \sigma^2 = \beta^2 \mu, \mu > 0, \beta > 0$. În acest caz estimatorii de maximă verosimilitate sînt*

$$(163) \quad \mu = \sqrt{\bar{x}_1 \bar{x}_2} e^{s^*}, \quad \beta = \sqrt{e^{2s^*} - 1},$$

unde

$$(164) \quad s^* = \frac{1}{4n} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n \ln^2 \frac{x_{ij}}{\sqrt{\bar{x}_1 \bar{x}_2}}$$

Demonstrație. În acest caz funcția de verosimilitate este

$$P = \frac{1}{(2\pi)^n \prod_{i,j} x_{ij} \ln^n(1 + \beta^2)} \exp \left(-\frac{1}{2 \ln(1 + \beta^2)} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n \ln^2 \frac{x_{ij} \sqrt{1 + \beta^2}}{\mu} \right)$$

Ecuatiile care se obțin anulînd derivatele de ordinul întii sînt :

$$\left(\prod_{i=1}^2 \prod_{j=1}^n x_{ij} \right) (1 + \beta^2)^n = \mu^{2n}$$

$$4n \ln \frac{\mu}{\sqrt{\bar{x}_1 \bar{x}_2}} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n \ln^2 \frac{x_{ij}}{\sqrt{\bar{x}_1 \bar{x}_2}}$$

cu soluțiile (163).

Un calcul analog celui de la teorema 30 ne arată că soluția

$$\mu = \sqrt{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2} e^{s^*}, \quad \beta = \sqrt{e^{2s^*} - 1}$$

reprezintă estimațiile de maximă verosimilitate pentru parametrii μ și β .

Avînd în vedere acestea putem enunța

TEOREMA 32. (Craiu Mariana (1972)). *Dacă x_{ij} sînt variabile aleatoare independente, repartizate log-normal cu mediile μ_i și dispersiile $\sigma_i^2 = \mu_i^2 \cdot \beta^2, i = 1, 2$, și $j = 1, 2, \dots, n$, raportul de verosimilitate pentru verificarea ipotezei*

$H_0(\mu_1 = \mu_2)$ față de alternativa $H_1(\mu_1 \neq \mu_2)$ este

$$l = \left(\frac{S}{S^*} \right)^n$$

unde S și S^* au expresiile de mai înainte.

Capitolul XVII

STUDIUL ANALITIC AL PROBLEMEI BEHRENS-FISHER

§ 1. Introducere

Fie $X_1, \dots, X_{n_1} (Y_1, \dots, Y_{n_2})$ o selecție asupra unei variabile aleatoare $X[Y] \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) [N(\mu_2, \sigma_2^2)]$. Problema Behrens-Fisher constă în verificarea ipotezei

$$(1) \quad H_0: \mu_1 = \mu_2$$

și este una dintre cele mai simple și mai cunoscute probleme din teoria testelor similare.

În problema Behrens-Fisher există patru statistici suficiente

$$\bar{X}, \bar{Y}, s_1^2 \text{ și } s_2^2.$$

§ 2. Proprietăți ale testelor omogene similare pentru problema Behrens-Fisher

2.1. Definiții

Dacă în problema Behrens-Fisher

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$$

atunci ne reîntoarcem la problema lui Student; verificăm ipoteza H_0 pe baza unei selecții $x_1, \dots, x_{n_1} (y_1, \dots, y_{n_2})$ asupra unei variabile aleatoare $X[Y] \sim N(\mu_1, \sigma^2) [N(\mu_2, \sigma^2)]$.

Testul similar clasic nealeator are regiune critică

$$(2) \quad \left| \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}} \sqrt{\frac{(n_1 + n_2 - 2)(n_1 + n_2)}{n_1 n_2}} \right| > C_0$$

C_0 fiind o constantă.

Statistica similară care apare în (2) poate fi reprezentată sub forma

$$(3) \quad \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_2} \left(n_1 \left(\frac{s_1}{s_2} \right)^2 + 1 \right)^{-1/2}$$

sau cu alte cuvinte depinde numai de statisticile

$$(4) \quad \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_2} \text{ și } \frac{s_1}{s_2}.$$

DEFINIȚIA 1. Testele de forma

$$\phi\left(\frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_2}, \frac{s_1}{s_2}\right)$$

poartă numele de teste omogene.

DEFINIȚIA 2. Un test omogen similar nealeator este un test similar a cărui regiune critică are forma

$$(5) \quad G\left(\frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_2}, \frac{s_1}{s_2}\right) \geq 0,$$

unde G este o funcție măsurabilă Lebesgue.

2.2. Repartiția vectorului $(\xi, \eta) = \left(\frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_2}, \frac{s_1}{s_2}\right)$, $n_1 \geq 2$, $n_2 \geq 2$

Variabila aleatoare

$$X_1 = (\bar{x} - \bar{y}) / \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

este independentă de s_1^2 și s_2^2 , iar corolarul III.2 ne spune că $X_1 \sim N(0, 1)$.

Conform corolarului III.3 variabilele aleatoare independente $u = \frac{n_1 s_1^2}{\sigma_1^2}$ și $v = \frac{n_2 s_2^2}{\sigma_2^2}$ sînt repartizate $\chi^2(n_1 - 1)$, respectiv $\chi^2(n_2 - 1)$.

Fie $u_1 = \sqrt{u}$ și $v_1 = \sqrt{v}$. Variabilele aleatoare X_1, u_1, v_1 sînt independente și au densitățile de repartiție

$$p(X_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{X_1^2}{2}\right)$$

$$q(u_1) = \frac{1}{2^{\frac{n_1-3}{2}} \Gamma\left(\frac{n_1-1}{2}\right)} u_1^{n_1-2} \exp\left(-\frac{u_1^2}{2}\right), \quad u_1 > 0$$

$$r(v_1) = \frac{1}{2^{\frac{n_2-3}{2}} \Gamma\left(\frac{n_2-1}{2}\right)} v_1^{n_2-2} \exp\left(-\frac{v_1^2}{2}\right), \quad v_1 > 0.$$

Fie

$$\tilde{x} = \frac{X_1}{v_1}, \quad \tilde{y} = \frac{u_1}{v_1}, \quad \tilde{z} = v_1.$$

Atunci $X_1 = \tilde{x} \cdot \tilde{z}$, $u_1 = \tilde{y} \tilde{z}$, $v_1 = \tilde{z}$ și

$$\frac{D(X_1, u_1, v_1)}{D(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})} = \begin{vmatrix} \tilde{z} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{z} & 0 \\ \tilde{x} & \tilde{y} & 1 \end{vmatrix} = \tilde{z}^2.$$

De aici rezultă că pentru fiecare valoare x_0 și fiecare $y_0 > 0$ densitatea de repartiție comună a variabilelor $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ este

$$\rho(\tilde{x}, \tilde{y}) = K_{n_1 n_2} \int_0^\infty \tilde{y}^{n_1-2} \tilde{z}^{n_1+n_2-2} \exp \left[-\frac{\tilde{z}^2}{2} (1 + \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) \right] d\tilde{z},$$

unde

$$K_{n_1 n_2} = \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^{\frac{n_1+n_2-5}{2}} \Gamma\left(\frac{n_1-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n_2-1}{2}\right)}.$$

Integrind în raport cu $\tilde{z}$, găsim că:

$$\int_0^\infty \tilde{z}^{n_1+n_2-2} \exp \left[-\frac{\tilde{z}^2}{2} (1 + \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) \right] d\tilde{z} = \frac{K'_{n_1 n_2}}{(1 + \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)^{\frac{n_1+n_2-1}{2}}},$$

unde

$$K'_{n_1 n_2} = 2^{\frac{n_1+n_2-3}{2}} \Gamma\left(\frac{n_1+n_2-1}{2}\right).$$

De aici

$$(6) \quad \rho(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{C}_{n_1 n_2} \frac{\tilde{y}^{n_1-2}}{(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 1)^{\frac{n_1+n_2-1}{2}}}.$$

unde

$$\tilde{C}_{n_1 n_2} = K'_{n_1 n_2} K_{n_1 n_2} = \frac{2\Gamma\left(\frac{n_1+n_2-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n_2-1}{2}\right)}.$$

Punind $\theta = \frac{n_2 \sigma_1^2}{n_1 \sigma_2^2}$, obținem

$$\tilde{x} = \frac{\xi}{\sqrt{1+\theta}}, \quad \tilde{y} = \frac{\eta}{\sqrt{\theta}}.$$

Dacă prin $\varphi(\xi, \eta)$ notăm funcția indicator a regiunii critice $G(\xi, \eta) \geq 0$, atunci funcția de putere se scrie

$$(7) \quad M(\varphi|\theta) = \iint_{\Omega} \varphi(\tilde{x} \sqrt{1+\theta}, \tilde{y} \sqrt{\theta}) \rho(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y} = \alpha,$$

unde α este pragul de semnificație a testului, iar Ω este întregul semiplan

$$-\infty < \tilde{x} < \infty, \quad \tilde{y} \geq 0.$$

Să punem :

$$N = \frac{n_1 + n_2 - 1}{2}$$

și să ne întoarcem la variabilele ξ și η .

Atunci (7) se scrie

$$(8) \quad \iint_{\Omega} \varphi(\xi, \eta) \frac{\eta^{n_1-2} d\xi d\eta}{[\theta^2 + \theta(1 + \xi^2 + \eta^2) + \eta^2]^N} = C(n_1, n_2) \alpha \theta^{-\frac{n_2}{2}} (1 + \theta)^{-N + \frac{1}{2}},$$

unde $C(n_1, n_2) > 0$. Aceasta este identitatea de bază pentru testele omogene similare nealeatoare pentru problema Behrens-Fisher.

DEFINIȚIA 3. Spunem că am determinat o familie de teste nealeatoare similare continui cu regiunile critice $W_c = \{G(\xi, \eta) \geq C\}$, dacă am construit o funcție continuă $G(\xi, \eta)$ astfel ca pentru fiecare C dat și pentru fiecare valoare a parametrului θ , $p_c = P[(\xi, \eta) \in W_c]$ să nu depindă de θ , deci repartiția $G(\xi, \eta)$ să nu depindă de θ .

Familiiile continui banale sînt generate de funcțiile $G(\xi, \eta) = \text{const.}$ Se poate arăta însă că nu există familii continui nebanale de teste similare pentru problemele Behrens-Fisher.

2.3. Axiomele lui Wald privind testele omogene

Wald (1955) a indicat un sistem de axiome ce definesc o parte dintre testele omogene.

Următoarele patru axiome ale lui Wald definesc regiunea critică W a testului omogen.

1) Regiunea critică W este situată în domeniul statisticilor suficiente $\bar{X}$, $\bar{Y}$, s_1^2 , s_2^2 sau, cu alte cuvinte, dacă

$$(x_1, x_2, \dots, x_{n_1}, y_1, y_2, \dots, y_{n_2}) \in W,$$

selecția $(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n_1}, y'_1, y'_2, \dots, y'_{n_2})$ va aparține de asemenea mulțimii W dacă

$$\bar{X}' = \bar{X}, \quad \bar{Y}' = \bar{Y}, \quad s_2'^2 = s_1^2, \quad s_1'^2 = s_2^2.$$

2) Dacă $(x_1, x_2, \dots, x_{n_1}; y_1, y_2, \dots, y_{n_2}) \in W$, pentru toate numerele

$$(x_1 + c, x_2 + c, \dots, x_{n_1} + c; y_1 + c, y_2 + c, \dots, y_{n_2} + c) \in W$$

3) Dacă $(x_1, x_2, \dots, x_{n_1}; y_1, y_2, \dots, y_{n_2}) \in W$, pentru toți $k \neq 0$

$$(kx_1, kx_2, \dots, kx_{n_1}; ky_1, ky_2, \dots, ky_{n_2}) \in W.$$

4) Dacă $(x_1, x_2, \dots, x_{n_1}; y_1, y_2, \dots, y_{n_2}) \in W$ și $(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n_1}; y'_1, y'_2, \dots, y'_{n_2})$ este o altă selecție astfel încît

$$|\bar{y}' - \bar{x}'| > |\bar{y} - \bar{x}|; \quad s_2'^2 = s_1^2, \quad s_1'^2 = s_2^2$$

atunci

$$(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n_1}; y'_1, y'_2, \dots, y'_{n_2}) \in W.$$

Aceste patru axiome implică că regiunea critică a testului trebuie să aibe forma

$$(9) \quad \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{s_2} \geq \varphi \left(\frac{s_1}{s_2} \right),$$

unde φ este o funcție univocă și măsurabilă.

Observații. i) Axioma 1) ne arată că regiunea W este determinată numai de valorile $\bar{x}, \bar{y}, s_1^2, s_2^2$.

ii) Axioma 2) antrenează că dacă $(\bar{x}, \bar{y}, s_1^2, s_2^2) \in W$, punctul $(\bar{x} - \bar{y}, 0, s_1^2, s_2^2) \in W$ sau cu alte cuvinte W este determinată numai de variabilele

$$(\bar{X} - \bar{Y}), s_1^2, s_2^2.$$

iii) Dacă în axioma 3) luăm $k = -1$, obținem că regiunea critică W este simetrică, fiind determinată numai de valorile :

$$|\bar{x} - \bar{y}|, s_1^2, s_2^2.$$

Luînd $k = \frac{1}{s_2}$, variabilele $\frac{|\bar{X} - \bar{Y}|}{s_2}$ și $\frac{s_1}{s_2}$ sînt suficiente și testul este omogen.

În planul variabilelor $\xi = \frac{|\bar{X} - \bar{Y}|}{s_2}$, $\eta = \frac{s_1}{s_2}$, W este simetrică și putem considera W numai în cadranul

$$\xi \geq 0, \eta \geq 0.$$

PROPOZIȚIA 1. Fiecare dreaptă orizontală $\eta = \eta_0$ ($\eta_0 > 0$) intersectează frontiera regiunii critice W în cadranul $\xi \geq 0, \eta \geq 0$ în cel mult un punct.

Demonstrație. Să presupunem că dreapta $\eta = \eta_0$ intersectează frontiera mulțimii W în două puncte

$$(\xi_1, \eta_0) \text{ și } (\xi_2, \eta_0) \text{ cu } \xi_2 > \xi_1 \geq 0.$$

Atunci există un punct (ξ_3, η_0) astfel încît

$$\xi_1 < \xi_3 < \xi_2$$

și $(\xi_3, \eta_0) \in W$. Fie $(\bar{x}, \bar{y}, s_1, s_2)$ și $(\bar{x}', \bar{y}', s'_1, s'_2)$ statisticile suficiente respective. Avem

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{s'_1}{s'_2} \quad \text{și} \quad \frac{\bar{x}' - \bar{y}'}{s'_2} > \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_2}.$$

Fie $k = s_1/s_2$. Considerăm punctul avînd componente statisticile suficiente $k\bar{x}, k\bar{y}, ks_1, ks_2$; acesta aparține mulțimii W . De asemenea avem

$$k = \frac{s'_1}{s'_2}; \quad ks_2 = s'_2 \quad \text{și} \quad \frac{\bar{x}' - \bar{y}'}{s'_2} > \frac{k\bar{x} - k\bar{y}}{ks_2}.$$

Atunci în baza axiomei 4) punctul (ξ_3, η_0) trebuie să aparțină mulțimii W , ceea ce este imposibil.

Urmează ca regiunea critică W din $\xi \geq 0, \eta \geq 0$ este de forma

$$(10) \quad \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{s_2} \geq \varphi\left(\frac{s_1}{s_2}\right)$$

unde funcția φ este univocă și măsurabilă, însă poate lua valori infinite.

2.4. Testul Fisher-Welch-Wald

DEFINIȚIA 4. Testele pentru care funcțiile φ din (10) sînt finite poartă numele de teste de tip Fisher-Welch-Wald.

Regiunile critice ale acestor teste se pot pune sub forma

$$(11) \quad \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}} \geq \varphi_1\left(\frac{s_1}{s_2}\right)$$

luînd în (10)

$$\varphi_1 = \varphi \left(1 + \frac{s_1^2}{s_2^2}\right)^{1/2}.$$

Wald (1955) a construit teste de tipul (10) aproximativ similare unde φ este o funcție rațională și pune problema construirii unui test similar exact pentru care funcția φ este o funcție analitică de $\eta = \frac{s_1}{s_2}$ pentru $\eta > 0$.

Considerînd cadranul $\xi \geq 0, \eta \geq 0$, testul (10) se scrie

$$(12) \quad \xi \geq \varphi(\eta).$$

TEOREMA 1 (Linnik (1966)). Dacă

- $\varphi(\eta)$ este continuă pentru $0 \leq \eta \leq 1$ și are o derivată care este peste tot finită în intervalul $0 \leq \eta \leq 1$ ($\varphi'(0)$ este luată la dreapta).
- pentru $1 \leq \eta \leq 2(M+1)$, unde

$$M = \sup_{0 \leq \eta \leq 1} \varphi(\eta)$$

funcția $\varphi(\eta)$ satisface condiția Lipschitz de primul ordin

$$-n_2 \geq 4,$$

atunci testul definit de (12) nu poate fi similar.

Observație. Dacă $\xi = \varphi(\eta)$ este frontiera unui test similar, $\varphi(\eta)$ nu poate fi analitică, nici derivabilă în intervalul $[0,1)$ și satisface condiția Lipschitz de primul ordin în intervalul finit indicat de teoremă.

Demonstrația acestei teoreme este bazată pe principiul prelungirii analitice, comportă numeroase transformări și tehnici analitice dificile. Demonstrația acestei teoreme se găsește în Linnik (1966).

În cele ce urmează prezentăm ideile principale ale demonstrației acestei teoreme.

Dacă testul (12) este similar, fie $\alpha \in (0,1)$ pragul său de semnificație. Are loc

LEMA 1 (Linnik (1967)). Avem

$$(13) \quad c_2 \alpha \leq \xi_0 = \varphi(0) \leq c_1 \alpha,$$

c_1, c_2 fiind constante pozitive.

Rolul volumelor n_1 și n_2 ale celor două selecții nu este simetric deoarece nici forma testului nu este. Putem însă, să schimbăm cele două selecții trecînd de la un test la altul cu ajutorul operației de *reinversare* pe care o prezentăm în cele ce urmează. Pentru un test dat

$$(14) \quad |\xi| \geq \varphi(\eta)$$

punem

$$\varphi_1(\eta) = \frac{\varphi(\eta)}{\sqrt{1+\eta^2}}$$

și (14) se scrie

$$|\xi| \geq \varphi_1(\eta) \sqrt{1+\eta^2},$$

unde

$$\frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{s_2} \geq \varphi_1 \left(\frac{s_1}{s_2} \right) \sqrt{1 + \frac{s_1^2}{s_2^2}}$$

ceea ce se poate scrie sub forma

$$(14') \quad \frac{|\bar{y} - \bar{x}|}{s_1} \geq \varphi_1 \left(\left(\frac{s_2}{s_1} \right)^{-1} \right) \sqrt{1 + \frac{s_2^2}{s_1^2}}.$$

(14') ne dă regiunea critică a testului în care rolul selecțiilor $(x_1, \dots, x_{n_1})$ și $(y_1, \dots, y_{n_2})$ este schimbat; acesta este testul

$$|\xi| > \varphi_1 \left(\frac{1}{\eta} \right) \sqrt{1 + \eta^2}$$

care corespunde testului inițial

$$|\xi| \geq \varphi_1(\eta) \sqrt{1 + \eta^2};$$

acest test are același prag de semnificație α . Aceasta este operația de reinversare a testelor.

LEMA 2. (Linnik (1967)). Fie (ξ_0, η_0) un punct de tangență la frontiera regiunii critice $\xi = \varphi(\eta)$ la o curbă critică nedegenerată oarecare. Dacă

- în punctul η_0 funcția $\varphi(\eta)$ posedă o derivată finită $\varphi'(\eta_0)$
- $(0, \eta'_0)$ este punctul unde tangenta critică la $\xi = \varphi(\eta)$ intersectează axa verticală $\xi = 0$.
- funcția $\varphi(\eta)$ satisface condiția lui Lipschitz de primul ordin într-o vecinătate deschisă oarecare a punctului η'_0 , atunci testul

$$|\xi| \geq \varphi(\eta)$$

nu poate să fie similar.

LEMA 3. (Linnik (1967)). Dacă frontiera regiunii critice $\xi = \varphi(\eta)$ este continuă în $[0, \eta_1]$, $\eta_1 > 1$, funcția $\varphi(\eta)$ se anulează în $(0, 1)$.

Demonstrație. $\varphi(0) = \xi_0 \neq 0$ (lema 1) Dacă funcția $\varphi(\eta)$ nu se anulează în $(0, 1]$, ea se nu anulează în segmentul $(0, \eta_1]$, $\eta_1 > 1$ deoarece $\varphi(\eta)$ este continuă în vecinătatea lui $\eta = 1$. Atunci testul este regulat în zero și în baza teoremei 2 din 2.5 nu poate să fie similar.

LEMA 4. (Linnik (1967)). Dacă

- funcția $\varphi(\eta)$ este continuă în $[0, 1)$,
- $\varphi'(\eta)$ există și este finită pentru $0 \leq \eta \leq 1$

și

$$-n_2 \geq 4$$

curba $\xi = \varphi(\eta)$ are un punct de tangență cu elipsa critică nedegenerată în punctul (ξ_0, η_0) unde $0 < \eta_0 < 1$.

Demonstrație $\varphi(0) = \xi_0 > 0$ (Lema 1). Presupunem că

$$(15) \quad \varphi'(0) > 0.$$

Atunci, plecând din punctul $(\xi_0, 0)$, curba $\xi = \varphi(\eta)$ are o tangentă orientată către dreapta. Cum $\varphi(\eta)$ trebuie să se anuleze în $(0, 1]$, această curbă trebuie să întoarcă la stînga pentru a reveni în punctul $(0, \eta'_0)$; $0 < \eta'_0 \leq 1$ unde $\varphi(\eta)$ se anulează. Într-un astfel de caz, curba trebuie să fie tangentă la o elipsă critică nedegenerată.

$$B(\xi, \eta) = D, \quad D > 1$$

care conține bucla curbei $\xi = \varphi(\eta)$ între $\eta = 0$ și $\eta = \eta'_0$.

Dacă $M = \sup_{0 \leq \eta \leq 1} \varphi(\eta)$ putem să majorăm ordonata η_2 a punctului de intersecție al elipsei critice $B(\xi, \eta) = D$ cu axa $\xi = 0$.
Într-adevăr, fie

$$\frac{\xi^2}{D-1} + \frac{\eta^2}{D} = 1$$

ecuația elipsei critice. Atunci

$$\eta_2 \leq \frac{3}{2} (M + 1).$$

Rămâne să demonstrăm inegalitatea (15). Demonstrația se compune dintr-un raționament statistic și din mai multe calcule analitice. Prezentăm numai partea statistică a demonstrației. Regiunea de acceptare a ipotezei H_0 va fi $|\xi| \leq \varphi(\eta)$ unde

$$(16) \quad \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{s_2} \leq \varphi \left(\frac{s_1^2}{s_2^2} \right).$$

(16) se poate pune sub forma

$$(17) \quad |X_1| \leq \sqrt{\frac{X_{n_2-1}^2}{1+\theta}} \varphi \left(\theta \frac{X_{n_1-1}^2}{X_{n_2-1}^2} \right),$$

unde $X_1 \sim N(0, 1)$, $X_{n_1-1}^2 \sim \chi^2(n_1 - 1)$, $X_{n_2-1}^2 \sim \chi^2(n_2 - 1)$, $X_{n_1-1}^2$ și $X_{n_2-1}^2$ fiind variabile aleatoare independente și $\theta = \frac{n_2 \sigma_1^2}{n_1 \sigma_2^2}$.

Fie

$$G(u) = P(|X_1| < u) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

$$g(u) = \frac{d}{du} G(u) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

Dacă $\alpha \in (0, 1)$ este pragul de semnificație al testului, avem

$$(18) \quad M \left\{ G \left[\sqrt{\frac{X_{n_2-1}^2}{1+\theta}} \varphi \left(\frac{X_{n_1-1}^2}{X_{n_2-1}^2} \right) \right] \right\} = 1 - \alpha, \quad 0 < \theta < \infty.$$

Am presupus că $\varphi(\eta)$ admite derivata (la dreapta) $\varphi'(0)$. Derivând formal cei doi membri ai relației (18) pentru $\theta = 0$, obținem

$$(19) \quad M \{ g[\varphi(0) X_{n_2-1}^2] \} \left[\sqrt{\frac{X_{n_2-1}^2}{1+\theta}} \frac{X_{n_1-1}^2}{X_{n_2-1}^2} \varphi'(0) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{X_{n_2-1}^2}{1+\theta}} \varphi(0) \right] = 0$$

Dacă această relație formală este adevărată, urmează că $\varphi'(0) > 0$, deoarece în caz contrar membrul stâng al relației (19) va fi negativ, cum $\varphi(0) > 0$ și $X_{n_1-1}^2 > 0$, $X_{n_2-1}^2 > 0$ cu probabilitatea 1. Deci pentru a demonstra (15) este suficient să demonstrăm (19). Demonstrația se găsește în Linnik (1966).

Sintem în măsură să demonstrăm teorema 1.

Demonstrația teoremei 1. Fie $n_2 \geq 4$. Lema 4 asigură existența punctului de tangentă al frontierei $\xi = \varphi(\eta)$ cu elipsa critică $B(\xi, \eta) = D$; $D > 1$. Această elipsă va intersecta axa $\xi = 0$ în punctul $(0, \eta'_0)$ unde $1 \leq \eta'_0 \leq \frac{3}{2}(M+1)$. Pentru $1 < \eta < 2(M+1)$ condițiile teoremei asigură că $\varphi(\eta)$ satisface condiția lui Lipschitz de primul ordin. Atunci lema 2 arată că testul nu poate să fie similar.

2.5. Proprietatea de regularitate zero

Fiind dat un test omogen

$$\phi\left(\frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_2}, \frac{s_1}{s_2}\right)$$

pentru problema Behrens-Fisher, este rezonabil să se pună condiția : „se acceptă, cu certitudine, ipoteza

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

dacă

$$\frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_2}$$

este suficient de mic”. Într-adevăr respingerea ipotezei H_0 când diferența mediilor normată este mică nu este rezonabilă; testele care antrenează o decizie de acest fel sînt neregulate. Pentru a preciza această noțiune introducem următoarea definiție pentru testele omogene $\phi\left(\frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_2}, \frac{s_1}{s_2}\right)$.

DEFINIȚIA 5. Vom spune că testul $\phi\left(\frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_2}, \frac{s_1}{s_2}\right)$ are proprietatea de regularitate zero dacă există un număr $\eta_0 = 1 + \eta_1 > 1$ astfel încît se poate trasa în jurul fiecărui punct $(\xi, \eta) : \xi = 0, 0 \leq \eta \leq \eta_0$ un cerc astfel încît dacă observațiile plasează punctul (ξ, η) în cerc, probabilitatea condiționată de respingere a ipotezei H_0 , cu ajutorul testului $\phi(\xi, \eta)$ este egală cu zero.

Dacă testul este nealeator, adică funcția $\phi(\xi, \eta)$ este egală totdeauna cu 0 sau 1 și dacă frontiera regiunii critice [regiunea în care $\phi(\xi, \eta) = 1$] constă dintr-un număr finit de curbe continui, atunci proprietatea de regularitate zero a testului constă în aceea că acesta nu respinge ipoteza H_0 cînd $\bar{x} - \bar{y} = 0$ și $s_1^2 + s_2^2 > 0$.

Presupunem că $\max(n_1, n_2) \geq 3$.

TEOREMA 2. (Linnik (1964), (1966)). Nu există teste aleatoare, omogene și similare pentru problema Behrens-Fisher care să posede proprietatea de regularitate zero.

Demonstrație. Ca și în cazul testelor nealeatoare, putem scrie

$$(20) \iint_{\Omega} \phi(\xi, \eta) \frac{\eta^{n_1-2} d\xi d\eta}{[0^2 + \theta(1 + \xi^2 + \eta^2) + \eta^2]^N} = C'_{n_1 n_2} \alpha \theta^{-\frac{n_2}{2}} (1 + \theta)^{-N + \frac{1}{2}}$$

unde

$$-N = \frac{n_1 + n_2}{2} - \frac{1}{2},$$

— $\alpha > 0$ este pragul de semnificație,

— $C'_{n_1 n_2} > 0$,

și

— Ω este semiplanul $-\infty < \xi < \infty, 0 < \eta < \infty$.

Egalitatea are loc pentru toate valorile $\theta > 0$.

Mai departe, prelungim analitic în raport cu $\theta = \sigma + i\tau$ pe domeniul Λ — planul complex, cu tăietura în lungul axei negative $\tau = 0, -\infty < \sigma < 0$.

Membrul stâng se prelungește de asemenea în acest domeniu; integrala va converge absolut și uniform în fiecare subdomeniu închis, care este situat în Λ .

În acest fel, egalitatea va avea loc în tot domeniul Λ a valorilor parametrului θ .

Aplicarea elementară a principiului de prelungire analitică și în acest caz arată că (20) este adevărată pentru tot domeniul al valorilor θ .

Punînd $P(\theta, \xi, \eta) = (\theta + A(\xi, \eta))(\theta + B(\xi, \eta))$ putem considera că

$$0 \leq A(\xi, \eta) \leq 1, \quad B(\xi, \eta) \geq 1.$$

Locurile geometrice date de ecuațiile:

$$A(\xi, \eta) = D, \quad B(\xi, \eta) = D$$

vor fi numite *curbe critice*.

Pentru $D < 1$, $A(\xi, \eta) = D$ obținem familia de hiperbole

$$(21) \quad \frac{\eta^2}{D} - \frac{\xi^2}{1-D} = 1.$$

Pentru $D = 1$ hiperbola degenerază în 2 drepte $\xi = 0, 1 \leq \eta < \infty$;

Pentru $D = 0$ în axa $\eta = 0$.

Pentru $D > 1$, $B(\xi, \eta) = D$ avem familia elipselor homofocale.

$$(22) \quad \frac{\xi^2}{D-1} + \frac{\eta^2}{D} = 1.$$

Pentru $D = 1$ degenerază în 2 segmente

$$\xi = 0, \quad 0 \leq \eta \leq 1.$$

Putem scrie ecuația (20) sub forma :

$$(23) \iint_{\Omega} \varphi(\xi, \eta) \frac{\eta^{n_1-2} d\xi d\eta}{[(\theta + A(\xi, \eta))(\theta + B(\xi, \eta))]^N} = C'_{n_1 n_2} \alpha \theta^{-\frac{n_2}{2}} (1 + \theta)^{-N + \frac{1}{2}}.$$

Conform definiției testului $\varphi(\xi, \eta)$ de regularitate zero există un număr $\eta_0 = 1 + \eta_1 > 1$ astfel, ca în jurul fiecărui punct al segmentului $\xi = 0, 0 \leq \eta \leq \eta_0$ se poate descrie un cerc în interiorul căruia $\varphi(\xi, \eta) = 0$ aproape peste tot în sensul măsurii Lebesgue. După teorema Heine-Borel se poate alege o acoperire finită din aceste cercuri și să se obțină un domeniu deschis Γ , care conține segmentul dat și astfel ca $\varphi(\xi, \eta) = 0$ pentru aproape toate punctele $(\xi, \eta) \in \Gamma$.

Să studiem acum familia elipselor homofocale (22).

Alegem $D > 1$ suficient de aproape de 1 încât elipsa corespunzătoare $B(\xi, \eta) = D$ să fie situată în întregime în domeniul Γ . Începem să mărim pe D . Fie $D_0 > 1$ marginea superioară exactă a acelor valori D , pentru care interiorul elipsei (22) $\varphi(\xi, \eta) = 0$ aproape peste tot.

Dacă $D_0 = \infty$, atunci $\varphi(\xi, \eta) = 0$ aproape peste tot în Ω ; atunci testul devine un test banal (similar). Respingem acest test și considerăm că D_0 este un număr finit.

Introducem notații necesare în continuare. Cu simbolul H vom nota mărginirea prin schimbarea diferiților parametri, care nu sînt totdeauna aceleași.

Prin $\zeta_0, \zeta_1, \dots$, notăm constante pozitive, alese fiecare depinzînd de precedentele, prin $L_{\theta}^{(k)}$ operatorul de diferențiere de ordinul k în raport cu θ în punctul $\theta \in \Lambda$ ($k \geq 0$ -întreg).

Avem $D_0 > 1$; punem

$$D_0 - 1 = \zeta_0, \quad \zeta_1 = \min \left(\frac{\zeta_0}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

Presupunem că θ se schimbă în dreptunghiul $Q \subset \Lambda$

$$(24) \quad \theta = -D_0 + \delta + i\zeta, \quad 0 \leq \delta \leq \zeta_1, \quad 0 < \zeta < \zeta_1$$

Mai departe, se aplică operatorul $L_{\theta}^{(k)}$ în ambii membri ai egalității (23) pentru $\theta \in Q$.

Se observă, că pentru o selecție potrivită $\theta \in Q$ și k suficient de mare, ordinul de creștere în raport cu k a membrilor stîng și drept ai egalității (23) vor fi diferiți. Aceasta conduce la o contradicție.

Prin definiția lui D_0 , $\varphi(\xi, \eta) = 0$ aproape peste tot în interiorul semielipsei $B(\xi, \eta) < D_0$. Notăm prin Ω_0 semiplanul Ω , din care se îndepărtează semielipsa; integrala corespunzătoare, care coincide cu membrul stîng din (23), o notăm $I_0(\theta)$. Avem :

$$(25) \quad I_0(\theta) = \iint_{\Omega} \varphi(\xi, \eta) \frac{\eta^{n_1-2} d\xi d\eta}{[(\theta + A(\xi, \eta))(\theta + B(\xi, \eta))]^N} = \\ = C'_{n_1 n_2} \alpha \theta^{-\frac{n_2}{2}} (1 + \theta)^{-N + \frac{1}{2}}.$$

Se observă că :

$$(26) \quad 0 \leq A(\xi, \eta) \leq 1$$

$$(27) \quad |\theta + A(\xi, \eta)| \geq D_0 - \zeta_1 - 1 \geq \zeta_1$$

în baza definiției lui ζ_1 .

Să studiem din nou cazul în care volumele de selecție n_1 și n_2 sînt de paritate definite ; Atunci numărul $N = \frac{n_1 + n_2 - 1}{2}$ este întreg și funcția de sub integrală în (25) este rațională.

Despărțim din integrala $I_0(\theta)$ integrala

$$(28) \quad I_1(\theta) = \iint_{B(\xi, \eta) \geq D_0 + 1}$$

și evaluăm marginea superioară a mărimii

$$(29) \quad L_0^{(k)} I_1(\theta)$$

pentru $\theta \in Q$ și valorile mari ale lui k . În baza lui (27) obținem

$$(30) \quad L_0^{(m)} \frac{1}{(\theta + A)^N} = H \frac{\Gamma(N + m)}{\zeta_1^m}.$$

Mai departe $B = B(\xi, \eta)$ se schimbă în domeniul

$$(31) \quad D \leq B(\xi, \eta) < D + 1$$

unde $D \geq D_0 + 1$. Atunci

$$(32) \quad |\theta + B(\xi, \eta)| \geq D - D_0 \geq 1$$

$$(33) \quad L_0^{(m)} \frac{1}{(\theta + B)^N} = H \frac{\Gamma(N + m)}{(D - D_0)^{m+N}}.$$

Evaluăm

$$(34) \quad L_0^{(k)} \frac{1}{(\theta + A)^N (\theta + B)^N}$$

pentru $\theta \in Q$ și $B = B(\xi, \eta)$ care aparține la (32).

Pentru aceasta se folosește (30), (33) și formula de diferențiere a 2 funcții. Găsim

$$(35) \quad L_0^{(k)} \frac{1}{(\theta + A)^N (\theta + B)^N} = H \sum_{m=0}^k C_k^m \frac{\Gamma(N + m)}{\zeta_1^m} \cdot \frac{\Gamma(N + k - m)}{(D - D_0)^{k-m+N}}$$

sau :

$$(36) \quad L_0^{(k)} \frac{1}{(\theta + A)^N (\theta + B)^N} = H \Gamma(k + 1) (D - D_0)^{-N} \zeta_1^{-k} k^{2N} = \\ = H \Gamma(k + 1) (D - D_0)^{-N} \zeta_2^{-k}$$

unde $\zeta_2 = \frac{\zeta_1}{2}$.

Despărțim din $I_1(\theta)$ integrale pe domeniul definit de condiția (31) și o notăm I_{1D} .

Acest domeniu, care are aspectul unei potcoave, este de arie

$$H(D - D_0)^{\frac{1}{2}}.$$

Calculind (36) găsim că pentru $\theta \in Q$,

$$(37) \quad L_0^{(k)} I_{1D}(\theta) = H \Gamma(k + 1) \zeta_2^{-k} (D - D_0)^{\frac{n_1}{2} - N - \frac{1}{2}}.$$

În baza condiției $\max(n_1, n_2) \geq 3$ se poate considera că :

$$n_1 \leq n_2, \quad \frac{n_1}{2} - N - \frac{1}{2} = \frac{n_2}{2} \geq \frac{3}{2}.$$

În acest caz se poate însuma evaluările (37) pentru valoarea $D = D_0 + 1, D_0 + 2, \dots$ în care rezultat obținem :

$$(38) \quad L_0^{(k)} I_1(\theta) = H \Gamma(k + 1) \zeta_2^{-k}.$$

Punem

$$(39) \quad I_{00}(\theta) = I_0(\theta) - I_1(\theta) = \iint_{D_0 \leq B(\xi, \eta) \leq D_0 + 1} \dots$$

Fie $R > 100$ un număr mare, care va fi fixat mai departe, și pentru care $M = R\zeta_2^{-1}$ este un număr întreg.

Fie $\Delta = \zeta_2 R^{-1}$

$$(40) \quad F_{0,r}(\theta) = \iint_{D_0 + r\Delta \leq B(\xi, \eta) < D_0 + (r+1)\Delta} \dots$$

asa că

$$(41) \quad I_{00}(\theta) = F_{00}(\theta) + F_{01}(\theta) + \dots + F_{0,M-1}(\theta).$$

Noi trebuie să studiem

$$(42) \quad L_0^{(k)} F_{0r}(\theta)$$

în domeniul

$$(43) \quad D_0 + r\Delta \leq B(\xi, \eta) \leq D_0 + (r+1)\Delta$$

pentru $\theta \in Q$. Avem :

$$(44) \quad \theta + B = r\Delta + \delta + i\zeta.$$

Punem $\delta = \frac{\Delta}{2}$; în acest fel, valoarea numărului $\theta = -D_0 + \delta + i\zeta$ va depinde de numărul R și numărul ζ .

Din (44) obținem că

$$|\theta + B| = \left(\left(r + \frac{1}{2} \right)^2 \Delta^2 + \zeta^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Presupunem că $0 < \zeta \leq \Delta$. Atunci în domeniul (43) și pentru valorile arătate θ

$$(45) \quad \left(r + \frac{1}{2} \right) \Delta \leq |\theta + B| \leq \Delta \left(\left(r + \frac{1}{2} \right)^2 + 1 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ne întoarcem la (42). În baza lui (45), expresia (44) se transformă în :

$$(46) \quad L_0^{(m)} \frac{1}{(\theta + B)^N} = H \frac{\Gamma(N+m)}{\left(\left(r + \frac{1}{2} \right) \Delta \right)^{m+N}},$$

iar evaluarea (30) se păstrează. Numai $k > 0$, avem :

$$(47) \quad L_0^{(k)} \frac{1}{(\theta + A)^N (\theta + B)^N} = \frac{(-1)^k N(N+1) \dots (N+k-1)}{(\theta + B)^{N+k} (\theta + A)^N} + \gamma_k$$

unde

$$(48) \quad \gamma_k = H \sum_{m=1}^k C_k^m \frac{\Gamma(N+M)}{\zeta_1^{m+N}} \cdot \frac{\Gamma(N+k-m)}{|\theta + B|^{k-m+N}} =$$

$$= H \frac{\Gamma(N+k)}{|\theta + B|^{k+N-1}} \cdot \frac{\left(r + \frac{1}{2} \right) \Delta}{\zeta_1}$$

dacă $\left(r + \frac{1}{2} \right) \Delta < \frac{1}{2} \zeta_1$. Dacă $\left(r + \frac{1}{2} \right) \Delta \geq \frac{1}{2} \zeta_1$ atunci din (47) și (48)

$$(49) \quad L_0^{(k)} \frac{1}{(\theta + B)^N (\theta + A)^N} = H \frac{\Gamma(N+k)}{\zeta_3^k}$$

unde $\zeta_3 = \frac{1}{2} \zeta_2$.

Din (47) și folosind (45) găsim că

$$(50) \quad \left| L_0^{(k)} \frac{1}{(\theta + A)^N (\theta + B)^N} \right| > C_0 \frac{\Gamma(N + k)}{(\theta + B)^{N+k}}$$

pentru

$$(51) \quad \left(r + \frac{1}{2} \right) \Delta < \zeta_4 \zeta_1$$

unde $C_0 > 0$ este constantă.

În afară de aceasta, dacă $i\zeta$ este suficient de mic, de exemplu $0 < \zeta < \frac{\Delta}{10k^2}$, atunci cu (26) pentru $k + N$ par este îndeplinită inegalitatea :

$$(52) \quad \operatorname{Re} L_0^{(k)} \frac{1}{(\theta + A)^N (\theta + B)^N} > \frac{1}{2} C_0 \frac{\Gamma(N + k)}{|\theta + B|^{N+k}}$$

iar dacă $\left(r + \frac{1}{2} \right) \Delta \geq \zeta_4 \zeta_2$ atunci, analog cu expresia (49) obținem

$$(53) \quad L_0^{(k)} \frac{1}{(\theta + A)^N (\theta + B)^N} = H \frac{\Gamma(N + k)}{(\zeta_4 \zeta_1)^k}.$$

Să ne întoarcem la expresia (40). Din definiția numărului D_0 trebuie să avem

$$(54) \quad \iint_{D_0 \leq B(\xi, \eta) \leq D_0 + \Delta} \eta^{n_1-2} \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta > \beta_0(\Delta) > 0,$$

unde $\beta_0(\Delta)$ este un număr pozitiv care depinde de Δ .

Alegem R suficient de mare și deci Δ suficient de mică ca $\frac{1}{2} \Delta < \zeta_4 \zeta_1$, astfel ca condiția (51) să fie îndeplinită pentru $r = 0$. Atunci din (50) și (52) obținem :

$$(55) \quad \operatorname{Re} L_0^{(k)} F_{00}(\theta) > \frac{C_0 \beta_0(\Delta)}{2} \cdot \frac{\Gamma(N + k)}{\left(\Delta \sqrt{\frac{5}{4}} \right)^{N+k}}.$$

Calculind (55), (52) și (51) și considerind r_0 un număr întreg suficient de mare, care verifică condiția (51) găsim :

$$(56) \quad \operatorname{Re} L_0^{(k)} (F_{00}(\theta) + F_{01}(\theta) + \dots + F_{0, r_0}(\theta)) > \frac{C_0 \beta_0(\Delta)}{2} \frac{\Gamma(N + k)}{\left(\Delta \sqrt{\frac{5}{4}} \right)^{N+k}}.$$

În baza lui (53)

$$(57) \quad \operatorname{Re} L_0^{(k)}(F_{0,r_0+1}(\theta) + F_{0,r_0+2}(\theta) + \dots + F_{0,M-1}(\theta)) = H \cdot \frac{\Gamma(N+k)}{(\zeta_4 \zeta_1)^k}.$$

Calculînd (38) și comparînd (47), (38) și (56) observăm că dacă se alege Δ suficient de mic în comparație cu ζ_4 , ζ_1 și ζ_2 , de exemplu dacă se pune

$$\Delta \leq \frac{1}{1000} \min(\zeta_4, \zeta_1, \zeta_2)$$

și apoi, după Δ fixat, se alege k suficient de mare și de aceeași paritate cu N , atunci

$$(58) \quad \operatorname{Re} L_0^{(k)} I_0(\theta) > \frac{1}{4} C_0 \beta_0(\Delta) \frac{\Gamma(N+k)}{\left(\Delta \sqrt{\frac{5}{4}}\right)^{N+k}}$$

pentru $\theta = -D_0 + \frac{\Delta}{2} + i \frac{\Delta}{10k^2}$ iar această inegalitate cum vom vedea mai departe, conduce la o contradicție.

Să studiem cazul cînd numerele n_1 și n_2 sînt de aceeași paritate, și să arătăm, că are loc inegalitatea analoagă (58). În acest caz $N = \frac{n_1 + n_2 - 1}{2}$ este jumătatea unui număr impar iar expresia

$$\frac{1}{[(\theta + A)(\theta + B)]^N}$$

care intră în (25) va avea puncte de ramificație.

Păstrînd notațiile precedente, studiem șirul numerelor mari întregi $\{k\}$ și pentru fiecare k alegem ca și mai înainte

$$(59) \quad \theta = -D_0 + \frac{\Delta}{2} + i \frac{\Delta}{10k^2}.$$

Pentru $\theta \in \Lambda$, considerînd $\arg \theta = 0$ pentru $\theta > 0$, găsim calculînd (26) și (44)

$$(60) \quad \frac{1}{[(\theta + A)(\theta + B)]^N} = i^N \frac{1}{[(-\theta - A)(\theta + B)]^N}.$$

Pentru valorile lui θ , determinate de (60)

$$(61) \quad \arg(-\theta - A) = 0 \left(\frac{1}{k^2} \right)$$

și pentru valoarea $B = B(\xi, \eta)$ și $(\xi, \eta) \in \Omega_0$

$$(62) \quad \arg(\theta + B) = 0 \left(\frac{1}{k^2} \right).$$

Se știe că pentru k suficient de mare

$$(63) \quad \frac{1}{[(\theta + A)(\theta + B)]^N} = i^N \frac{1}{(-\theta - A)^N} \cdot \frac{1}{(\theta + B)^N}$$

și putem aplica aici raționamentele anterioare cu schimbări de tipul: în loc de (30) considerăm evaluarea

$$(64) \quad L_0^{(m)} \frac{1}{(-\theta - A)^N} = H \frac{\Gamma(N + m)}{\zeta_1^m}$$

care decurge din formula

$$\frac{\Gamma(N + m)}{\Gamma(N)} = N(N + 1) \dots (N + m - 1).$$

Formula (33) rămâne neschimbată. În locul formulei (47) obținem

$$(65) \quad i^{-N} L_0^{(k)} \frac{1}{(-\theta - A)^N (\theta + B)^N} = \frac{(-1)^k N(N + 1) \dots (N + k - 1)}{(\theta + B)^{N+k} (-\theta - A)^N} + \gamma_k.$$

cu aceeași evaluare (48) pentru γ_k . Prin urmare

$$(66) \quad (-1)^k i^{-N} \operatorname{Re} \frac{1}{(-\theta - A)^N (\theta + B)^N} > \frac{C_0}{2} \frac{\Gamma(N + k)}{|\theta + B|^{N+k}}$$

pentru $\left(r + \frac{1}{2}\right) \Delta < \zeta_4 \zeta_1$.

Raționamentele ulterioare decurg ca și mai înainte, numai în inegalitățile (55), (56) și (58) trebuie înlocuită mărimea $\operatorname{Re} L_0^{(k)}(\dots)$ prin $\operatorname{Re} (-1)^k i^{-N} L_0^{(k)}(\dots)$. În final ajungem din nou la o formulă de tipul (58)

$$(67) \quad (-1)^k i^{-N} \operatorname{Re} L_0^{(k)} I_0(\theta) > \frac{C_0 \beta_0(\Delta)}{4} \frac{\Gamma(N + k)}{\left(\Delta \sqrt{\frac{5}{4}}\right)^{N+k}}$$

pentru

$$(68) \quad \theta = -D_0 + \frac{\Delta}{2} + \frac{i\Delta}{10k^2}.$$

Din (58) și (67) pentru valorile lui 0, care verifică (68), obținem :

$$(69) \quad |L_0^{(k)} I_0(0)| > \frac{C_0 \beta_0(\Delta)}{4} \frac{\Gamma(N+k)}{\left(\Delta \sqrt{\frac{5}{4}}\right)^{N+k}}$$

pentru orice n_1, n_2 cu condiția ca $\max(n_1, n_2) \geq 3$.

Studiem aplicarea operatorului $L_0^{(k)}$ în membrul drept din (25) adică expresia

$$L_0^{(k)} \propto \theta^{-\frac{n_2}{2}} (1+\theta)^{-N+\frac{1}{2}}.$$

Folosind rezultatele, de la începutul paragrafului găsim că :

$$(70) \quad L_0^{(k)} \propto \theta^{-\frac{n_2}{2}} (1+\theta)^{-N+\frac{1}{2}} = H \cdot \frac{\Gamma(N+k)}{\left(D_0 - \frac{\Delta}{2} - 1\right)^{N+k}}.$$

Dacă Δ este ales suficient de mic, k suficient de mare, atunci (69) contrazice (70) ceea ce demonstrează teorema.

Cînd volumele celor două selecții sînt de parități diferite și N este un număr întreg, demonstrarea teoremei devine mai simplă.

Observații. Dacă se îndepărtează condiția de regularitate zero, atunci teorema 2 nu se mai păstrează. Există însă teste aleatoare și similare fără această proprietate. Introducem un exemplu simplu care nu verifică proprietatea de regularitate zero. Se poate observa că densitatea de repartitie a statisticii (ξ, η) este o funcție pară de ξ și η , dacă ipoteza H_0 este adevărată. Fie $\varphi(\xi, \eta)$ o funcție continuă de ξ și η în semiplanul $\Omega : -\infty < \xi < \infty, 0 \leq \eta < \infty$, care pentru orice η este impară în ξ și îndeplinește condiția :

$$|\varphi(\xi, \eta)| \leq 1/3.$$

Fie

$$\varphi(\xi, \eta) = \frac{1}{2} + \varphi_1(\xi, \eta).$$

Atunci în baza celor de mai sus :

$$M_{\varphi_1}(\xi, \eta) = 0, \quad M_{\varphi}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}$$

în ipoteza H_0 , așa că $\varphi(\xi, \eta)$ este un test similar și aleator. Totuși proprietatea de regularitate zero, nu este, aici, îndeplinită.

Observăm încă, că din punct de vedere analitic teorema poate fi mai puternică.

În locul condiției ca testul $\varphi(\xi, \eta)$ să fie similar în raport cu toate valorile σ_1 și σ_2 este suficient să se ceară similaritatea lui referitor la o mulțime pară de diferite valori, care este conținută într-un segment oarecare finit.

§ 3. Construcția testului omogen similar nealeator pentru problema Behrens-Fisher

Kagan și Șalaevsky (1964), Linnik, Sudakov, Romanovsky (1964) și Linnik (1966) arată că există teste având zona critică de forma (5) care sînt similare pentru toate valorile pragului de semnificație α fixat.

TEOREMA 3. Pentru fiecare prag de semnificație $\alpha \in (0, 1)$ și fiecare pereche de selecție de volume n_1, n_2 de parități diferite există un test nealeator similar pentru problemele Behrens-Fisher cu regiunea critică, determinată de valorile $\frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{s_2}$ și $\frac{s_1}{s_2}$.

Demonstrație. Pentru a construi testul $\phi = \phi\left(\frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{s_2}, \frac{s_1}{s_2}\right)$ care are pragul de semnificație $\alpha \in (0, 1)$ și ia numai valorile 0 și 1, este suficient să se construiască testul $\psi = \phi - \alpha$. ψ va lua numai valorile $-\alpha$ și $1 - \alpha$.

Studiem $\xi = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_2}$, $\eta = \frac{s_1}{s_2}$ și liniile critice $A(\xi, \eta)$, $B(\xi, \eta)$.

Fie $\phi(\xi, \eta)$ funcția indicator a regiunii critice a testului căutat și Ω_1 cadrantul $\xi \geq 0, \eta \geq 0$.

Pentru determinarea lui $\phi(\xi, \eta)$ avem relația

$$(71) \quad \iint_{\Omega_1} \frac{\eta^{n_1-2} \phi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{(\theta + A)^N (\theta + B)^N} = C_{n_1 n_2} \frac{\alpha}{2} \theta^{-\frac{n_2}{2}} (1 + \theta)^{-N + \frac{1}{2}}$$

pentru fiecare $\theta > 0$; aici $N = \frac{n_1 + n_2 - 1}{2}$.

Pentru testul $\psi(\xi, \eta)$ pentru toți $\theta > 0$, trebuie să avem identitatea

$$(72) \quad \iint_{\Omega_1} \frac{\eta^{n_1-2} \psi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{(\theta + A)^N (\theta + B)^N} = 0.$$

Dacă funcția $\psi(\xi, \eta)$ ia numai valorile $-\alpha$ și $1 - \alpha$ și verifică (72) atunci vom căuta să determinăm pe ψ .

Din condiția ca n_1 și n_2 să fie de parități diferite decurge că N este întreg. Vom considera că $n_1 \geq 2$, $n_2 \geq 2$; cum ele sînt de parități diferite, atunci una dintre ele nu trebuie să fie mai mică de 3 și $N \geq 2$.

În cadrul Ω_1 : $\xi \geq 0, \eta \geq 0$ curbele critice $A(\xi, \eta)$ și $B(\xi, \eta)$ reprezintă sistemul de coordonate; prin fiecare punct va trece una și numai una din curbele critice din fiecare din cele 2 tipuri.

Este indicat pentru studiul integralei (72) de a trece la acest sistem de coordonate.

Pentru aceasta trebuie găsit jacobianul $\frac{D(\xi, \eta)}{D(A, B)}$.

Cum

$$(\theta + A)(\theta + B) = \theta^2 + \theta(1 + \xi^2 + \eta^2) + \eta^2,$$

atunci

$$A + B = 1 + \xi^2 + \eta^2, \quad AB = \eta^2.$$

În acest fel

$$\xi = [(B - 1)(1 - A)]^{1/2}, \quad \eta = (AB)^{1/2}.$$

De aici rezultă

$$(73) \quad \frac{D(\xi, \eta)}{D(A, B)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}(B-1)^{\frac{1}{2}}(1-A)^{-\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}(B-1)^{-\frac{1}{2}}(1-A)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2}A^{-\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}A^{\frac{1}{2}}B^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \frac{B-A}{(AB)^{1/2}(B-1)^{1/2}(1-A)^{1/2}}.$$

Introducînd această expresie în (72) obținem ecuația pentru determinarea testului $\psi(\xi, \eta) = \psi_1(A, B)$

$$(74) \quad J(\theta) = \iint_{\Pi} \frac{\psi_1(A, B)(AB)^{\frac{n_1-3}{2}}(B-A) dA dB}{\sqrt{1-A}\sqrt{B-1}(\theta+A)^N(\theta+B)^N} = 0.$$

Aici Π este semibanda $0 \leq A \leq 1, B \geq 1$, în care se transformă cadrantul Ω_1 .

Împărțim semibanda Π în semibandele disjuncte

$$\Pi_k : 1 - 2^{-k} \leq A < 1 - 2^{-k-1}; 1 \leq B < \infty, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad \Pi = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Pi_k.$$

Vom construi funcția $\psi(A, B)$ astfel ca pentru fiecare $k=0, 1, 2, \dots$, să fie verificată egalitatea

$$(75) \quad J_k(\theta) = \iint_{\Pi_k} \frac{\psi(A, B)(AB)^{\frac{n_1-3}{2}}(B-A) dA dB}{\sqrt{1-A}\sqrt{B-1}(\theta+A)^N(\theta+B)^N} = 0.$$

Presupunem că $n_1 \geq 3$.

Funcția $\frac{B-A}{\sqrt{1-A}\sqrt{B-1}}$ are numai o discontinuitate în punctul (1,1). Deoarece $\frac{n_1-3}{2} \geq 0$, din (75) ($k=0, 1, 2, \dots$) rezultă că $J(\theta) = 0$.

Cum N este un număr întreg și în semibanda Π_k , $A \neq B$, avem descompunerea în fracții simple

$$(76) \quad \frac{1}{(\theta + A)^N (\theta + B)^N} = \sum_{m=1}^N D_m \frac{(B - A)^{m-1}}{(B - A)^{2N-1} (\theta + A)^m} + \\ + \sum_{m=1}^N E_m \frac{(B - A)^{m-1}}{(B - A)^{2N-1} (\theta + B)^m},$$

unde D_i , E_i sînt constante. Punînd (76) în membrul stîng (75) găsim că

$$(77) \quad J_k(\theta) = \sum_{m=1}^N D_m \int_{1-2^{-k}}^{1-2^{-k-1}} dA \int_1^\infty dB \frac{\psi(A, B) (AB)^{\frac{n_1-3}{2}} (B - A)^m}{\sqrt{1-A} \sqrt{B-1} (B-A)^{2N-1} (\theta + A)^m} + \\ + \sum_{m=1}^N E_m \int_1^\infty dB \int_{1-2^{-k}}^{1-2^{-k-1}} dA \frac{\psi(A, B) (AB)^{\frac{n_1-3}{2}} (B - A)^m}{\sqrt{1-A} \sqrt{B-1} (B-A)^{2N-1} (\theta + B)^m}.$$

Împărțim semibanda Π_k în dreptunghiurile :

$$Q_{ks} : 1 - 2^{-k} \leq A \leq 1 - 2^{-k-1}; \quad s \leq B < s + 1; \quad s = 1, 2, \dots$$

Să studiem funcția :

$$P_m(A, B) = \frac{(AB)^{\frac{n_1-3}{2}} (B - A)^m}{\sqrt{1-A} \sqrt{B-1} (B-A)^{2N-1}}, \quad m = 1, 2, \dots, N.$$

În fiecare dreptunghi Q_{ks} alegem constanta $C_{ks} > 0$, astfel că funcția

$$p_{mk_s}(A, B) = \frac{1}{C_{ks}} P_m(A, B), \quad m = 1, 2, \dots, N$$

va fi o densitate de probabilitate în raport cu măsura Lebesgue. Aceasta este posibil, deoarece $B > A$, așa că $P_m(A, B) \geq 0$. În afară de aceasta $p_{mk_s}(A, B)$ vor fi funcții continue pe închiderea $\bar{Q}_{ks}$ a dreptunghiului Q_{ks} , pentru $k = 0, 1, 2, \dots$

Aplicăm mai departe pentru toate valorile k, s, N densităților $p_{mk_s}(A, B)$ pe $\bar{Q}_{ks}$ următorul rezultat, conținut în

TEOREMA 4. (Romanovsky și Sudakov (1965)). *Dacă în dreptunghiul $M : a \leq x \leq b; c \leq y \leq d$ sînt date n densități $p_s(x, y)$, $s = 1, 2, \dots, n$ atunci pentru α dat $\in (0, 1)$ se poate construi mulțimea $A = A_\alpha \subset M$ astfel că, dacă $I_A(x, y)$ — este funcția indicator a mulțimii A atunci pentru $s = 1, \dots, n$*

$$\int_a^b I_A(x, y) p_s(x, y) dx = \alpha \int_a^b p_s(x, y) dx$$

pentru aproape toți $y \in [c, d]$,
și

$$\int_c^d I_A(x, y) p_s(x, y) dy = \alpha \int_c^d p_s(x, y) dy$$

pentru aproape toți $x \in [a, b]$.

Pentru k și s dați fie $\bar{Q}_{ks}$ de forma $a \leq A \leq b, c \leq B \leq d$. După rezultatul enunțat se poate construi o mulțime plană măsurabilă $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{ks}$ astfel că dacă $I(A, B) = I_{k,s}(A, B)$ este funcția ei indicator, atunci pentru $m = 1, 2, \dots, N$

$$\int_a^b I(A, B) p_{mk_s}(A, B) dA = \alpha \int_a^b p_{mk_s}(A, B) dA$$

pentru aproape toți $B \in [c, d]$

$$\int_c^d I(A, B) p_{mk_s}(A, B) dB = \alpha \int_c^d p_{mk_s}(A, B) dB$$

pentru aproape toți $A \in [a, b]$, unde $\alpha \in (0, 1)$ reprezintă pragul de semnificație a testului.

Funcția $I(A, B)$ ia numai valorile 0 și 1.

Punem $\psi(A, B) = I(A, B) - \alpha$; atunci $\psi(A, B)$ ia numai valorile $-\alpha$ și $1 - \alpha$.

Pentru $m = 1, 2, \dots, N$ avem

$$\int_a^b \psi(A, B) p_{mk_s}(A, B) dA = 0$$

pentru aproape toți $B \in [c, d]$

$$\int_c^d \psi(A, B) p_{mk_s}(A, B) dB = 0$$

pentru aproape toți $A \in [a, b]$.

Cum funcția p_{mk_s} diferă de $P_m(A, B)$ numai printr-un factor constant atunci, definind $\psi(A, B)$ în tot interiorul fișei Π ca fiind chiar p_{mk_s} , construite pe celelalte $Q_{ks} (k = 1, 2, \dots, s = 1, 2, \dots)$ obținem

$$J_k(\theta) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad \text{și} \quad J(\theta) = 0, \quad \theta > 0.$$

Aceasta demonstrează teorema 3.

Dacă în locul a N funcții $P_m(A, B)$ se studiază un număr finit de funcții $P_{mi}(A, B)$, unde $i = 1, 2, \dots, k$; pentru fiecare $i, m = 1, 2, \dots$

$N_i = \frac{n_{1i} + n_{2i} - 1}{2}$ unde n_{1i} și n_{2i} sînt volumele de selecție și

$$P_{mi}(AB) = \frac{(AB)^{\frac{n_{1i}-3}{2}} (B-A)^m}{\sqrt{1-A} \sqrt{B-1} (B-A)^{2N_i-1}}$$

se obține :

TEOREMA 5. Fie dat un număr finit de K perechi de selecții de volume $n_{1i}, n_{2i} (i = 1, \dots, K)$ de parități diferite.

Atunci există un test omogen nealeator cu regiunea critică

$$G \left(\left| \frac{\bar{x}_i - \bar{y}_i}{s_{2i}} \right|, \frac{s_{1i}}{s_{2i}} \right) \geq 0$$

$i = 1, 2, \dots, K$, funcția G fiind una și aceeași pentru toate valorile i) care este similar pentru toate perechile de selecții și care are pragul de semnificație $\alpha \in (0, 1)$.

§ 4. Proprietăți optime ale testului lui Welch

Din paragrafele anterioare rezultă că

— regiunea critică nu este invariantă la permutarea celor două selecții

— o parte din informație este pierdută dacă selecțiile sînt de volume diferite.

Aceste două defecte pot fi înlăturate prin înlocuirea funcției critice originale prin valoarea sa medie condiționată, dată statistica suficientă $(\bar{x}, \bar{y}, s_1^2, s_2^2)$. Însă aceasta este numai o operație cosmetică, deoarece nu îmbunătățește puterea testului.

În cele ce urmează comparăm funcția de putere asimptotică a testului lui Welch cu funcția de putere asimptotică a testului care este optim dacă raportul dispersiilor este cunoscut și arătăm după Pfanzagl (1974) ca în clasa tuturor testelor invariante la translație testul lui Welch este asimptotic U. C.M.P. față de alternative unilaterale.

Fie $X_1, X_2, \dots, X_{n_1} (Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2})$ o selecție asupra unei variabile aleatoare $X[Y] \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) [N(\mu_2, \sigma_2^2)]$, X și Y variabile aleatoare independente.

Considerăm următoarele regiuni critice.

$$(78) \quad W_l = (x_1, x_2, \dots, x_{n_1}, y_1, y_2, \dots, y_{n_2}) : \bar{y} - \bar{x} > d_l, \quad l = 1, 2$$

cu

$$(79) \quad d_1 = t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)^{1/2} \left\{ \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + R(n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \right\}^{1/2},$$

$$(80) \quad d_2 = u_{1-\alpha} \left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2} \right)^{1/2} \left[1 + \frac{1}{4} (1 + u_{1-\alpha}^2) \left\{ \frac{s_1^4}{n_1^2(n_1 - 1)} + \frac{s_2^4}{n_2^2(n_2 - 1)} \right\} \left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2} \right)^{-2} \right].$$

TEOREMA 6. i) Printre toate testele similare pentru verificarea ipotezei

$$-\infty < \mu_1 = \mu_2 < \infty, \quad 0 < \sigma_1^2 < \infty, \quad R\sigma_2^2 = \sigma_1^2,$$

față de alternativa

$$-\infty < \mu_1 < \mu_2 < \infty, \quad 0 < \sigma_1^2 < \infty, \quad R\sigma_2^2 = \sigma_1^2.$$

testul W_1 , pentru $\frac{1}{R}$ dat, este U.C.M.P.

ii) Dacă $\mu_0 \in R$ și $\sigma_{i0}^2 \in (0, \infty)$ $i = 1, 2$ sînt arbitrare, puterea testului bazat pe regiunea critică W_1 , în ipoteza alternativă

$$\mu_1 = \mu_0, \quad \mu_2 = \mu_1 + t \left(\frac{\sigma_{10}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{20}^2}{n_2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \sigma_i^2 = \sigma_{i0}^2 \quad i = 1, 2$$

este

$$(S1) \quad 1 - \Phi(A_1 A_2 u_{1-\alpha} - t) - \varphi^*(A_1 A_2 u_{1-\alpha} - t) \frac{A_1 u_{1-\alpha}}{4(n_1 + n_2)} \times \\ \times \{t A_1 A_2^{-2} A_3 u_{1-\alpha} + A_2(1 + u_{1-\alpha}^2) - A_3 A_2^{-3}(1 + A_1^2 A_2^2 u_{1-\alpha}^2)\} + 0\{(n_1 + n_2)^{-2}\},$$

unde

$$(S2) \quad A_1 = \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{R n_2} \right)^{1/2} \left(\frac{\sigma_{10}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{20}^2}{n_2} \right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$A_2 = (\sigma_{10}^2 \lambda_1 + \sigma_{20}^2 R \lambda_2)^{\frac{1}{2}}, \quad A_3 = (\sigma_{10}^4 \lambda_1 + \sigma_{20}^4 R \lambda_2)$$

$$\lambda_i = (n_i - 1)/(n_1 + n_2 - 2) \quad i = 1, 2.$$

DEFINIȚIA 6. Vom spune că funcția critică ψ în $R^{n_1+n_2}$ pentru verificarea ipotezei

$$\mu_1 = \mu_2 \in R, \quad (\sigma_1^2, \sigma_2^2) \in R^+$$

are pragul asimptotic $\alpha + 0(n_1^{-2} + n_2^{-2})$ dacă există o constantă c_* astfel că pentru toți $\mu \in R$, toți $(\sigma_1^2, \sigma_2^2) \in R^+$ și toți $n_1, n_2 \in N$,

$$M_P(\psi) \leq \alpha + c_* (n_1^{-2} + n_2^{-2})$$

unde: P este funcția de verosimilitate corespunzătoare selecțiilor asupra variabilelor $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ și $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ de volum n_1 , respectiv n_2 și M_P este valoarea medie în raport cu P .

TEOREMA 7. (Pfanzagl (1974)). i) Fie ψ o funcție critică în $R^{n_1+n_2}$ invariantă la translație pentru verificarea ipotezei

$$-\infty < \mu_1 = \mu_2 < \infty, \quad (\sigma_1^2, \sigma_2^2) \in R^+$$

cu pragul asimptotic $\alpha + 0(n_1^{-2} + n_2^{-2})$. Dacă $\mu_0 \in R$ și dacă (σ_1^2, σ_2^2) este un punct arbitrar în R^+ , puterea lui ψ , în ipoteza alternativă

$$\mu_1 = \mu_0, \quad \mu_2 = \mu_0 + t \left(\frac{\sigma_{10}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{20}^2}{n_2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \sigma_i^2 = \sigma_{i0}^2, \quad i = 1, 2$$

* φ — densitatea variabilei $N(0, 1)$.

depășește

$$(83) \quad 1 - \Phi(u_{1-\alpha} - t) - \varphi(u_{1-\alpha} - t) \frac{1}{4} t u_{1-\alpha}^2 (\sigma_{10}^4 n_1^{-3} + \sigma_{20}^4 n_2^{-3}) (\sigma_{10}^2 n_1^{-1} + \sigma_{20}^2 n_2^{-1})^{-2},$$

cu o cantitate cel mult de ordinul $O(n_1^{-2} + n_2^{-2})$. Mai precis, pentru fiecare $t > 0$, există o constantă $C_*(t)$ astfel că pentru toate funcțiile critice ψ cu proprietatea enunțată anterior și pentru toți n_1 și $n_2 \in N$

$$(84) \quad M_P(\psi) \leq 1 - \Phi(u_{1-\alpha} - t) - \varphi(u_{1-\alpha} - t) \frac{1}{4} t u_{1-\alpha}^2 (\sigma_{10}^4 n_1^{-3} + \sigma_{20}^4 n_2^{-3}) \times \\ \times (\sigma_{10}^2 n_1^{-1} + \sigma_{20}^2 n_2^{-1})^{-2} + C_*(t) (n_1^{-2} + n_2^{-2}),$$

unde P este funcția de verosimilitate corespunzătoare selecțiilor asupra variabilei $X \sim N(\mu_0, \sigma_{10}^2)$ și $Y \sim N(\mu_0 + t\eta_0, \sigma_{20}^2)$, $\eta_0 = (\sigma_{10}^2/n_1 + \sigma_{20}^2/n_2)^{1/2}$.

ii) Funcția de putere a testului W_2 concordă cu (83) până la termeni de ordinul $O(n_1^{-2} + n_2^{-2})$.

Deoarece W_2 este invariant la translație, este invariant la translație și testul lui Welch în clasa tuturor testelor invariante la translație de prag asimptotic $\alpha + O(n_1^{-2} + n_2^{-2})$ și C.M.P. până la termeni de ordinul $O(n_1^{-2} + n_2^{-2})$ față de alternativa specificată anterior.

Studiind puterea testelor bazate pe regiunile critice W_1 și W_2 , este convenabil să luăm

$$n_i = c_i n \quad (i = 1, 2; \quad c_1 + c_2 = 1, \quad n_1 + n_2 = n)$$

unde c_i rămâne fix când $n \rightarrow \infty$.

Pentru $l = 1, 2$, fie $\pi_l(t)$ puterea testului W_l în alternativa

$$(85) \quad \mu_2 = \mu_1 + \frac{t}{\sqrt{n}} \left(\frac{\sigma_1^2}{c_1} + \frac{\sigma_2^2}{c_2} \right)^{1/2}$$

presupunind $R\sigma_2^2 = \sigma_1^2$ în cazul regiunii W_1 .

Din teoremele 6 și 7, obținem

$$(86) \quad \pi_1(t) = 1 - \Phi(u_{1-\alpha} - t) - \varphi(u_{1-\alpha} - t) \frac{1}{4} t u_{1-\alpha}^2 n^{-1} + O(n^{-2}),$$

$$\pi_2(t) = 1 - \Phi(u_{1-\alpha} - t) - \varphi(u_{1-\alpha} - t) \frac{1}{4} t u_{1-\alpha}^2 n^{-1} + \left\{ 1 + \frac{c_1 c_2 (\sigma_1^2 c_1^{-2} - \sigma_2^2 c_2^{-2})^2}{(\sigma_1^2 c_1^{-1} + \sigma_2^2 c_2^{-1})^2} \right\} + O(n^{-2}).$$

Considerind aceste funcții de putere se pune problema când este recomandabilă aplicarea testului W_1 . Se poate folosi când experiența trecută dă anumite indicații asupra lui $1/R$, sau când considerații apriorice puternice sugerează că $(1/R) = 1$. Va fi recomandat să se folosească W_1 în astfel de cazuri?

Răspunsul este nu.

Dacă $\sigma_2^2/\sigma_1^2 \neq 1/R$, volumul testului va diferi de α printr-o cantitate de ordinul $O(n^0)$.

Dat un buget limitat, puterea testului bazat pe W_1 cât și a celui bazat pe W_2 depinde în primul rînd de alegerea lui c_1 și c_2 . Cunoașterea greșită a raportului σ_2/σ_1 are un efect numai de ordinul $O(n^{-1})$.

TESTE PRIVIND PARAMETRII VECTORILOR NORMALI

§. Testul T^2

1.1. Definirea testului

Dacă $X_1, X_2, \dots, X_N$ este o selecție asupra unei variabile aleatoare $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 necunoscută, atunci (teorema III.7)

$$t = \sqrt{N} \frac{\bar{X} - \mu}{s} \sim t(N-1).$$

Bazîndu-ne pe această statistică putem determina :

— un test pentru verificarea ipotezei $\mu = \mu_0$, unde μ_0 este un număr dat, sau

— un interval de încredere pentru parametrul μ .

Ne propunem să extindem aceste considerații la variabile aleatoare multidimensionale (vectori aleatori). În acest scop să presupunem că $\mathbf{X}$ urmează o repartiție normală p -dimensională $N(\mu, \Sigma)$, nesingulară. Ca și în cazul unidimensional vom presupune că toate elementele matricei Σ sint necunoscute.

În acest caz verificăm ipoteza

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

față de alternativa

$$H_1 : \mu \neq \mu_0.$$

Fie $x_1, \dots, x_N$ o selecție asupra vectorului $\mathbf{X}$ și $\bar{\mathbf{x}}$ și S estimațiile obținute plecînd de la selecția considerată, definite în exemplul XIV.1 pentru μ și respectiv Σ . Plecînd de la aceste date, ce statistică test vom folosi pentru verificarea ipotezei H_0 ?

Dacă $\mathbf{a}'$ este un vector linie nenul de elemente reale, atunci $\mathbf{a}'\mathbf{X}$ este o variabilă aleatoare normală unidimensională cu media $\mathbf{a}'\mu$ și dispersia $\mathbf{a}'\Sigma\mathbf{a}$. Prin urmare, ipoteza

$$H_0(\mathbf{a}) : \mathbf{a}'\mu = \mathbf{a}'\mu_0$$

față de alternativa

$$H_1(\mathbf{a}) : \mathbf{a}'\mu = \mathbf{a}'\mu_1,$$

poate fi verificată cu statistica

$$t(\mathbf{a}) = \sqrt{N} \frac{\mathbf{a}'(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)}{\sqrt{\mathbf{a}'\mathbf{S}\mathbf{a}}}.$$

Ipoteza multidimensională inițială este adevărată dacă și numai dacă $\mathbf{a}'\boldsymbol{\mu} = \mathbf{a}'\boldsymbol{\mu}_0$ pentru toți vectorii $\mathbf{a}$ nenuli și regiunea de acceptare multidimensională este intersecția regiunilor de acceptare unidimensionale, adică

$$\bigcap_{\mathbf{a}} \{t^2(\mathbf{a}) \leq t_{\alpha/2}(N-1)\}$$

condiție care este însă echivalentă cu

$$\max_{\mathbf{a}} t^2(\mathbf{a}) \leq t_{\alpha/2}(N-1).$$

Prin urmare statistica folosită pentru verificarea ipotezei asupra vectorului medie este $\max_{\mathbf{a}} t^2(\mathbf{a})$.

Pentru a determina maximul acestei funcții, cu condiția

$$\mathbf{a}'\mathbf{S}\mathbf{a} = 1$$

se folosește metoda multiplicatorilor lui Lagrange.

Derivând în raport cu $\mathbf{a}$ obținem sistemul de ecuații

$$[(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)'N - \lambda\mathbf{S}]\mathbf{a} = 0.$$

Înmulțind această ecuație la stînga cu $\mathbf{a}'$, obținem

$$\lambda = \frac{\mathbf{a}'(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)'\mathbf{a}N}{\mathbf{a}'\mathbf{S}\mathbf{a}} = \frac{[\mathbf{a}'(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)]^2 N}{\mathbf{a}'\mathbf{S}\mathbf{a}} = t^2(\mathbf{a}).$$

Astfel λ este singura rădăcină nenulă a ecuației

$$|\mathbf{S}^{-1}(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)'N - \lambda\mathbf{I}| = 0$$

și $\max_{\mathbf{a}} t^2(\mathbf{a})$ este

$$(1) \quad \lambda = \text{Ur. } \mathbf{S}^{-1}(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)'N = N(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)'\mathbf{S}^{-1}(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0) = T^2.$$

Această formă pătratică este statistica T^2 a lui Hotelling. Se observă analogia între statisticile t^2 și $T^2((\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)$ este înlocuită prin $\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0$, iar s^2 prin $\mathbf{S}$).

TEOREMA 1. Statistica T^2 este invariantă la toate transformările afine

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{D}$$

unde $\mathbf{C}$ este o matrice nesingulară de ordin $p \times p$ și $\mathbf{D}$ este un vector $p \times 1$.

Demonstrație. Avem

$$\begin{aligned} T^2 &= N(\bar{C}\bar{X} + D - C\mu_0 - D)' (CSC')^{-1} (C\bar{X} + D - C\mu_0 - D) = \\ &= N(\bar{X} - \mu_0)' C'C^{-1}S^{-1}C^{-1}C(\bar{X} - \mu_0) = \\ &= N(\bar{X} - \mu_0)' S^{-1}(\bar{X} - \mu_0), \end{aligned}$$

ceea ce demonstrează teorema.

Fie $x_1, \dots, x_N$ o selecție asupra vectorului $N(\mu, \Sigma)$. Ne propunem să determinăm statistica T^2 . Dacă b este soluția ecuației

$$Ab = \bar{X} - \mu_0,$$

atunci

$$T^2/(N-1) = N(\bar{X} - \mu_0)' b.$$

Se observă că pentru determinarea statisticii T^2 nu trebuie calculate matricele A^{-1} sau S^{-1} și că $T^2/(N-1)$ este rădăcina nenulă a ecuației

$$|N(\bar{X} - \mu_0)(\bar{X} - \mu_0)' - \lambda A| = 0$$

ceea ce rezultă din

LEMA 1. Dacă v este un vector p -dimensional, B este o matrice de ordin $(p \times p)$, nesingulară, atunci $v'B^{-1}v$ este rădăcina nenulă a ecuației

$$(2) \quad |vv' - \lambda B| = 0.$$

Demonstrație. Dacă λ_1 este rădăcina nenulă a ecuației (2), atunci vectorul caracteristic β , verifică ecuația

$$(3) \quad vv'\beta = \lambda_1 B\beta.$$

Deoarece $\lambda_1 \neq 0$, atunci $v'\beta \neq 0$. Înmulțind (3) la stînga cu $v'B^{-1}$ obținem

$$(v'B^{-1}v)(v'\beta) = \lambda_1(v'\beta)$$

ceea ce demonstrează lema.

$$T^2 = N(\bar{x} - \mu)' S^{-1}(\bar{x} - \mu)$$

este un caz particular al statisticii T^2 definită în III.3.3. și se obține din ea pentru

$$Y = \sqrt{N}(\bar{x} - \mu_0),$$

$$v = \sqrt{N}(\mu - \mu_0) \text{ și } n = N - 1.$$

1.2. Regiuni de încredere pentru vectorul medie

Dacă $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$ este o selecție asupra vectorului $\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, atunci

$$P \left[N(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}) \leq \frac{N-1}{N-p} F_{\alpha}(p, N-p) \right] = 1 - \alpha.$$

Mulțimea punctelor, ale căror coordonate verifică inegalitatea

$$(4) \quad N(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}) \leq \frac{N-1}{N-p} F_{\alpha}(p, N-p)$$

reprezintă în spațiul p -dimensional interiorul și frontiera elipsoidului cu centrul în punctul $\bar{\mathbf{x}}$, a cărei dimensiune și formă depinde de $\mathbf{S}^{-1}$ și α . Inegalitatea (4) afirmă că $\boldsymbol{\mu}$ este situat în interiorul elipsoidului.

1.3. Problema celor două selecții

Fie $\mathbf{x}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{x}_{N_i}^{(i)}$ o selecție asupra vectorului $\mathbf{X}^{(i)} \sim N(\boldsymbol{\mu}^{(i)}, \boldsymbol{\Sigma})$ $i = 1, 2$, unde matricea $\boldsymbol{\Sigma}$ este necunoscută. Ne propunem să verificăm ipoteza

$$H_0: \boldsymbol{\mu}^{(1)} = \boldsymbol{\mu}^{(2)}.$$

Variabila aleatoare $\bar{\mathbf{x}}^{(i)} = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} \mathbf{x}_j^{(i)} \sim N(\boldsymbol{\mu}^{(i)}, \boldsymbol{\Sigma}/N_i)$, și dacă ipoteza H_0 este adevărată, atunci

$$\sqrt{\frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2}} (\bar{\mathbf{X}}^{(1)} - \bar{\mathbf{X}}^{(2)}) \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}).$$

Dacă

$$S = \frac{1}{N_1 + N_2 - 2} \left[\sum_{j=1}^{N_1} (\mathbf{X}_j^{(1)} - \bar{\mathbf{X}}^{(1)}) (\mathbf{X}_j^{(1)} - \bar{\mathbf{X}}^{(1)})' + \sum_{j=1}^{N_2} (\mathbf{X}_j^{(2)} - \bar{\mathbf{X}}^{(2)}) (\mathbf{X}_j^{(2)} - \bar{\mathbf{X}}^{(2)})' \right].$$

atunci $(N_1 + N_2 - 2) S$ este repartizată ca $\sum_{j=1}^{N_1 + N_2 - 2} \mathbf{Z}_j \mathbf{Z}_j'$, unde $\mathbf{Z}_j \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$.

Urmează că

$$(5) \quad T^2 = \frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2} (\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(2)})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(2)}) \sim T^2(N_1 + N_2 - 2).$$

Regiunea critică, pentru pragul de semnificație α , este determinată din inegalitatea

$$(6) \quad T^2 \geq \frac{(N_1 + N_2 - 2) p}{N_1 + N_2 - p - 1} F_{\alpha}(p, N_1 + N_2 - p - 1)$$

(5) este un caz particular al statisticii T^2 definite în III.3.3, în care $Y = \sqrt{N_1 N_2 / (N_1 + N_2)} (\bar{X}^{(1)} - \bar{X}^{(2)})$, S este matricea generală a covarianțelor și $n = N_1 + N_2 - 2$.

Putem construi o regiune de încredere elipsoidală pentru diferența $\delta = \mu^{(1)} - \mu^{(2)}$, observînd că

$$(7) \quad T^2 = \frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2} (\bar{X}^{(1)} - \bar{X}^{(2)} - \delta)' S^{-1} (\bar{X}^{(1)} - \bar{X}^{(2)} - \delta)$$

este repartizat T^2 . Din egalitatea

$$P \left[(\bar{X}^{(1)} - \bar{X}^{(2)} - \delta)' S^{-1} (\bar{X}^{(1)} - \bar{X}^{(2)} - \delta) \leq \frac{N_1 + N_2}{N_1 N_2} T_{\alpha}^2(p, N_1 + N_2 - p - 1) \right] = 1 - \alpha$$

unde

$$T_{\alpha}^2(p, N_1 + N_2 - p - 1) = \frac{(N_1 + N_2 - 2)p}{N_1 + N_2 - p - 1} F_{\alpha}(p, N_1 + N_2 - p - 1)$$

obținem o regiune de încredere pentru δ .

Intervalele de încredere simultane, cu coeficientul de încredere $(1 - \alpha)$ pentru toate combinațiile liniare $a'\delta$ de diferențe de medii sint definite de

$$(8) \quad \begin{aligned} & a'(\bar{X}^{(1)} - \bar{X}^{(2)}) - \sqrt{a' S a \frac{N_1 + N_2}{N_1 N_2}} T_{\alpha}(p, N_1 + N_2 - p - 1) \leq a'\delta \leq \\ & \leq a'(\bar{X}^{(1)} - \bar{X}^{(2)}) + \sqrt{a' S a \frac{N_1 + N_2}{N_1 N_2}} T_{\alpha}(p, N_1 + N_2 - p - 1). \end{aligned}$$

Pentru $p = 1$, se obțin statisticile test și intervalele de încredere, pentru cazul unidimensional, în funcție de t^2 .

1.4. Problema celor q selecții

Fie $\{x_j^{(i)}\}$ ($j = 1, \dots, N_i$, $i = 1, \dots, q$) selecții asupra vectorilor $X^{(i)} \sim N(\mu^{(i)}, \Sigma)$, ($i = 1, \dots, q$). Ne propunem să verificăm ipoteza

$$H: \sum_{i=1}^q \beta_i \mu^{(i)} = \mu,$$

unde $\beta_1, \dots, \beta_q$ sînt scalari dați și μ este un vector dat. Avem

$$(9) \quad T^2 = c \left(\sum_{i=1}^q \beta_i \bar{X}^{(i)} - \mu \right)' S^{-1} \left(\sum_{i=1}^q \beta_i \bar{X}^{(i)} - \mu \right)$$

unde

$$\bar{x}_i = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} x_j^{(i)}$$

$$\left(\sum_1^q N_i - q \right) S = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{N_i} (x_j^{(i)} - \bar{x}^{(i)}) (x_j^{(i)} - \bar{x}^{(i)})', \quad \frac{1}{c} = \sum_1^q \beta_i^2 / N_i.$$

Variabila T^2 , astfel definită, este repartizată $T^2 \left(p, \sum_1^q N_i - q \right)$.

1.5. Problema simetriei

Fie $x_1, x_2, \dots, x_N$ o selecție asupra vectorului $X \sim N(\mu, \Sigma)$ unde $\mu' = (\mu_1, \dots, \mu_p)$. Ne propunem să verificăm ipoteza

$$H: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_p.$$

Fie C o matrice de ordinul $(p-1) \times p$ și de rang $p-1$ astfel ca $C\varepsilon = 0$, unde $\varepsilon' = (1, 1, \dots, 1)$. Atunci

$$y_j = Cx_j (j = 1, \dots, N)$$

are valoarea medie $C\mu$ și matricea de covarianțe CS^C' . Statistica pe care o vom folosi este

$$T^2 = N\bar{y}'S^{-1}\bar{y},$$

unde

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_1^N y_j = C\bar{x},$$

$$S = \frac{1}{N-1} \sum_1^N (y_j - \bar{y})(y_j - \bar{y})' = \frac{1}{N-1} C \sum_{j=1}^N (x_j - \bar{x})(x_j - \bar{x})' C'.$$

Această statistică este repartizată $T^2(p-1, N-1)$. Ea este invariantă în raport cu orice transformare liniară în spațiul cu $(p-1)$ dimensiuni ortogonal vectorului ε . Prin urmare această statistică nu depinde de alegerea lui C .

1.6. Puterea testului

Probabilitatea erorii de ordinul II, β poate fi obținută din repartiția lui T^2 când ipoteza nulă nu este adevărată. În teorema III.23 am văzut că dacă $T^2 = y'S^{-1}y$ este calculat pentru un vector y , p -dimensional repartizat $N(\mu, \Sigma)$ și estimația S a lui Σ este bazată pe n grade de libertate, atunci

$$F = T^2 \frac{n-p+1}{np} \sim F(p, n-p+1, \delta^2 = \mu'\Sigma^{-1}\mu).$$

Dacă ipoteza $H_0: \mu = \mu_0$ este verificată față de ipoteza $H_1: \mu \neq \mu_0$ statistica

$$F = \frac{N_1 + N_2 - p - 1}{(N_1 + N_2 - 2)p} T^2,$$

cu T^2 definit de (5) este repartizată F necentrat cu p și $N_1 + N_2 - p + 1$ grade de libertate și parametrul de necentricitate

$$\frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2} (\mu_1 - \mu_2)' \Sigma^{-1} (\mu_1 - \mu_2).$$

În fiecare din aceste cazuri, puterea testului este

$$1 - \beta(\delta^2) = P(F' > F_\alpha(p, n - p + 1)),$$

unde F' este repartizată F necentrat cu p și $n - p + 1$ grade de libertate.

Puterea testului este o funcție monoton crescătoare de parametrul de necentricitate.

1.7. Proprietăți optime ale testului T^2

Vom arăta că în clasa testelor, testul T^2 este cel mai puternic.

Să presupunem că vrem să verificăm ipoteza $\mu = 0$ pe baza a N observații $x_1, x_2, \dots, x_N$ efectuate asupra unui vector $X \sim N(\mu, \Sigma)$. Pentru început vom studia testele bazate pe statisticile

$$A = \sum_{j=1}^N (x_j - \bar{x})(x_j - \bar{x})' \text{ și } \bar{x}$$

care sînt invariante la o transformare $A^* = CAC'$ și $\bar{x}^* = C\bar{x}$ unde C este o matrice nedegenerată. Transformarea $x_j^* = Cx_j$ nu schimbă problema, adică în termeni de x_j^* vom verifica ipoteza $M(x_j^*) = 0$ cu condiția ca $x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*$ sînt cele N observații efectuate asupra unei populații normale multidimensionale. Pentru ca să fie invariantă la o asemenea transformare trebuie să alegem acele regiuni critice care nu se schimbă la o transformare liniară nedegenerată de coordonate.

TEOREMA 2. Dacă $x_1, x_2, \dots, x_N$ este o selecție asupra vectorului $X \sim N(\mu, \Sigma)$ atunci dintre toate testele pentru verificarea ipotezei $\mu = 0$ bazate pe statisticile $\bar{x}$ și $A = \Sigma(x_j - \bar{x})(x_j - \bar{x})'$, invariante relativ la transformarea $\bar{x}^* = C\bar{x}$, $A^* = CAC'$ (unde C este o matrice nedegenerată), testul T^2 este cel mai puternic.

Demonstrație. Teorema 1 arată că orice test bazat pe statistica T^2 este invariant. În al doilea rînd acest test este singura funcție invariantă, așa că din invarianța funcției $f(\bar{x}, A)$ rezultă că $f(\bar{x}, A) = f(\bar{x}^*, I)$ unde numai prima coordonată a vectorului $\bar{x}^*$ este diferită de zero și egală cu $|\bar{x}' A^{-1} \bar{x}|$. În acest fel $f(\bar{x}, A)$ depinde numai de $\bar{x}' A^{-1} \bar{x}$. De aceea, testele invariante vor fi bazate pe $\bar{x}' A^{-1} \bar{x}$.

În trei dimensiuni putem aplica lema Neyman-Pearson la repartiția T^2 , pentru a obține un test U.C.M.P. bazat pe T^2 , pentru ipoteza simplă $\tau^2 = N\mu' \Sigma^{-1} \mu$.

Un test mai puternic pentru verificarea ipotezei $\tau^2 = 0$ este bazat pe densitatea statisticii T^2 din III.23. Acest test constă în aceea că

$$\begin{aligned}
 c &< e^{-\frac{1}{2}\tau^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\tau^2/2)^j (t^2/n)^{\frac{p}{2}+j-1} [1 + (t^2/n)]^{-\frac{n+1}{2}+j} \Gamma\left(\frac{n+1}{2} + j\right)}{j! \Gamma\left(\frac{p}{2} + j\right)} : \\
 (10) \quad &: \frac{(t^2/n)^{\frac{p}{2}-1} [1 + (t^2/n)]^{-\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} = \\
 &= \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} e^{-\frac{1}{2}\tau^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\tau^2/2)^j \Gamma\left(\frac{n+1}{2} + j\right)}{j! \Gamma\left(\frac{p}{2} + j\right)} \left[\frac{(t^2/n)}{1 + (t^2/n)} \right]^j.
 \end{aligned}$$

Prima parte din (10) este o funcție strict crescătoare de raportul $\frac{t^2/n}{1 + t^2/n}$ și prin urmare de t^2 . În acest fel, pentru un k ales inegalitatea (10) este echivalentă cu inegalitatea $t^2 > k$. Cum ultima nu depinde de τ^2 , testul este mai puternic.

DEFINIȚIA 1. Funcția $\psi(\bar{x}, A)$ care îndeplinește condițiile

a) $0 \leq \psi(\bar{x}, A) \leq 1$,

b) pentru $\mu = 0$, $M[\psi(\bar{x}, A)] = \varepsilon$

unde ε este pragul de semnificație, se numește funcție critică.

Prin aleatorizarea testului ipoteza se respinge cu probabilitatea $\psi(\bar{x}, B)$ când $\bar{x} = x$ și $A = B$.

DEFINIȚIA 2. Testul nealeator se definește ca fiind testul care corespunde funcției critice $\psi(\bar{x}, A)$ ce ia numai valorile 0 și 1.

Folosind lema Neyman-Pearson obținem :

CONSECINȚA 1. Dintre toate testele aleatoare construite pe baza selecției $x_1, x_2, \dots, x_N$ efectuate asupra vectorului $X \sim N(\mu, \Sigma)$, bazate pe statisticile $\bar{x}$ și A și care sînt invariante relativ la transformarea $\bar{x}^* = C\bar{x}$, $A^* = CAC'$ (C fiind o matrice nesară) testul T^2 este U.C.M.P.

TEOREMA 3. Dintre toate testele pentru verificarea ipotezei $\mu = 0$ pe baza selecției $x_1, x_2, \dots, x_N$ asupra vectorului $X \sim N(\mu, \Sigma)$ teste ce sînt invariante relativ la transformarea $x_j^* = Cx_j$ (C fiind o matrice nedegenerată), testul T^2 este U.C.M.P. Astfel testul T^2 este C.M.P. printre toate celelalte teste invariante.

Demonstrație. Fie $\psi(x_1, x_2, \dots, x_N)$ funcția critică a testului invariant. Atunci

$$(11) \quad M[\psi(x_1, x_2, \dots, x_N)] = M_{\bar{x}, A} \{M[\psi(x_1, x_2, \dots, x_N) | \bar{x}, A]\}.$$

Cum $\bar{x}$ și A sînt statistici suficiente pentru μ și Σ , atunci $M[\psi(x_1, x_2, \dots, x_N) | \bar{x}, A]$ depind numai de $\bar{x}$ și de A .

$M[\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) | \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{A}]$ este invariantă și are aceeași putere ca și $\psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$. Astfel fiecare test din această clasă mare de teste se poate transforma într-un test de aceeași putere din clasa mai restrinsă în care intră testele ce depind numai de $\bar{\mathbf{x}}$ și $\mathbf{A}$.

Observația precedentă completează demonstrația teoremei.

TEOREMA 4. Dacă $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$ este o selecție asupra vectorului $\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, atunci dintre toate testele pentru verificarea ipotezei $\boldsymbol{\mu}^* = \boldsymbol{\mu}_0$ bazate pe statisticile $\bar{\mathbf{x}}$ și $\mathbf{A} = \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})'$ cu puterea depinzând numai de $N\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}$ testul T^2 este U.C.M.P.

Demonstrație. Vom reduce demonstrația acestei teoreme la teorema 2 introducând următoarea definiție.

DEFINIȚIA 3. Testul $\psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ se numește aproape invariant dacă

$$(12) \quad \psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = \psi(\mathbf{C}\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{C}\mathbf{x}_N)$$

pentru toți $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$ în afara unei mulțimi de valori $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$ de măsură nulă.

Teoremele 2 și 3 rămân adevărate dacă extindem definiția testului invariant la cazul cînd (12) este adevărată peste tot, în afara unei mulțimi fixate $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$, de măsură nulă (mulțime care nu depinde de $\mathbf{C}$).

Hunt și Stein au arătat că în acest caz proprietatea de aproape invariant atrage după sine proprietatea de invariant.

Arătăm că dacă testul $\psi(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{A})$ are puterea depinzând numai de $N\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}$ atunci el este aproape invariant.

Deoarece puterea testului $\psi(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{A})$ depinde numai de $N\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}$ atunci puterea este

$$(13) \quad M_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}} \psi(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{A}) = M_{\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{C}^{-1})'} \psi(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{A}) = M_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}} \psi(\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}').$$

Membrilor doi și trei din (13) le corespunde una și aceeași integrală scrisă sub diferite condiții. În acest fel

$$(14) \quad M_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}} [\psi(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{A}) - \psi(\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}')] \equiv 0$$

identic în raport cu $\boldsymbol{\mu}$ și $\boldsymbol{\Sigma}$. Cum $\bar{\mathbf{x}}$ și $\mathbf{A}$ reprezintă mulțimea totală a statisticilor suficiente pentru $\boldsymbol{\mu}$ și $\boldsymbol{\Sigma}$, atunci

$$f(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{A}) = \psi(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{A}) - \psi(\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}') = 0$$

aproape peste tot.

Pentru a demonstra această afirmație, studiem următoarea relație

$$(15) \quad K \iint \dots \int f(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{A}) \frac{|\mathbf{A}|^{(N-p-2)/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\text{Ur. } \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{A} + N(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})] \right\}}{|\boldsymbol{\Sigma}|^{N/2}} d\bar{\mathbf{x}} d\mathbf{A} \equiv 0$$

unde

$$d\bar{x} = \prod d\bar{x}_i, dA = \prod da_{ij}$$

și

$$K^{-1} = 2^{\frac{pN}{2}} \pi^{\frac{p(p-1)}{4} + \frac{p}{2}} \prod_{i=1}^p \Gamma\left(\frac{N-i}{2}\right) N^{-\frac{p}{2}}.$$

Membrul stâng din (15) reprezintă integrala din funcția $f(\bar{x}, A)$ înmulțită cu densitatea de probabilitate a lui $\bar{x}$ și densitatea de probabilitate a lui A . Schimbând în (15) Σ^{-1} în $I - 2\theta$, unde $\theta = \theta'$ și μ în $(I - 2\theta)^{-1}t$, obținem

$$(16) \quad K \iint \dots \int f(\bar{x}, A) |I - 2\theta|^{N/2} |A|^{(N-p-2)/2} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\text{Ur. } (I-2\theta) (A + N\bar{x}\bar{x}') - 2Nt'\bar{x} + Nt'(I-2\theta)^{-1}t] \right\} d\bar{x} dA \equiv 0.$$

Înmulțind (16) cu

$$(I - 2\theta)^{-N/2} \exp \left[\frac{1}{2} Nt'(I - 2\theta)^{-1}t \right],$$

obținem

$$(17) \quad K \iint \dots \int f[\bar{x}, (A + N\bar{x}\bar{x}') - N\bar{x}\bar{x}'] |A|^{\frac{1}{2}(N-p-2)} \times \\ \times \exp \left[-\frac{1}{2} \text{Ur. } (A + N\bar{x}\bar{x}') + \text{Ur. } \theta(A + N\bar{x}\bar{x}') + Nt'\bar{x} \right] d\bar{x} dA \equiv 0.$$

Aceasta este transformata Laplace a funcției

$$f[\bar{x}, (A + N\bar{x}\bar{x}') - N\bar{x}\bar{x}'] K |A|^{\frac{(N-p-2)}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \text{Ur. } (A + N\bar{x}\bar{x}') \right]$$

referitor la variabilele $N\bar{x}$ și $A + N\bar{x}\bar{x}'$.

Cum ea este nulă rezultă că

$$f(\bar{x}, A) = 0$$

peste tot în afara unei mulțimi de măsură nulă.

Cum din teorema 2 decurge teorema 3, la fel din teorema 4 decurge

TEOREMA 5 (Simaika (1941)). *Dintre toate testele pentru verificarea ipotezei $\mu = 0$, construite pe baza selecției $x_1, x_2, \dots, x_N$ asupra vectorului $\bar{X} \sim N(\mu, \Sigma)$ cu puterea depinzând numai de $N\mu'\Sigma^{-1}\mu$, testul T^2 este mai puternic.*

Rezultatele prezentate în I.7 au fost obținute de Anderson (1958).

§ 2. Testul raportului de verosimilitate pentru ipoteze asupra vectorilor valori medii

2.1. Repartiția statisticii U

Presupunem că sînt dați N vectori aleatori p -dimensionali care satisfac ipoteza

$\mathbf{X}_\alpha$ au repartiții $N(\mathbf{B}z_\alpha, \Sigma)$, $1 \leq \alpha \leq N$;

$\mathbf{X}_\alpha$ sînt independenți stochastici;

(18) $\mathbf{B}$ este matrice $p \times q$, Σ este o matrice $p \times p$;

z_α este un vector $q \times 1$, iar $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$, $z'_\alpha = (z^{(1)'}_\alpha, z^{(2)'}_\alpha)$, unde $\mathbf{B}_1$ este o matrice $q_1 \times q$, $z^{(1)'}_\alpha$ este un vector $1 \times q_1$, $q_1 < q$, $q_1 = q - q_2$, $N \geq p + q$.

Ne propunem să verificăm ipoteza

$$(19) \quad H: \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_1^*,$$

unde $\mathbf{B}_1^*$ este o matrice determinată, iar Σ este o matrice necunoscută.

Fie $\omega = \Omega \cap H$ și $\hat{\Sigma}_\omega$ estimarea de maximă verosimilitate pentru Σ cînd este adevărată ipoteza $\Omega(\omega)$.

PROPOZIȚIA 1 (Anderson (1958)). *Avem*

$$(20) \quad \hat{\Sigma}_\Omega = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{X}_\alpha - \hat{\mathbf{B}}z_\alpha) (\mathbf{X}_\alpha - \hat{\mathbf{B}}z_\alpha)'$$

$$\hat{\Sigma}_\omega = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{X}_\alpha - \mathbf{B}_1^* z^{(1)'}_\alpha) (\mathbf{X}_\alpha - \mathbf{B}_1^* z^{(1)'}_\alpha)' - \hat{\mathbf{B}}_{2\omega} \mathbf{A}_{22} \hat{\mathbf{B}}_{2\omega}',$$

unde

$$(21) \quad \hat{\mathbf{B}} = \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{X}_\alpha z'_\alpha) \mathbf{A}^{-1}; \quad \mathbf{A} = \sum_{\alpha=1}^N z_\alpha z'_\alpha = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{B}}_{2\omega} = \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{X}_\alpha - \mathbf{B}_1^* z^{(1)'}_\alpha) z^{(2)'}_\alpha \mathbf{A}_{22}^{-1} = (\mathbf{C}_2 - \mathbf{B}_1^* \mathbf{A}_{12}) \mathbf{A}_{22}^{-1},$$

iar

$$(22) \quad \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{X}_\alpha z'_\alpha = \mathbf{C} = (\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2).$$

Matricele $\mathbf{A}$ și $\mathbf{C}$ care intervin în formulele precedente sînt împărțite în celule corespunzător cu matricea $\mathbf{B}$. De exemplu matricea $\mathbf{A}_{22}$ are ordinul $q_2 \times q_2$, iar matricea $\mathbf{C}_2$ are q_2 coloane.

Raportul de verosimilități pentru verificarea ipotezei (19) este dat de

$$(23) \quad l = \frac{P_\omega}{P_\Omega} = \frac{|\hat{\Sigma}_\Omega|^{N/2}}{|\hat{\Sigma}_\omega|^{N/2}}.$$

În continuare, în loc de l vom folosi statistica

$$(24) \quad U = l^2 = \frac{|\hat{\Sigma}_\Omega|}{|\hat{\Sigma}_\omega|}$$

și vom nota $U = U(p, q_1, N - q_1 - q_2)$.

TEOREMA 6 (Anderson (1958)). Dacă ipoteza H este adevărată, atunci momentul de ordinul h al statisticii U definită de (24) este dat de relația

$$(25) \quad M(U^h) = \prod_{i=1}^p \left\{ \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(N - q_1 - q_2 + 1 - i) + h\right] \Gamma\left[\frac{1}{2}(N - q_2 + 1 - i)\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{2}(N - q_1 - q_2 + 1 - i)\right] \Gamma\left[\frac{1}{2}(N - q_2 + 1 - i) + h\right]} \right\}.$$

De obicei se notează $N - q_1 - q_2 = n$. Se observă că

$$(26) \quad U(1, q_1, n) = \frac{1}{1 + \frac{q}{n} F(q, n)}.$$

Se arată că momentele de orice ordine ale variabilei aleatoare $U(p, q, N - q_1 - q_2)$ sînt egale cu momentele variabilei aleatoare $U(q_1, p, N - p - q_2)$. De aici se deduce următoarea teoremă.

TEOREMA 7 (Anderson (1958)). Repartiția variabilei $U(p, q, N - q_1 - q_2)$ nu se schimbă dacă se permută între ei indicii p și q cu condiția ca $N - q_2$ să rămînă constant.

Cu alte cuvinte rezultă că repartiția variabilei aleatoare $U(p, q_1, n)$ este aceeași cu repartiția variabilei aleatoare $U(q_1, p, n + q_1 - p)$.

Conform teoremei 6 rezultă că momentul de ordinul h al variabilei $U(p, m, n)$ este de forma

$$(27) \quad M(U^h(p, m, n)) = \prod_{i=1}^p \left\{ \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-i) + h\right] \Gamma\left[\frac{1}{2}(n+m-i)\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-i)\right] \Gamma\left[\frac{1}{2}(n+m-i) + h\right]} \right\} = \\ = \prod_{i=1}^p M(X_i^h)$$

unde variabilele $\{X_i\}$ sînt independente iar $X_i \sim B\left(\frac{n+1-i}{2}, \frac{m}{2}\right)$.

Deoarece

$$\prod_i M(X_i^h) = M\left(\prod_i X_i^h\right).$$

rezultă :

TEOREMA 8 (Anderson (1958)). Variabila aleatoare $U(p, m, n)$ are aceeași repartiție ca variabila $\prod_{i=1}^p X_i$ unde $\{X_i\}$ sînt variabile aleatoare independente iar $X_i \sim B\left(\frac{n+1-i}{2}, \frac{m}{2}\right)$.

Dacă se ține seama de teorema 7 și se consideră în (27) pe rînd cazurile $p = 2r$ și $p = 2s + 1$ atunci se obține

TEOREMA 9. (Anderson (1958)). Variabila aleatoare $U(2r, m, n)$ are aceeași repartiție ca produsul $\prod_{i=1}^r Y_i^2$ unde $\{Y_i\}$ sînt independente iar $Y_i \sim B(n+1-i, m)$; variabila aleatoare $U(2s+1, m, n)$ are aceeași densitate de repartiție ca $\prod_{i=1}^s Z_i^2 Z_{s+1}$ unde $\{Z_i\}_{1 \leq i \leq s}$ sînt independente și $\{Z_i\} \sim B(n+1-2i, m)$ iar Z_{s+1} care este independentă de $\{Z_i\}$, are densitatea $B\left(\frac{n+1-p}{2}, \frac{m}{2}\right)$.

Cu ajutorul teoremei 9 se determină funcția de repartiție a variabilei U .

Forme particulare ale funcției de repartiție corespunzătoare variabilei U .

Cazul $p = 1$. În acest caz $U(1, m, n) \sim B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)$. Ținînd seama de relația (24) obținem

$$(28) \quad \frac{1 - U(1, m, n)}{U(1, m, n)} \cdot \frac{m}{n} = F(m, n).$$

Cazul $p = 2$. Din teorema 9 urmează că $\sqrt{U(2, m, n)} \sim B(n, m)$. Ca și în cazul $p = 1$, $U(2, m, n)$ satisfac relația

$$(29) \quad \frac{1 - U(2, m, n)}{U(2, m, n)} \cdot \frac{n-1}{m} = F(2m, 2(n-1)).$$

Cazul $p = 3$. Conform teoremei 9 avem $U(3, m, n) = Z_1^2 Z_2$, unde $Z_1 \sim B(n-1, m)$, iar $Z_2 \sim B\left(\frac{n-2}{2}, \frac{m}{2}\right)$.

În cazul $m = 3$ (Anderson (1958)) se găsește că :

$$(30) \quad F(u) = P(U(3, 3, n) < u) = I_u\left(\frac{n}{2} - 1, \frac{3}{3}\right) +$$

$$+ \frac{\Gamma(n+2) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(n-1) \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right) \sqrt{\pi}} \left\{ \frac{2u^{\frac{n}{2}-1} \sqrt{1-u}}{n(n-1)} + \frac{u^{\frac{n-1}{2}}}{n-1} \left[\arcsin(2u-1) - \frac{\pi}{2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{2u^{\frac{n}{2}}}{n} \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-u}}{\sqrt{u}}\right) + \frac{2u^{\frac{n}{2}-1} (1-u)^{\frac{3}{2}}}{3(n+1)} \right\}.$$

Sînt cunoscute și unele rezultate referitoare la repartiția asimptotică a variabilei $U(p, q_1, N - q)$ (cînd N este suficient de mare).

TABELUL 1

Valorile α -cuantilelor inferioare ale
variabilei $U(3,3, n)$ cînd $\alpha=0,05$;
 $\alpha = 0,01$

n	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$
3	8,59.10	4,09.10
4	3,30.10	6,6.10
5	0,0183	0,00626
6	0,0447	—
7	0,0794	—
8	0,105	—
9	0,131	—
10	0,162	0,0979

Anderson (1958)

Cu notațiile :

$$n = N - q, \quad m = n - \frac{1}{2} (p - q_1 - l)$$

$$(31) \quad \gamma_2 = \frac{pq_1(p^2 + q_1^2 - 5)}{48}$$

$$\gamma_4 = \frac{\gamma_2^2}{2} + \frac{pq_1}{1920} [3p^4 + 3q_1^4 + 10p^2q_1^2 - 50(p^2 + q_1^2) + 159],$$

are loc

TEOREMA 10 (Anderson (1958)). *Avem :*

$$(32) \quad \begin{aligned} P\{-m \ln U(p, q_1, N - q) \leq z\} &= P[\chi^2(pq_1) \leq z] + \\ &+ \frac{\gamma_2}{m^2} (P\{\chi^2(pq_1 + 4) \leq z\} - P\{\chi^2(pq_1) \leq z\}) + \\ &+ \frac{1}{m^4} [\gamma_4 (P\{\chi^2(pq_1 + 8) \leq z\} - P\{\chi^2(pq_1) \leq z\}) - \\ &- \gamma_2^2 (P\{\chi^2(pq_1 + 4) \leq z\} - P\{\chi^2(pq_1) \leq z\})] + R \end{aligned}$$

unde R este un rest de ordinul lui $\frac{1}{N^6}$.

Din (23) și (24) rezultă că dacă se cunoaște funcția de repartiție a variabilei U , atunci se poate determina și funcția de repartiție a variabilei l .

Domeniul critic al testului referitor la ipoteza H este de forma $l \leq l_\alpha$ unde α este riscul de genul întâi. Dar acest domeniu critic este echivalent cu domeniul $U \leq U_\alpha$ unde U_α este α -cuantila inferioară a variabilei aleatoare $U(p, q, N - q_1 - q_2)$ cînd ipoteza H este adevărată.

2.2. Verificarea ipotezei privind egalitatea mediilor mai multor vectori normali care au aceeași matrice de covarianțe

Fie $\{Y_{\alpha}^{(i)}\}_{\alpha=1, \dots, N_i, i=1, \dots, q, q(q>2)}$ selecții asupra vectorilor $Y^{(i)} \sim N(\mu^{(i)}, \Sigma)$ p dimensional; $Y^{(i)}$ vectori independenți. Ne propunem să verificăm ipoteza

$$(33) \quad H: \mu^{(1)} = \mu^{(2)} = \dots = \mu^{(q)}$$

Observație. În cazul $q = 2$ se obține problema Behrens-Fisher.

Vom construi testul pentru verificarea ipotezei H , reducând problema la cea tratată în 2.1.

Fie X matricea $p \times N$ care are coloanele date de cele $N = \sum_1^q N_i$ valori vectoriale de selecție, deci

$$(34) \quad X = [X_1, X_2, \dots, X_{N_1}, X_{N_1+1}, \dots, X_N] = \\ = (Y_1^{(1)}, \dots, Y_{N_1}^{(1)}, Y_1^{(2)}, \dots, Y_{N_2}^{(2)}, \dots, Y_1^{(q)}, \dots, Y_{N_q}^{(q)}).$$

Să considerăm matricea

$$(35) \quad Z = (z_1, \dots, z_{N_1}, z_{N_1+1}, \dots, z_N) = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{N_1} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{N_2}$

unde $z_{\alpha} = (z_{i\alpha})$ sînt vectori $q \times 1$ ale căror componente satisfac condițiile

$$(36) \quad z_{i\alpha} = \begin{cases} 1, & \sum_1^{i-1} N_k < \alpha \leq \sum_1^i N_k, \quad 1 \leq i \leq q-1 \\ 1, & i = q \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

și să considerăm matricea celulară $B = (B_1, B_2)$ ale cărei celule sînt

$$(37) \quad B_1 = (\mu_1 - \mu_q, \dots, \mu_{q-1} - \mu_q) \\ B_2 = \mu_q.$$

Rezultă că $\mathbf{X}_\alpha$ este un vector de selecție dintr-o selecție asupra vectorului $N(\mathbf{Bz}_\alpha, \Sigma)$, iar ipoteza H definită de (33) devine

$$H: \mathbf{B}_1 = \mathbf{0}.$$

Am redus deci ipotezele fundamentale la ipoteza Ω dată de (18) iar ipoteza H la forma (19) unde $\mathbf{B}_1^* = \mathbf{0}$.

Pentru a construi testul referitor la ipoteza H , trebuie să aflăm expresia statisticii U definită de (24). Este deci nevoie de expresiile lui $\hat{\Sigma}_\Omega$ și $\hat{\Sigma}_\omega$ date de (20).

Se observă că

$$(38) \quad \mathbf{A} = \sum_{\alpha} \mathbf{z}_{\alpha} \mathbf{z}'_{\alpha} = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & \dots & 0 & N_1 \\ 0 & N_2 & \dots & 0 & N_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & N_{q-1} & N_{q-1} \\ N_1 & N_2 & \dots & N_{q-1} & N \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \sum_{\alpha} \mathbf{X}_{\alpha} \mathbf{z}'_{\alpha} = \left(\sum_{\alpha} \mathbf{Y}_{\alpha}^{(1)}, \sum_{\alpha} \mathbf{Y}_{\alpha}^{(2)}, \dots, \sum_{\alpha} \mathbf{Y}_{\alpha}^{(q-1)}, \sum_{i, \alpha} \mathbf{Y}_{\alpha}^{(i)} \right).$$

Deoarece $q_2 = 1$ rezultă că $\mathbf{A}_{22} = N$, $\mathbf{C}_2 = \sum_{i, \alpha} \mathbf{Y}_{\alpha}^{(i)}$, iar conform (21) avem

$$\hat{\mathbf{B}}_{2\omega} = \frac{1}{N} \sum_{i, \alpha} \mathbf{Y}_{\alpha}^{(i)} = \bar{\mathbf{Y}}.$$

Din a doua formulă (20) obținem

$$(39) \quad N \hat{\Sigma}_{\omega} = \sum_{\alpha} \mathbf{X}_{\alpha} \mathbf{X}'_{\alpha} - \bar{\mathbf{Y}} N \bar{\mathbf{Y}}' = \sum_{i, \alpha} (\mathbf{Y}_{\alpha}^{(i)} - \bar{\mathbf{Y}}) (\mathbf{Y}_{\alpha}^{(i)} - \bar{\mathbf{Y}})'$$

Din prima formulă (20) și din (21) obținem

$$N \hat{\Sigma}_{\Omega} = \sum_{\alpha} \mathbf{X}_{\alpha} \mathbf{X}'_{\alpha} - \hat{\mathbf{B}}_{\Omega} \mathbf{A} \hat{\mathbf{B}}'_{\Omega} = \sum_{\alpha} \mathbf{X}_{\alpha} \mathbf{X}'_{\alpha} - \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C}', \quad (\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{B}}_{\Omega}),$$

unde $\mathbf{C}$ este dată de (22). Calculăm $N \hat{\Sigma}_{\Omega}$. Fie matricea

$$(40) \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se observă că

$$\begin{aligned} \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{C}' &= \mathbf{CD}'(\mathbf{D}^{-1})'\mathbf{A}^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{DC}' = \mathbf{CD}'(\mathbf{DAD}')^{-1}\mathbf{DC}' = \\ &= (\sum_{\alpha} \mathbf{Y}_{\alpha}^{(1)}, \dots, \sum_{\alpha} \mathbf{Y}_{\alpha}^{(q)}) \begin{pmatrix} N_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & N_q \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{\alpha} \mathbf{Y}_{\alpha}^{(1)} \\ \vdots \\ \sum_{\alpha} \mathbf{Y}_{\alpha}^{(q)} \end{pmatrix} = \\ &= \sum_i \left(\sum_{\alpha} \mathbf{Y}_{\alpha}^{(i)} \frac{1}{N_i} \sum_{\gamma} \mathbf{Y}_{\gamma}^{(i)'} \right) = \sum_i N_i \bar{\mathbf{Y}}^{(i)} \bar{\mathbf{Y}}^{(i)'}, \end{aligned}$$

unde

$$(41) \quad \bar{\mathbf{Y}}^{(i)} = \frac{1}{N_i} \sum_{\alpha} \mathbf{Y}_{\alpha}^{(i)}.$$

Deci

$$(42) \quad N \hat{\Sigma}_{\Omega} = \sum_{i, \alpha} \mathbf{Y}_{\alpha}^{(i)} \mathbf{Y}_{\alpha}^{(i)'} - \sum_i N_i \bar{\mathbf{Y}}^{(i)} \bar{\mathbf{Y}}^{(i)'} = \sum_{i, \alpha} (\mathbf{Y}_{\alpha}^{(i)} - \bar{\mathbf{Y}}^{(i)}) (\mathbf{Y}_{\alpha}^{(i)} - \bar{\mathbf{Y}}^{(i)})'.$$

Din (39) și (42) se observă că dacă $\mu^{(1)} = \dots = \mu^{(q)}$ atunci $\hat{\Sigma}_{\omega}$ este estimăția lui Σ determinată pe baza selecției de volum N iar $\hat{\Sigma}_{\Omega}$ este media ponderată a estimăției lui Σ determinată pe baza selecțiilor de volume N_i ($N = \sum_0^q N_i$).

Deoarece $q_1 = q - 1$, rezultă că pentru verificarea ipotezei H trebuie să folosim statistica

$$U = \frac{|N \hat{\Sigma}_{\Omega}|}{|N \hat{\Sigma}_{\omega}|}$$

care este o variabilă $U(p, q - 1, n)$, $n = N - q$ iar regiunea critică a testului este conform § 2.1.

$$\frac{|N \hat{\Sigma}_{\Omega}|}{|N \hat{\Sigma}_{\omega}|} < U_{\alpha}(p, q - 1, n)$$

Să observăm acum că

$$\begin{aligned} N \hat{\Sigma}_{\omega} - N \hat{\Sigma}_{\Omega} &= \sum_{i, \alpha} \mathbf{Y}_{\alpha}^{(i)} \mathbf{Y}_{\alpha}^{(i)'} - N \bar{\mathbf{Y}} \bar{\mathbf{Y}}' - \sum_{i, \alpha} \mathbf{Y}_{\alpha}^{(i)} \mathbf{Y}_{\alpha}^{(i)'} + \sum_i N_i \bar{\mathbf{Y}}^{(i)} \bar{\mathbf{Y}}^{(i)'} = \\ &= \sum_i N_i (\bar{\mathbf{Y}}^{(i)} - \bar{\mathbf{Y}}) (\bar{\mathbf{Y}}^{(i)} - \bar{\mathbf{Y}})'. \end{aligned}$$

Dacă $p = 1$ domeniul critic devine

$$\frac{\sum_i N_i (\bar{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i,\alpha} (y_{\alpha}^{(i)} - \bar{y}^{(i)})^2} \cdot \frac{n}{q-1} > F_{\alpha}(q-1, n),$$

unde $F_{\alpha}(q-1, n)$ este α -cuantila superioară a unei variabile aleatoare repartizate $F(q-1, n)$.

2.3. Verificarea ipotezei privind egalitatea mediilor mai multor vectori normali cînd matricele de covarianță nu sînt egale

Vom prezenta o generalizare a problemei lui Behrens-Fisher în cazul cînd matricele de covarianță sînt necunoscute și neegale. Rezultatele ce vor fi menționate se datoresc lui Anderson (1963).

Fie $\mathbf{X}_{\alpha}^{(i)}$ $1 \leq i \leq q$, $\alpha = 1, \dots, N_i$, q selecții efectuate asupra a q vectori normali p -dimensionali $N(\mu^{(i)}, \Sigma_i)$ și să presupunem că avem de verificat ipoteza

$$(43) \quad H: \mu^{(1)} = \dots = \mu^{(q)}.$$

Cînd $q = 2$ sîntem în cazul clasic al problemei Behrens-Fisher.

Vom prezenta mai întîi testul pentru ipoteza H cînd $q = 3$ și $N_i = N$, $1 \leq i \leq 3$. Notăm

$$(44) \quad \begin{aligned} \mathbf{Y}_{\alpha} &= a_1 \mathbf{X}_{\alpha}^{(1)} + a_2 \mathbf{X}_{\alpha}^{(2)} + a_3 \mathbf{X}_{\alpha}^{(3)} \\ \mathbf{Z}_{\alpha} &= b_1 \mathbf{X}_{\alpha}^{(1)} + b_2 \mathbf{X}_{\alpha}^{(2)} + b_3 \mathbf{X}_{\alpha}^{(3)} \end{aligned}$$

unde $\sum_1^3 a_i = \sum_1^3 b_i = 0$, iar vectorii $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)'$; $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)'$ sînt linear independenți. Cu aceste notații ipoteza (43) este echivalentă cu ipoteza.

$$(45) \quad H^*: \begin{cases} M(\mathbf{Y}_{\alpha}) = \sum_1^3 a_i \mu^{(i)} = 0 \\ M(\mathbf{Z}_{\alpha}) = \sum_1^3 b_i \mu^{(i)} = 0. \end{cases}$$

Deci (44) rezultă că

$$(46) \quad \begin{aligned} \Sigma &= \text{cov} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{\alpha} \\ \mathbf{Z}_{\alpha} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{\alpha} \\ \mathbf{Z}_{\alpha} \end{pmatrix}' \right) = \\ &= \begin{pmatrix} a_1^2 \Sigma_1 + a_2^2 \Sigma_2 + a_3^2 \Sigma_3 & a_1 b_1 \Sigma_1 + a_2 b_2 \Sigma_2 + a_3 b_3 \Sigma_3 \\ a_1 b_1 \Sigma_1 + a_2 b_2 \Sigma_2 + a_3 b_3 \Sigma_3 & b_1^2 \Sigma_1 + b_2^2 \Sigma_2 + b_3^2 \Sigma_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

iar o estimatie a lui Σ este

$$(47) \quad S = \frac{1}{N-1} \sum_{\alpha=1}^N \begin{pmatrix} Y_{\alpha} - \bar{Y} \\ Z_{\alpha} - \bar{Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{\alpha} - \bar{Y} \\ Z_{\alpha} - \bar{Z} \end{pmatrix}'; \quad \bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha} Y_{\alpha}; \quad \bar{Z} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha} Z_{\alpha}.$$

Dacă ipoteza H este adevărată atunci variabila aleatoare

$$(48) \quad T^2 = N[\bar{Y}' \quad \bar{Z}'] S^{-1} \begin{bmatrix} \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix},$$

este repartizată $T^2(2p, N-1)$, adică

$$(49) \quad \frac{T^2}{N-1} \cdot \frac{N-2p}{2p} = F(2p, N-2p).$$

Deci regiunea critică a testului pentru verificarea ipotezei H este

$$(50) \quad \frac{T^2}{N-1} \cdot \frac{N-2p}{2p} > F_{\alpha}(2p, N-2p).$$

Dacă ipoteza H nu este adevărată, atunci variabila aleatoare (49) este o variabilă aleatoare $F(2p, N-2p; \delta)$ cu

$$(51) \quad \delta^2 = N\mu' \Sigma^{-1} \mu$$

unde Σ este definită de (46) iar $\mu = (\sum_1^3 a_i \mu^{(i)}, \sum_1^3 b_i \mu^{(i)})'$.

Dacă $\delta_0 > 0$ este o constantă dată (vezi teorema III.29) atunci probabilitatea erorii de gradul doi a testului menționat este

$$(52) \quad \beta = S_{2p, N-2p; \delta_0}(F_{\alpha}(2p, N-2p)),$$

unde $S_{2p, N-2p; \delta_0}$ este funcția de repartiție a variabilei aleatoare $F(2p, N-2p; \delta_0)$.

Deci problema verificării ipotezei H în cazul $q=3$ este rezolvată.

Dacă presupunem $q > 3$, atunci problema se rezolvă în mod asemănător, presupunând la fel ca mai înainte că volumele de selecție N , sînt toate egale cu N .

Vom nota ca mai înainte cu $\{X_{\alpha}^{(i)}\}$, $1 \leq \alpha \leq N$; $1 \leq i \leq q$ cele q selecții de volume egale efectuate asupra variabilelor normale $N(\mu^{(i)}, \Sigma_i)$, $1 \leq i \leq q$. Relațiile (44) se înlocuiesc în acest caz cu

$$(44') \quad Y_{\alpha}^{(i)} = \sum_{j=1}^q a_j^{(i)} X_{\alpha}^{(j)}, \quad \sum_{j=1}^q a_j^{(i)} = 0, \quad 1 \leq i \leq q-1, \quad 1 \leq \alpha \leq N$$

unde cei $q - 1$ vectori $\mathbf{a}^{(i)} = (a_1^{(i)}, \dots, a_q^{(i)})'$, $1 \leq i \leq q - 1$ sînt liniar independenți.

Ipoteza H definită de (45) este în acest caz echivalentă cu ipoteza

$$(45') \quad H^* : M[\mathbf{Y}_\alpha^{(i)}] = \sum_{j=1}^q a_j^{(i)} \boldsymbol{\mu}^{(j)} = \mathbf{0}.$$

Fie

$$(53) \quad \mathbf{Y}_\alpha = \begin{pmatrix} Y_\alpha^{(1)} \\ \vdots \\ Y_\alpha^{(q-1)} \end{pmatrix}$$

și să notăm $\Sigma = \text{cov}(\mathbf{Y}_\alpha, \mathbf{Y}_\alpha')$. O estimatie a acestei matrice Σ este

$$(54) \quad \mathbf{S} = \frac{1}{N-1} \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{Y}_\alpha - \bar{\mathbf{Y}})(\mathbf{Y}_\alpha - \bar{\mathbf{Y}})', \quad \bar{\mathbf{Y}} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha} \mathbf{Y}_\alpha.$$

Dacă ipoteza H definită de (45) este adevărată, atunci statistica

$$(55) \quad T^2 = N\bar{\mathbf{Y}}'\mathbf{S}^{-1}\bar{\mathbf{Y}} \sim T^2((q-1)p, N-1)$$

adică

$$(56) \quad \frac{T^2}{N-1} \cdot \frac{N-p(q-1)}{p(q-1)} = F(p(q-1), N-p(q-1)).$$

Să observăm că trebuie impusă condiția $N > (q-1)p$.

Regiunea critică pentru verificarea ipotezei H^* (deci și H) este

$$(57) \quad \frac{T^2}{N-1} \cdot \frac{N-p(q-1)}{p(q-1)} > F_\alpha(p(q-1), N-p(q-1)),$$

unde T^2 este definită de (55).

Dacă ipoteza H^* nu este adevărată, atunci statistica din primul membru al relației (56) este o variabilă aleatoare $F(p(q-1), N-p(q-1); \delta)$ unde parametrul de necentricitate δ este definit de relația

$$(58) \quad \delta^2 = N\boldsymbol{\mu}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu},$$

iar

$$(59) \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^q a_j^{(1)} \boldsymbol{\mu}^{(j)} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^q a_j^{(q-1)} \boldsymbol{\mu}^{(j)} \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \text{cov}(\mathbf{Y}_\alpha, \mathbf{Y}_\alpha').$$

În consecință puterea testului este $\pi = 1 - \beta$, unde

$$(60) \quad \beta = S_{p(q-1), N-p(q-1); \delta_0}(F_\alpha(p(q-1)), N - p(q-1))$$

iar δ_0 este o constantă dată.

Să vedem acum cum se construiește testul pentru verificarea ipotezei H definite de (43) în cazul cînd volumele de selecție N_i , $1 \leq i \leq q$ sînt egale. Pentru aceasta vom extinde procedeul utilizat în teorema III.32.

Fie deci $\{X_\alpha^{(i)}\}$, $1 \leq \alpha \leq N_i$, $1 \leq i \leq q$, selecții din populații normale $N(\mu^{(i)}, \Sigma_i)$, $1 \leq i \leq q$. Să presupunem că $N_i = \min N_i$ și fie

$$(61) \quad Y_\alpha^{(i)} = a_1^{(i)} X_\alpha^{(1)} + \sum_{j=2}^q a_j^{(i)} \left[\sqrt{\frac{N_1}{N_j}} \left[X_\alpha^{(j)} - \frac{1}{N_1} \sum_{\beta=1}^{N_1} X_\beta^{(j)} + \frac{1}{\sqrt{N_1 N_j}} \sum_{\beta=1}^{N_j} X_\beta^{(j)} \right] \right]_{\substack{1 \leq \alpha \leq N_1 \\ 1 \leq i \leq q-1}}$$

unde vectorii $a^{(i)} = (a_1^{(i)}, \dots, a_q^{(i)})'$, $1 \leq i \leq q-1$ sînt linear independenți.

Se observă că ipoteza H este echivalentă cu ipoteza

$$H^* : M(Y_\alpha^{(i)}) = \sum_{j=1}^q a_j^{(i)} \mu^{(j)} = 0, \quad \sum_{j=1}^q a_j^{(i)} = 0, \quad 1 \leq i \leq q-1.$$

În mod analog cu (53), din (61) se definesc vectorii

$$Y_\alpha = \begin{pmatrix} Y_\alpha^{(1)} \\ \vdots \\ Y_\alpha^{(q-1)} \end{pmatrix},$$

și să notăm

$$(62) \quad \Sigma = \text{cov}(Y_\alpha, Y'_\alpha),$$

unde Σ este o matrice $p(q-1) \times p(q-1)$. O estimatie a lui Σ se deduce prin procedeul general menționat în teorema III.24 și anume

$$(63) \quad S = \frac{1}{N_1 - 1} \sum_{\alpha=1}^{N_1} (Y_\alpha - \bar{Y})(Y_\alpha - \bar{Y})'$$

de unde se deduce că dacă ipoteza H este adevărată atunci statistica

$$(64) \quad T^2 = N_1 \bar{Y}' S^{-1} \bar{Y} \sim T^2(p(q-1), N_1 - 1),$$

adică

$$(65) \quad \frac{T^2}{N_1 - 1} \cdot \frac{N_1 - p(q-1)}{p(q-1)} = F(p(q-1), N_1 - p(q-1)).$$

Și aici trebuie impusă condiția $N > p(q-1)$.

Regiunea critică a testului pentru verificarea ipotezei H^* va fi tot de forma (57) unde în loc de N se pune N_1 .

Dacă ipoteza H^* nu este adevărată, atunci

$$(66) \quad \frac{T^2}{N_1 - 1} \cdot \frac{N_1 - p(q - 1)}{p(q - 1)} = F(p(q - 1), N - p(q - 1); \delta)$$

unde parametrul de necentricitate δ este dat de formula (58) cu μ și Σ definiți respectiv de (59), (62). Deci puterea testului este dată tot de relația (60).

§ 3. Testul raportului de verosimilități pentru ipoteze asupra matricelor de covarianțe

3.1. Testul raportului de verosimilități pentru verificarea ipotezei conform căreia matricea de covarianță este egală cu o matrice dată

Fie $X_1, X_2, \dots, X_N (N > p)$ o selecție asupra unui vector aleator p -dimensional normal cu vectorul valoarea medie μ necunoscut și matricea de covarianțe Σ necunoscută, Σ nesingulară. Ne propunem să verificăm ipoteza

$$(67) \quad H_0 : \Sigma = \Sigma_0$$

față de alternativele

$$(68) \quad H_1 : \Sigma \neq \Sigma_0,$$

unde media μ nu este specificată și Σ_0 este o matrice, dată de ordin $p \times p$, pozitiv definită.

PROPOZIȚIA 2. (Anderson (1958)). Regiunea de acceptare a testului raportului de verosimilități pentru această problemă este

$$(69) \quad \left\{ S | S \text{ este pozitiv definită și } |S\Sigma_0^{-1}|^{N/2} \exp \text{Ur} \left(-\frac{1}{2} \Sigma_0^{-1} S \right) \geq C_\alpha \right\},$$

$$\text{unde: } -S = \sum_{\alpha=1}^N (X_\alpha - \bar{X})(X_\alpha - \bar{X})'$$

— C_α este o constantă astfel încât pragul de semnificație al testului este α .

TEOREMA 11. (Sugiura, Nagao (1968)). Pentru verificarea ipotezei H_0 (67) față de H_1 (68), testul raportului de verosimilități modificat (se schimbă volumul selecției N prin numărul gradelor de libertate $N - 1 = n$) avînd regiunea de acceptare în raport cu S ,

$$(70) \quad A = \left\{ S | S \text{ este pozitiv definită și } |S\Sigma_0^{-1}|^{n/2} \exp \text{Ur} \left(-\frac{1}{2} \Sigma_0^{-1} S \right) \geq C_\alpha \right\}$$

este nedeplasat.

Demonstrație. În locul matricei S considerăm matricea

$$H' \Sigma_0^{-\frac{1}{2}} S \Sigma_0^{-\frac{1}{2}} H,$$

unde $\mathbf{H}$ este o matrice ortogonală astfel încît

$$\mathbf{H}' \Sigma_0^{-\frac{1}{2}} \Sigma \Sigma_0^{-\frac{1}{2}} \mathbf{H} = \Gamma \text{ (matrice diagonală)}$$

și matricea simetrică $\Sigma_0^{\frac{1}{2}}$ este definită astfel încît

$$\Sigma_0^{\frac{1}{2}} \Sigma_0^{\frac{1}{2}} = \Sigma_0.$$

Putem presupune, fără micșorarea generalității, că $\Sigma_0 = \mathbf{I}$ și $\Sigma = \Gamma$, este matricea diagonală ale cărei elemente diagonale sînt cele p rădăcini caracteristice ale matricei $\Sigma \Sigma_0^{-1}$. Atunci statistica $\mathbf{S}$ are, în ipoteza H_1 , repartiția Wishart $W(\mathbf{S}|\Gamma, n)$ astfel încît

$$(71) \quad P(A) = C_{p,n} \int_{\mathbf{S} \in A} |\mathbf{S}|^{(n-p+1)/2} |\Gamma|^{-n/2} \exp \text{Ur} \left(-\frac{1}{2} \Gamma^{-1} \mathbf{S} \right) d\mathbf{S},$$

unde: — integrarea se face după mulțimea tuturor matricilor pozitiv definite $\mathbf{S} = (s_{ij})$ de ordin $p \times p$ ce aparțin regiunii A ,

$$- d\mathbf{S} = \prod_{i \leq j} ds_{ij}$$

și

$$(72) \quad - C_{p,n}^{-1} = \pi^{p(p-1)/4} 2^{np/2} \prod_{i=1}^p \Gamma \left(\frac{n-i+1}{2} \right).$$

Dacă punem $\mathbf{U} = \Gamma^{-\frac{1}{2}} \mathbf{S} \Gamma^{-\frac{1}{2}}$, atunci matricea $\mathbf{U}$ este de asemenea pozitiv definită și jacobianul este dat de

$$\left| \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{S}} \right| = |\Gamma|^{-(p+1)/2}.$$

Deci avem

$$(73) \quad P(A) = C_{p,n} \int_{\mathbf{U} \in A^*} |\mathbf{U}|^{(n-p-1)/2} \exp \text{Ur} \left(-\frac{1}{2} \mathbf{U} \right) d\mathbf{U},$$

unde A^* reprezintă mulțimea tuturor matricilor $\mathbf{U}$ pozitiv definite astfel încît $\Gamma^{\frac{1}{2}} \mathbf{U} \Gamma^{\frac{1}{2}}$ aparține regiunii A .

Dacă este adevărată ipoteza H_0 , regiunea A^* este egală cu A . Urmează că

$$(74) \quad \begin{aligned} P_{H_0}(A) - P_{H_1}(A) &= C_{p,n} \left\{ \int_{\mathbf{U} \in A} - \int_{\mathbf{U} \in A^*} \right\} |\mathbf{U}|^{(n-p-1)/2} \exp \text{Ur} \left(-\frac{1}{2} \mathbf{U} \right) d\mathbf{U} = \\ &= C_{p,n} \left\{ \int_{\mathbf{U} \in A - A \cap A^*} - \int_{\mathbf{U} \in A^* - A \cap A^*} \right\} |\mathbf{U}|^{(n-p-1)/2} \exp \text{Ur} \left(-\frac{1}{2} \mathbf{U} \right) d\mathbf{U}. \end{aligned}$$



Observăm că inegalitatea :

$$|U|^{(n-p-1)/2} \exp \left(-\frac{1}{2} U \right) \geq C_\alpha |U|^{-(p+1)/2}$$

are loc pentru $U \in A$.

Deoarece integrala

$$\int_{U \in A - A \cap A^*} |U|^{(n-p-1)/2} \exp Ur \left(-\frac{1}{2} U \right) dU$$

există, avem

$$(75) \quad \int_{U \in A - A \cap A^*} |U|^{(n-p-1)/2} \exp Ur \left(-\frac{1}{2} U \right) dU \geq C_\alpha \int_{U \in A - A \cap A^*} |U|^{-(p+1)/2} dU.$$

De asemenea avem

$$(76) \quad - \int_{U \in A^* - A \cap A^*} |U|^{(n-p-1)/2} \exp Ur \left(-\frac{1}{2} U \right) dU \geq \\ \geq - C_\alpha \int_{U \in A^* - A \cap A^*} |U|^{-(p+1)/2} dU.$$

Combinând aceste două inegalități cu

$$\int_{A \cap A^*} |U|^{-(p+1)/2} dU < \infty$$

obținem

$$(77) \quad P_{H_0}(A) - P_{H_1}(A) \geq C_{p,n} C_\alpha \left\{ \int_{U \in A - A \cap A^*} - \int_{U \in A^* - A \cap A^*} \right\} |U|^{-(p+1)/2} dU = \\ = C_{p,n} C_\alpha \left\{ \int_{U \in A} - \int_{U \in A^*} \right\} |U|^{-(p+1)/2} dU = 0.$$

Ultima inegalitate are loc, deoarece $|U|^{-(p+1)/2} dU$ este măsură invariantă pentru transformarea matricei pozitiv definite U la matricea pozitiv definită BUB' pentru orice matrice B nesară, sau echivalent calculând jacobianul, obținem

$$\int_{U \in A^*} |U|^{-(p+1)/2} dU = \int_{U \in A} |U|^{-(p+1)/2} dU.$$

Teorema este demonstrată.

În cele ce urmează considerăm dezvoltarea asimptotică a statisticii raportul de verosimilități modificate

$$(78) \quad l^* = (e/n)^{np/2} |S \Sigma_0^{-1}|^{n/2} \exp Ur \left(-\frac{1}{2} \Sigma_0^{-1} S \right).$$

TEOREMA 12. (Anderson (1958)). Dacă este adevărată ipoteza H_0 atunci repartiția limită a statisticii $-2 \ln l^*$ este $\chi^2(p(p+1)/2)$.

Momentul de ordinul h al statisticii l^* , adevărată fiind ipoteza H_1 , este

$$(79) \quad M[l^{*h} | H_1] = (2e/n)^{nh/2} \left[\Gamma_p(n(1+h)/2) / \Gamma_p\left(\frac{1}{2}n\right) \right] \times \\ \times |\Sigma \Sigma_0^{-1}|^{nh/2} / |I + h \Sigma \Sigma_0^{-1}|^{n(1+h)/2}$$

unde

$$\Gamma_p(x) = \pi^{p(p-1)/4} \prod_{\alpha=1}^p \Gamma(x - (\alpha - 1)/2).$$

Deci funcția caracteristică a statisticii $-2 \ln l^*$, adevărată fiind ipoteza H_0 , se exprimă ca

$$(80) \quad \varphi_{H_0}(t) = \left(\frac{1}{2}n/e\right)^{itpn} \left[\Gamma_p(n(1-2it)/2) \Gamma_p\left(\frac{1}{2}n\right) \right] (1-2it)^{-np(1-2it)/2}.$$

Pentru funcția gama (Box (1948), Anderson (1958)) avem

$$(81) \quad \ln \Gamma(x+h) = \ln(2\pi)^{1/2} + \left(x+h-\frac{1}{2}\right) \ln x - x - \\ - \sum_{r=1}^k (-1)^r B_{r+1}(h) / [r(r+1)x^r] + O(x^{-k-1}),$$

relație care are loc pentru valori mari ale lui $|x|$, cu h fixat.

$B_r(h)$ care apare în (81) este polinomul lui Bernoulli de grad r și este dat de

$$\tau e^{h\tau} / (e^\tau - 1) = \sum_{r=0}^{\infty} (\tau^r / r!) B_r(h).$$

$$B_1(h) = h - \frac{1}{2}$$

$$B_3(h) = h^3 - \frac{3}{2}h^2 + \frac{1}{2}h$$

$$B_2(h) = h^2 - h + \frac{1}{6}$$

$$B_4(h) = h^4 - 2h^3 + h^2 - \frac{1}{30}$$

sînt cîteva dintre polinoamele lui Bernoulli.

Aplicînd formula (81) la fiecare funcție gama din (80), obținem

$$(82) \quad \ln \varphi_{H_0}(t) = -\frac{1}{4}p(p+1) \ln(1-2it) - \\ - \sum_{r=1}^k (-2)^r B_{r+1} / [r(r+1)n^r] \{(1-2it)^{-r} - 1\} + O(n^{-k-1}),$$

unde $B_{r+1} = \sum_{\alpha=1}^p B_{r+1}((1-\alpha)/2)$. Această formulă implică dezvoltarea asimptotică a funcției caracteristice a statisticii $-2 \ln l^*$

$$\begin{aligned} \varphi_{H_0}(t) = & (1-2it)^{-p(p+1)/4} [1 + B_2 n^{-1} \{(1-2it)^{-1} - 1\} + \\ & + \frac{1}{6} n^{-2} \{(3B_2^2 - 4B_3)(1-2it)^{-2} - 6B_2^2(1-2it)^{-1} + \\ (83) \quad & + (3B_2^2 + 4B_3)\} + \frac{1}{6} n^{-3} \{(4B_4 - 4B_2B_3 + B_2^3)(1+2it)^{-3} + \\ & + B_2(4B_3 - 3B_2^2)(1-2it)^{-2} + B_2(4B_3 + 3B_2^2)(1-2it)^{-1} - \\ & - (4B_4 + 4B_2B_3 + B_2^3)\}] + O(n^{-4}), \end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned} B_2 &= p(2p^2 + 2p - 1)/24 \\ (84) \quad B_3 &= -p(p-1)(p+1)(p+2)/32 \\ B_4 &= p(6p^4 + 15p^3 - 10p^2 - 30p + 3)/480. \end{aligned}$$

Folosind faptul că $(1-2it)^{-1/2}$ este funcția caracteristică a unei variabile $\chi^2(f)$, avem următoarea teoremă.

TEOREMA 13. (Suguira (1969)). *Dacă este adevărată ipoteza H_0 , funcția de repartiție a raportului de verosimilități modificat definit în (78) poate fi dezvoltată asimptotic ca:*

$$\begin{aligned} P(-2 \ln l^* \leq z) = & \\ = & P[\chi^2(f) \leq z] + B_2 n^{-1} \{P[\chi^2(f+2) \leq z] - P[\chi^2(f) \leq z]\} + \\ & + \frac{1}{6} n^{-2} \{(3B_2^2 - 4B_3) P[\chi^2(f+4) \leq z] - 6B_2^2 P[\chi^2(f+2) \leq z] + \\ (85) \quad & + 3(B_2^2 + 4B_3) P[\chi^2(f) \leq z]\} + \\ & + \frac{1}{6} n^{-3} \{(4B_4 - 4B_2B_3 + B_2^3) P[\chi^2(f+6) \leq z] + B_2(4B_3 - 3B_2^2) \times \\ & \times P[\chi^2(f+4) \leq z] + B_2(4B_3 + 3B_2^2) P[\chi^2(f+2) \leq z] - \\ & - (4B_4 + 4B_2B_3 + B_2^3) P[\chi^2(f) \leq z]\} + O(n^{-4}), \end{aligned}$$

unde $f = p(p+1)/2$ iar constantele B_2 , B_3 și B_4 sînt date de (84).

Dezvoltarea asimptotică a funcției de repartiție a statisticii $-2 \ln l^*$, adevărată fiind ipoteza H_1 este dată în

TEOREMA 14 (Suguira (1969)). Dacă este adevărată ipoteza H_1 , funcția de repartiție a statisticii $-2 \ln l^*$ (l^* definită în (78)) poate fi dezvoltată asimptotic ca

$$\begin{aligned} & P((1/n^{1/2}\tau) [-2 \ln l^* - n \{ \text{Ur}(\Sigma \Sigma_0^{-1} - \mathbf{I}) - \ln |\Sigma \Sigma_0^{-1}| \}] \leq z) = \\ & = \Phi(z) - \frac{1}{6} n^{-\frac{1}{2}} [3\tau^{-1} \Phi^{(1)}(z) p(p+1) + 4\tau^{-3} \Phi^{(3)}(z) (p+2\text{Ur}_3 - 3\text{Ur}_2)] + \\ (86) \quad & + (1/72n) [9\tau^{-2} \Phi^{(2)}(z) p(p+1)(p^2+p+4) + 24\tau^{-4} \Phi^{(4)}(z) \times \\ & \times \{p(p^2+p+2) - 3p(p+1)\text{Ur}_2 + 2(p^2+p-4)\text{Ur}_3 - 6\text{Ur}_4\} + \\ & + 16\tau^{-6} \Phi^{(6)}(z) (p+2\text{Ur}_3 - 3\text{Ur}_2)^2] + o(n^{-\frac{3}{2}}), \end{aligned}$$

unde :

$$\text{Ur}_j = \text{Ur}(\Sigma \Sigma_0^{-1})^j$$

$$\tau^2 = 2\text{Ur}(\mathbf{I} - \Sigma \Sigma_0^{-1})^2$$

$$\Phi^{(r)}(z) = \frac{d^r}{dz^r} \Phi(z).$$

Demonstrație. Funcția caracteristică a statisticii $-2n^{-\frac{1}{2}} \ln l^*$, în ipoteza H_1 , ținând seama de formula (79) pentru momentul statisticii l^* , se scrie

$$\begin{aligned} (87) \quad \varphi_{H_1}(t) &= \left(\frac{1}{2} n/e\right)^{itpn^{1/2}} \left[\Gamma_p\left(\frac{1}{2} n - n^{\frac{1}{2}} it\right) / \Gamma_p\left(\frac{1}{2} n\right) \right] \times \\ &\times |\Sigma \Sigma_0^{-1}|^{-n^{\frac{1}{2}} it} / |\mathbf{I} - 2itn^{-\frac{1}{2}} \Sigma \Sigma_0^{-1}|^{\frac{1}{2} n - n^{\frac{1}{2}} it}. \end{aligned}$$

Aplicînd formula asimptotică (81) pentru funcția gama la fiecare termen din $\Gamma_p\left(\frac{1}{2} n - n^{\frac{1}{2}} it\right) / \Gamma_p\left(\frac{1}{2} n\right)$, obținem

$$\begin{aligned} (88) \quad \ln \left[\Gamma_p\left(\frac{1}{2} n - n^{\frac{1}{2}} it\right) / \Gamma_p\left(\frac{1}{2} n\right) \right] &= n^{\frac{1}{2}} itp \ln(2/n) - pt^2 + \\ &+ p \sum_{r=1}^{2k} n^{-r/2} (2it)^r \{2(it)^2 / [(r+1)(r+2)] + (p+1)/(4r)\} - \\ &- \sum_{r=1}^k (-2)^r B_{r+1} / [r(r+1)n^r] \{ (1 - n^{-\frac{1}{2}} 2it)^{-r} - 1 \} + o(n^{-k-\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Deoarece pentru orice matrice simetrică Z/n ale cărei rădăcini caracteristice sînt în valoare absolută mai mici decît unu, formula

$$-\ln |\mathbf{I} - Z/n| = \sum_{r=1}^k n^{-r} \text{Ur}(Z^r)/r + o(n^{-k-1})$$

are loc, avem

$$\begin{aligned}
 & - \left(\frac{1}{2} n - n^{\frac{1}{2}} it \right) \ln |\mathbf{I} - 2itn^{-\frac{1}{2}} \Sigma \Sigma_0^{-1}| = \\
 & - n^{\frac{1}{2}} it \operatorname{Ur} \Sigma \Sigma_0^{-1} - t^2 \{ \operatorname{Ur} (\Sigma \Sigma_0^{-1})^2 - 2 \operatorname{Ur} \Sigma \Sigma_0^{-1} \} + \\
 (89) \quad & + \sum_{r=1}^{2k} n^{-r/2} 2^{r+1} (it)^{r+2} \{ \operatorname{Ur} (\Sigma \Sigma_0^{-1})^{r+2} / (r+2) - \\
 & - \operatorname{Ur} (\Sigma \Sigma_0^{-1})^{r+1} / (r+1) \} + O(n^{-k-\frac{1}{2}}).
 \end{aligned}$$

Ținând seama de aceste două expresii în (87) obținem

$$\begin{aligned}
 \ln \varphi_{H_1}(t) = & - n^{\frac{1}{2}} it \{ \ln |\Sigma \Sigma_0^{-1}| + \operatorname{Ur} (\mathbf{I} - \Sigma \Sigma_0^{-1}) \} - t^2 \operatorname{Ur} (\mathbf{I} - \Sigma \Sigma_0^{-1})^2 + \\
 & + \sum_{r=1}^{2k} n^{-\frac{r}{2}} (2it)^r [p(p+1)/(4r) + 2p(it)^2 / [(r+1)(r+2)] + \\
 (90) \quad & + 2(it)^2 \{ \operatorname{Ur} (\Sigma \Sigma_0^{-1})^{r+2} / (r+2) - \operatorname{Ur} (\Sigma \Sigma_0^{-1})^{r+1} / (r+1) \} - \\
 & - \sum_{r=1}^k (-2)^r B_{r+1} / [r(r+1)n^r] \{ (1 - 2n^{-\frac{1}{2}} it)^{-r} - 1 \} + O(n^{-k-\frac{1}{2}}),
 \end{aligned}$$

care implică că statistica

$$l^{**} = -2n^{-\frac{1}{2}} \ln l^* - n^{\frac{1}{2}} \{ \operatorname{Ur} (\Sigma \Sigma_0^{-1} - \mathbf{I}) - \ln |\Sigma \Sigma_0^{-1}| \}$$

converge în repartiție către o variabilă

$$N(0, \tau^2 = 2 \operatorname{Ur} (\mathbf{I} - \Sigma \Sigma_0^{-1})^2).$$

Putem dezvolta asimptotic funcția caracteristică a variabilei l^{**}/τ pînă la orice ordin. Vom scrie această dezvoltare pînă la ordinul n^{-1} .

$$(91) \quad \varphi_{l^{**}/\tau}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \{ 1 + n^{-\frac{1}{2}} A_1 + n^{-1} A_2 \},$$

unde :

$$\begin{aligned}
 A_1 = & it \tau^{-1} p(p+1)/2 + \left(\frac{2}{3} \right) \tau^{-3} (it)^3 (p + 2 \operatorname{Ur}_3 - 3 \operatorname{Ur}_2) \\
 A_2 = & \left(\frac{1}{8} \right) \tau^{-2} (it)^2 p(p+1) (p^2 + p + 4) + \frac{1}{3} \tau^{-4} (it)^4 \times \\
 & \times \{ p(p^2 + p + 2) - 3p(p+1) \operatorname{Ur}_2 + 2(p^2 + p - 4) \operatorname{Ur}_3 + 6 \operatorname{Ur}_4 \} + \\
 & + \left(\frac{2}{9} \right) \tau^{-6} (it)^6 (p + 2 \operatorname{Ur}_3 - 3 \operatorname{Ur}_2)^2.
 \end{aligned}$$

Inversînd funcția caracteristică, teorema este demonstrată.

Observație. Dacă în această teoremă luăm $\Sigma = \Sigma_0$, media și dispersia asimptotică a statisticii $-2n^{-\frac{1}{2}} \ln l^*$ se anulează. Aceasta arată singularitatea repartiției limită. În ipoteza H_1 statistica $-2n^{-\frac{1}{2}} \ln l^*$ converge către zero; $-2 \ln l^*$ converge în repartiție către o variabilă χ^2 .

Dacă considerăm o selecție de volum $n+1 = N$ asupra unui vector normal p -dimensional și dacă dorim să verificăm ipoteza

$$H_0 : \Sigma = \Sigma_0$$

față de ipoteza alternativă

$$(92) \quad H_\gamma : \Sigma_0^{-\frac{1}{2}} \Sigma \Sigma_0^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{I} + n^{-\gamma} \odot,$$

pentru $\gamma > 0$ și $\odot$ o matrice simetrică, are loc

TEOREMA 15. (Sugiura (1973)). Pentru șirul de alternative H_γ definit de (92), repartiția limită a statisticii raportului de verosimilități modificat $-2 \ln l$ este $\chi^2[p(p+1)/2]$ când $\gamma > \frac{1}{2}$ și χ^2 necentrat cu

$f=p(p+1)/2$ grade de libertate și parametru de necentricitate $\delta^2 = \frac{1}{4} \text{Ur } \odot^2$, când $\gamma = \frac{1}{2}$. Când $\gamma = 1$,

$$(93) \quad P_\gamma(-2 \ln l < \chi^2) = P_{H_0}(-2 \ln l < \chi^2) + \frac{1}{4} n^{-1} s_2 \{P(f+2) - P(f)\} + \\ + n^{-2} \sum_{\alpha=0}^2 g_{2\alpha} P(f+2\alpha) + o(n^{-3}),$$

unde :

$P(f, \delta^2)$ este coarda inferioară a repartiției $\chi^2(f, \delta^2)$, și $P(f) = P(f, 0)$,

$$g_0 = \frac{1}{4} B_2 s_2 + \frac{1}{3} s_3 + \frac{1}{32} s_2^2, \quad g_2 = -2g_0 + \frac{1}{6} s_3,$$

$$(94) \quad g_4 = g_0 - \frac{1}{6} s_3,$$

$$B_2 = p(2p^2 + 3p - 1)/24, \quad B_3 = -p(p^2 - 1)(p + 2)/32$$

$$s_j = \text{Ur } \odot^j.$$

$$\text{Când } \gamma = \frac{1}{2},$$

$$P_\gamma(-2 \ln l < \chi^2) = P(f, \delta^2) + \frac{1}{6} n^{-\frac{1}{2}} s_3 \{P(f+4, \delta^2) - 3P(f+2, \delta^2) +$$

$$(95) \quad + 2P(f, \delta^2)\} + n^{-1} \sum_{\alpha=0}^4 P(f+2\alpha, \delta^2) h_{2\alpha} + o(n^{-\frac{3}{2}}),$$

unde

$$(96) \quad \begin{aligned} h_0 &= -B_2 - \frac{3}{8}s_4 + \frac{1}{18}s_3^2, & h_2 &= B_2 + \frac{3}{4}s_4 - \frac{1}{6}s_3^2, \\ h_4 &= -\frac{1}{2}s_4 + \frac{13}{72}s_3^2, & h_6 &= \frac{1}{8}s_4 - \frac{1}{12}s_3^2, \\ h_8 &= \frac{1}{72}s_3^2. \end{aligned}$$

Considerînd funcția caracteristică a statisticii $-2 \ln l n^{\gamma - \frac{1}{2}}$ bazată pe momentele statisticii l , cînd $\gamma < \frac{1}{2}$, se obține

TEOREMA 16 (Sugiura (1973)). Pentru șirul de alternative H_γ și $0 < \gamma < \frac{1}{2}$, statistica

$$(97) \quad n^{\gamma - \frac{1}{2}} [-2 \ln l - n \{ \text{Ur}(\Sigma \Sigma_0^{-1} - \mathbf{I}) - \ln |\Sigma \Sigma_0^{-1}| \}]$$

are asimptotic o repartiție $N(0, 2 \text{Ur} \Theta^2)$.

Plecînd de la observația că în ipoteza alternativă dispersia repartiției statisticii $-2 \ln l$ (l dat de (78)) este, exceptînd o constantă de multiplicare,

$$(98) \quad \text{Ur}(\Sigma \Sigma_0^{-1} - \mathbf{I})^2,$$

Nagao (1973) propune, pentru verificarea ipotezei $H_0(67)$ față de $H_1(68)$ statistica

$$(99) \quad T = \frac{n}{2} \text{Ur}(\Sigma \Sigma_0^{-1}/n - \mathbf{I})^2$$

și respinge ipoteza H_0 , cînd valoarea observată a statisticii T este mai mare decît o constantă fixată dinainte.

Are loc

TEOREMA 17 (Nagao (1973)). Pentru valori mari ale lui n , funcția de repartiție a statisticii T admite, în termeni de funcții de repartiție ale unor variabile χ^2 , următoarea dezvoltare

$$\begin{aligned} P(T \leq x) &= P[\chi^2(f) \leq x] + \frac{1}{n} \left\{ \frac{p}{12} (4p^2 + 9p + 7) P[\chi^2(f+6) \leq x] - \right. \\ &\quad - \frac{p}{8} (6p^2 + 13p + 9) P[\chi^2(f+4) \leq x] + \\ &\quad + \frac{p}{2} (p+1)^2 P[\chi^2(f+2) \leq x] - \\ &\quad \left. - \frac{p}{24} (2p^2 + 3p - 1) P[\chi^2(f) \leq x] \right\} + o(n^{-2}) \end{aligned}$$

unde $f = \frac{1}{2} p(p+1)$.

Demonstrație. Fără a micșora generalitatea putem presupune că S are o repartiție Wishart, $W(I, n)$. Atunci funcția caracteristică a statisticii $T = (n/2) \text{Ur}(S/n - I)^2$ este dată de

$$(100) \quad \varphi_T(t) = C_{p,n} \int \exp[it T] |S|^{\frac{1}{2}(n-p-1)} \exp \text{Ur} \left(-\frac{1}{2} S \right) dS,$$

unde

$$(101) \quad C_{p,n}^{-1} = 2^{np/2} \pi^{p(p-1)/4} \prod_{\alpha=1}^p \Gamma \left[\frac{1}{2} (n+1-\alpha) \right].$$

Dacă punem $Y = (n/2)^{1/2} \ln S/n$, T devine

$$(102) \quad T = \text{Ur } Y^2 + (2/n)^{1/2} \text{Ur } Y^3 + \frac{7}{6n} \text{Ur } Y^4 + O(n^{-3/2}).$$

Deoarece $S = n e^{(2/n)^{1/2} Y}$, exprimînd rădăcinile caracteristice ale matricei Y prin $\text{ch}_i(Y)$ (ca în Jack (1964-65), lema 8); Jacobianul este dat de

$$(103) \quad \left| \frac{\partial S}{\partial Y} \right| = (2\pi)^{p(p+1)/4} \exp \text{Ur} \left[(2/n)^{1/2} Y \right] \prod_{i>j}^p \frac{f(\lambda_i) - f(\lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j}$$

unde $f(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$ cu $\lambda_i = (2/n)^{1/2} \text{ch}_i(Y)$.

Deoarece ne interesează repartiția asimptotică, ultimul termen din jacobianul (103), pentru valori mari ale lui n , poate fi dezvoltat cu

$$\begin{aligned} \prod_{i>j}^p \frac{f(\lambda_i) - f(\lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j} &= 1 + \frac{1}{2} (p-1) (2/n)^{1/2} \text{Ur } Y + \\ &+ \frac{1}{12n} \{ (3p^2 - 6p + 2) (\text{Ur } Y)^2 + p \text{Ur } Y^2 \} + O(n^{-3/2}). \end{aligned}$$

Deoarece $|e^A| = \exp \text{Ur } A$ pentru orice matrice pătratică A , repartiția asimptotică a statisticii Y este dată de

$$\begin{aligned} (104) \quad &c^* \exp \text{Ur} \left[\frac{1}{2} (n-p+1) (2/n)^{1/2} Y - (n/2) e^{(2/n)^{1/2} Y} \right] \times \\ &\times \left\{ 1 + \frac{1}{2} (p-1) (2/n)^{1/2} \text{Ur } Y + \frac{1}{12n} \{ (3p^2 - 6p + 2) (\text{Ur } Y)^2 + \right. \\ &\left. + p \text{Ur } Y^2 \} + O(n^{-3/2}) \right\}, \end{aligned}$$

unde

$$(105) \quad c^* = \left\{ \prod_{\alpha=1}^p \Gamma \left[\frac{1}{2} (n+1-\alpha) \right] \right\}^{-1} (n/2)^{p(2n-p-1)/4} \pi^{-p(p-1)/4}.$$

Folosind formula (104), funcția caracteristică se poate scrie

$$\begin{aligned} \varphi_T(t) = c^* \int \exp \left[(it) \text{Ur } Y^4 + (2/n)^{\frac{1}{2}} (it) \text{Ur } Y^3 + \right. \\ \left. + \frac{7}{6n} (it) \text{Ur } Y^4 + \frac{1}{2} (n-p-1) (2/n)^{\frac{1}{2}} \text{Ur } Y - \frac{n}{2} \text{Ur } e^{(2/n)^{1/2} Y} \right] \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{1}{2} (p-1) (2/n)^{\frac{1}{2}} \text{Ur } Y + \right. \\ \left. + \frac{1}{12n} \{ (3p^2 - 6p + 2) (\text{Ur } Y)^2 + p \text{Ur } Y^2 \} + o(n^{-\frac{3}{2}}) \right\} dY, \end{aligned}$$

unde domeniul de integrare este mulțimea tuturor matricilor reale simetrice $p \times p$. Deoarece

$$(106) \quad e^{(2/n)^{1/2} Y} = I + (2/n)^{\frac{1}{2}} Y + \frac{1}{n} Y^2 + \frac{2^{\frac{1}{2}}}{3nn^{1/2}} Y^3 + \frac{1}{6n^2} Y^4 + o(n^{-\frac{3}{2}}),$$

obținem

$$\begin{aligned} \varphi_T(t) = c^* \exp \left[-\frac{np}{2} \right] \int \exp \left[-\frac{1}{2} (1 - 2it) \text{Ur } Y^2 \right] \left[1 + (2/n)^{\frac{1}{2}} \left(it - \frac{1}{6} \right) \text{Ur } Y^3 + \right. \\ (107) \quad \left. + \frac{1}{n} \left\{ -\frac{1}{12} (\text{Ur } Y)^2 + \frac{p}{12} \text{Ur } Y^2 + \frac{1}{12} (14it - 1) \text{Ur } Y^4 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(it - \frac{1}{6} \right)^2 (\text{Ur } Y^3)^2 \right\} + o(n^{-\frac{3}{2}}) \right] dY. \end{aligned}$$

Astfel putem considera că variabila aleatoare Y este normală $p(p+1)/2$ dimensională cu vectorul valoare medie zero și matricea de covarianțe $(\sigma_{i,j;k,l})$ cu

$$\sigma_{i,j;k,l} = (1 - 2it)^{-1} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})/2.$$

Deoarece

$$|\sigma_{i,j;k,l}| = (1 - 2it)^{-f} 2^{-p(p-1)/2}$$

avem

$$\begin{aligned} \varphi_T(t) = c \cdot (1 - 2it)^{-(f/2)} M \left[1 + (2/n)^{\frac{1}{2}} \left(it - \frac{1}{6} \right) \text{Ur } Y^3 + \right. \\ (108) \quad \left. + \frac{1}{n} \left\{ -\frac{1}{12} (\text{Ur } Y)^2 + \frac{p}{12} \text{Ur } Y^2 + \frac{1}{12} (14it - 1) \text{Ur } Y^4 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(it - \frac{1}{6} \right)^2 (\text{Ur } Y^3)^2 \right\} + o(n^{-\frac{3}{2}}) \right], \end{aligned}$$

unde $f = \frac{1}{2} p(p+1)$ și

$$(109) \quad c = c^* (2\pi)^{\frac{1}{4} p(p+1)} 2^{-p(p-1)/4} \exp \left[-\frac{1}{2} pn \right].$$

Obținem

$$(110) \quad M(\text{Ur } Y)^2 = p(t)_1, \quad M(\text{Ur } Y^2) = \frac{1}{2} p(p+1)(t)_1,$$

$$M(\text{Ur } Y^4) = \frac{p}{4} (2p^2 + 5p + 5)(t)_2, \quad M(\text{Ur } Y^3)^2 = \frac{3}{4} p(4p^2 + 9p + 7)(t)_3$$

unde $(t)_\alpha = (1 - 2it)^{-\alpha}$

Deoarece toate momentele produs de ordin impar pentru o repartiție normală cu media zero sînt zero, valorile medii din (108) sînt date de

$$(111) \quad 1 + \frac{1}{n} \left\{ \frac{p}{2} (p+1)^2 (t)_1 - \frac{p}{8} (6p^2 + 13p + 9)(t)_2 + \right. \\ \left. + \frac{p}{12} (4p^2 + 9p + 7)(t)_3 \right\} + o(n^{-2}).$$

Aplicînd formula lui Stirling la factorul constant din (108), obținem

$$(112) \quad (1 - 2it)^{-(f/2)} \left\{ 1 - \frac{p}{24n} (2p^2 + 3p - 1) \right\} + o(n^{-2}).$$

Asimptotic, obținem următoarea formulă

$$(113) \quad \varphi_T(t) = (1 - 2it)^{-(f/2)} \left[1 + \frac{1}{n} \left\{ \frac{p}{12} (4p^2 + 9p + 7)(t)_3 - \right. \right. \\ \left. - \frac{p}{8} (6p^2 + 13p + 9)(t)_2 + \frac{p}{2} (p+1)^2 (t)_1 - \right. \\ \left. \left. - \frac{p}{24} (2p^2 + 3p - 1) \right\} + o(n^{-2}) \right].$$

Inversînd această funcție caracteristică, teorema este demonstrată.

3.2. Test pentru sfericitate

Fie $X_1, X_2, \dots, X_N$ o selecție asupra unui vector p -dimensional $X \sim N(\mu, \Sigma)$. Ne propunem să verificăm ipoteza

$$(114) \quad H_0: \Sigma = \sigma^2 I,$$

unde σ^2 este un număr pozitiv nespecificat.

Verificarea acestei ipoteze este echivalentă cu verificarea ipotezei mai generale

$$(114') \quad H'_0: \psi = \sigma^2 \psi_0,$$

unde ψ_0 este dată. Ipoteza H'_0 se verifică pe baza selecției $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$ asupra vectorului $Y \sim N(\mu, \psi)$.

Fie matricea C astfel încât

$$C \psi_0 C' = I$$

și fie

$$\mu^* = C\mu, \quad \Sigma^* = C\psi C', \quad X_i^* = CY_i$$

În urma acestei construcții $X_1, X_2, \dots, X_N$ apare ca o selecție asupra vectorului $X^* \sim N(\mu^*, \Sigma^*)$ și ipoteza H_0 devine

$$H''_0: \Sigma^* = \sigma^2 I.$$

Ipoteza H_0 are o interpretare algebrică în legătură cu rădăcinile caracteristice ale matricei Σ , adică rădăcinile ecuației

$$|\Sigma - \varphi I| = 0,$$

Σ se poate scrie ca

$$\Sigma = O' \Phi O$$

unde: — O este o matrice ortogonală

— Φ este matricea diagonală care are ca elemente rădăcinile ecuației caracteristice.

Urmează că ipoteza H_0 este adevărată atunci și numai atunci când toate rădăcinile ecuației caracteristice sînt egale între ele.

Fie $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ aceste rădăcini caracteristice.

Ipoteza H_0 poate fi privită ca o combinație a ipotezelor

$H_1: \Sigma$ este o matrice diagonală

și

H_2 : elementele diagonale ale matricii Σ sînt egale între ele în condiția că Σ este o matrice diagonală.

Rezultă că raportul de verosimilități pentru verificarea ipotezei H_0 este produsul rapoartelor l_1 și l_2 pentru ipotezele H_1 și H_2 .

Are loc

TEOREMA 18. Dacă $Y_1, \dots, Y_N$ este o selecție asupra vectorului Y p dimensional repartizat $N(\mu, \psi)$, raportul de verosimilități pentru verificarea ipotezei H'_0 (114') este

$$(115) \quad l^* = \frac{|S^{**} \psi_0^{-1}|^{N/2}}{|p^{-1} U_1 S^{**} \psi_0^{-1}|^{Nn/2}}, \quad S^{**} = \sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})(Y_i - \bar{Y})'.$$

Demonstrație. Raportul de verosimilități pentru verificarea ipotezei H_1 este

$$l_1 = \frac{\{P(\mu, \Sigma_0)\}_\mu}{\{P(\mu, \Sigma)\}_{\mu, \Sigma}},$$

unde

$$-P(\mu, \Sigma) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (X_i - \mu)' \Sigma^{-1} (X_i - \mu) \right\}$$

$$-P(\mu, \Sigma_0) = P(\mu, \Sigma)$$

— Σ_0 este matricea Σ cu elementele $\sigma_{ij} = 0, i \neq j$.

Estimațiile de maximă verosimilitate în cele două ipoteze sînt

$$\hat{\Sigma}_\Omega = \frac{S}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})'$$

și

$$\hat{\Sigma}_\omega = \frac{s_{ii}}{N} \quad (S = (s_{ij})).$$

Urmează că

$$l_1 = \frac{|S|^{N/2}}{\prod s_{ii}^{N/2}}.$$

Raportul de verosimilități pentru verificarea ipotezei H_2 este

$$l_2 = \frac{\prod_h [\sum_i (X_{hi} - \bar{X}_h)^2]^{N/2}}{[\sum_{h,i} (X_{hi} - \bar{X}_h)^2 / p]^{N/2}} = \frac{\prod s_{hh}^{N/2}}{(p^{-1} \text{Ur} S)^{pN/2}}.$$

Urmează că raportul de verosimilități pentru verificarea ipotezei H_0 este

$$(116) \quad l = l_1 l_2 = \frac{|S|^{N/2}}{|p^{-1} \text{Ur} S|^{Np/2}}.$$

Dacă ne referim la ipoteza $H'_0: \psi = \sigma^2 \psi_0$ și la selecția $Y_1, \dots, Y_N$ asupra vectorului $Y \sim N(\mu, \psi)$, avem

$$l^* = \frac{|S^*|^{N/2}}{(p^{-1} \text{Ur} S^*)^{Np/2}}$$

unde

$$\begin{aligned} -S^* &= \sum_{i=1}^N (X_i^* - \bar{X}^*)(X_i^* - \bar{X}^*)' = \\ &= C \sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})(Y_i - \bar{Y})' C' = CS^{**}C'. \end{aligned}$$

Avem $\psi_0 = C^{-1}(C')^{-1} = (C'C)^{-1}$ și astfel

$$|S^*| = \frac{|S^{**}|}{|\psi_0|} = |S^{**} \psi_0^{-1}|,$$

$$\text{Ur } S^* = \text{Ur } CS^{**} C' = \text{Ur } S^{**} CC' = \text{Ur } S^{**} \psi_0^{-1}$$

$$l^* = |S^{**} \psi_0^{-1}|^{N/2} (\text{Ur } S^{**} \psi_0^{-1}/p)^{-Np/2}$$

ceea ce demonstrează teorema.

Folosind teorema 18 putem construi o regiune de încredere pentru ψ . Această regiune de încredere ne arată că dacă o matrice se găsește în această regiune atunci orice matrice proporțională cu ea se găsește de asemenea în această regiune.

Regiunea critică este

$$(117) \quad \frac{|S^{**} \psi^{-1}|}{|p^{-1} \text{Ur } S^{**} \psi^{-1}|^p} \geq l_{\epsilon}^{2/N}.$$

TEOREMA 19 (Sugiura, Nagao (1968)). Pentru verificarea ipotezei H_0 (114) față de ipoteza alternativă.

$$(118) \quad H_1 : \Sigma \neq \sigma^2 I$$

unde σ^2 este un număr pozitiv nespecificat, testul raportului de verosimilități avînd regiunea de acceptare

$$(119) \quad A. = \{S | S \text{ este pozitiv definită și } |S|^{n/2} (\text{Ur } S)^{-pn/2} \geq C_{\alpha}\} \text{ este nedepășat.}$$

Demonstrație. Pentru orice matrice ortogonală K , transformarea

$$S \rightarrow KSK'$$

lasă invariantă regiunea de acceptare A . Putem lua, deci, $\Sigma = \Gamma$ (matricea diagonală). Urmează că probabilitatea regiunii de acceptare, sub H_1 , este

$$(120) \quad P_{H_1}(A.) = C_{p,n} \int_{S \in A.} |S|^{(n-p-1)/2} |\Gamma|^{-n/2} \exp \text{Ur} \left(-\frac{1}{2} \Gamma^{-1} S \right) dS = \\ = C_{p,n} \int_{\Gamma^{-1/2} \text{Ur}^{-1/2} \in A.} |U|^{(n-p-1)/2} \exp \text{Ur} \left(-\frac{1}{2} U \right) dU.$$

Dacă punem $U = v_{11} V_0$, unde matricea simetrică V_0 este dată de

$$(121) \quad V_0 = \begin{pmatrix} 1 & v_{12} & \dots & v_{1p} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{p1} & v_{p2} & \dots & v_{pp} \end{pmatrix},$$

atunci

$$\left| \frac{\partial U}{\partial (v_{11}, V_0)} \right| = v_{11}^{[p(p+1)/2]-1}.$$

Deoarece pentru orice număr pozitiv c , transformarea

$$U \rightarrow c U$$

lasă invariantă regiunea de acceptare A ., avem

$$\begin{aligned} P_{H_1}(A.) &= C_{p,n} \int_{\Gamma^{\frac{1}{2}} V_0 \Gamma^{\frac{1}{2}} \in A.} v_{11}^{(np/2)-1} |V_0|^{(n-p-1)} \exp \operatorname{Ur} \left(-\frac{1}{2} v_{11} V_0 \right) dv_{11} dV_0 = \\ (122) \quad &= 2^{np/2} C_{p,n} \Gamma(np/2) \int_{\Gamma^{\frac{1}{2}} V_0 \Gamma^{\frac{1}{2}} \in A.} |V_0|^{(n-p-1)/2} (\operatorname{Ur} V_0)^{-np/2} dV_0. \end{aligned}$$

Fie A^* mulțimea tuturor matricelor pozitiv definite V_0 de forma (121) astfel încît

$$\Gamma^{\frac{1}{2}} V_0 \Gamma^{\frac{1}{2}} \in A.$$

Prin aceeași argumentație ca în § 3.1, găsim

$$P_{H_1}(A.) - P_{H_0}(A) \geq 2^{np/2} \Gamma \left(\frac{1}{2} np \right) C_{p,n} C_\alpha \left\{ \int_{V_0 \in A.} - \int_{V_0 \in A^*} \right\} |V_0|^{-(p+1)/2} dV_0. \quad (123)$$

În a doua integrală facem transformarea

$$W_0 = \lambda_1^{-\frac{1}{2}} \Gamma^{\frac{1}{2}} V_0 \Gamma^{\frac{1}{2}}$$

unde : — $\Gamma = \operatorname{diag} (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ și

— matricea pozitiv definită W_0 este de forma (121)

Jacobianul transformării este

$$\left| \frac{\partial W_0}{\partial V_0} \right| = |\Gamma|^{(p+1)/2} \lambda_1^{-p(p+1)/2}$$

Obținem :

$$\int_{V_0 \in A^*} |V_0|^{-(p+1)/2} dV_0 = \int_{W_0 \in A.} |W_0|^{-(p+1)/2} dW_0.$$

ceea ce demonstrează teorema.

Observație. Teorema 19 a fost demonstrată în 1966 de Gleser cu o notă de corecție în 1968.

Raportul de verosimilități pentru verificarea ipotezei H_0 față de H_1 calculat pe baza unei selecții de volum N asupra unui vector $N(\mu, \Sigma)$ p -dimensional este

$$(124) \quad l = |S|^{N/2} (p^{-1} \text{Ur. } S)^{-Np/2}.$$

Dacă este adevărată ipoteza H_0 , momentul de ordinul h al statisticii

$$(125) \quad l^* = |S|^{n/2} (p^{-1} \text{Ur. } S)^{-np/2}$$

poate fi exprimat ca

$$(126) \quad M[l^{*h} | H_0] = p^{\frac{1}{2}nhp} \Gamma\left(\frac{1}{2} np\right) \Gamma_p\left(\frac{1}{2} n(1+h)\right) / \left[\Gamma\left(\frac{1}{2} pn(1+h)\right) \Gamma_p\left(\frac{1}{2} n\right) \right]$$

care implică dezvoltarea asimptotică (Anderson (1959))

$$(127) \quad \begin{aligned} P(-2\rho \ln l^* \leq z) &= P[\chi^2(f) \leq z] + \\ &+ (1/128 p^2 m^2) (p+2)(p-1)(p-2)(2p^3 + 6p^2 + \\ &+ 3p + 2) \{P[\chi^2(f+4) \leq z] - P[\chi^2(f) \leq z]\} + O(m^{-3}) \end{aligned}$$

unde: $-f = \{p(p+1)/2\} - 1$

$-m = \rho n$

$-\rho = 1 - (2p^2 + p + 2)/6pn.$

Factorul de corecție ρ este ales astfel încât termenul de ordin m^{-1} din dezvoltare să se anuleze.

În cele ce urmează vom considera dezvoltarea asimptotică a statisticii $-2\rho \ln l^*$, în ipoteza H_1 . Deoarece în ipoteza H_1 momentul de ordinul h al statisticii l^* nu poate fi scris explicit, sînt necesare tehnici diferite. Vom folosi operatori diferențiali.

Are loc

TEOREMA 20 (Sugiura (1966)). *Dacă este adevărată ipoteza H_1 , funcția de repartiție a statisticii $-2\rho \ln l^*$ (l^* dat de (125)) admite următoarea dezvoltare asimptotică*

$$(128) \quad \begin{aligned} &P((1/m^2\tau) [-2\rho \ln l^* - m \ln \{(\text{Ur. } \Sigma/p)^p / |\Sigma|\}] \leq z) = \\ &= \Phi(z) - m^{-1/2} \left[(2p/3\tau^3) \Phi^{(3)}(z) \{-3(t_2 - 1)^2 + 2t_3 - 3t_2 + 1\} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2}\tau\right) \Phi^{(1)}(z) (p^2 + p - 2t_2) \right] + \\ &\quad - m^{-1} \left[(2p^2/9\tau^6) \Phi^{(6)}(z) \{[3(t_2 - 1)^2 + 3t_2 - 2t_3]^2 + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 1 - 6(t_2 - 1)^2 + 4t_3 - 6t_2\} + (p/3\tau^4) \Phi^{(4)}(z) \{(t_2 - 1)^2 (26t_2 - \\
& - 3p^2 - 3p - 8) + 2(t_2 - 1)(15t_2 - 14t_3) + 6t_4 + \\
& + 2(p + 3)(p - 2)t_3 - (3p^2 + 3p - 4)t_2 + p^2 + p + 2\} + \\
& + \left(\frac{1}{24}\tau^{-2}\right) \Phi^{(2)}(z) \{132t_2^2 - 96t_3 - 4(5p^2 + 4p + 14)t_2 + \\
& + 3p^4 + 6p^3 + 23p^2 + 16p + 8\} \Big] + O(m^{-3/2}),
\end{aligned}$$

unde $t_j = p^{j-1}(\text{Ur } \Sigma')/(\text{Ur } \Sigma)^j$, și

$$\tau^2 = 2p(t_2 - 1).$$

Plecînd de la faptul că dispersia repartiției limită a statisticii $-2 \ln l^*$ (l^* dat de (125) este proporțională cu

$$(129) \quad \text{Ur } \{\Sigma(\text{Ur } \Sigma)^{-1} - p^{-1}\mathbf{I}\}^2$$

Nagao (1973) propune pentru verificarea ipotezei de sfericitate statistica

$$(130) \quad T = \frac{p^2 n}{2} \text{Ur } \{S(\text{Ur } S) - p^{-1}\mathbf{I}\}^2$$

are loc

TEOREMA 21 (Nagao (1973)). *Repartiția nulă a statisticii $T(130)$ pentru valori mari ale lui n admite, asimptotic, următoarea dezvoltare*

$$\begin{aligned}
(131) \quad & P(T \leq x) = P[\chi^2(f) \leq x] + \\
& + n^{-1} \left\{ \frac{1}{12} (p^3 + 3p^2 - 8p - 12 - 200p^{-1}) P[\chi^2(f+6) \leq x] + \right. \\
& + \frac{1}{8} (-2p^3 - 5p^2 + 7p + 12 + 420p^{-1}) P[\chi^2(f+4) \leq x] + \\
& + \frac{1}{4} (p^3 + 2p^2 - p - 2 - 216p^{-1}) P[\chi^2(f+2) \leq x] + \\
& \left. + \frac{1}{24} (-2p^3 - 3p^2 + p + 436p^{-1}) P[\chi^2(f) \leq x] \right\} + O(n^{-2}),
\end{aligned}$$

$$\text{unde } f = \frac{1}{2} p(p+1) - 1.$$

Demonstrație. Dacă punem $Y = (n/2)^{1/2} \ln S/n$, obținem pentru funcția caracteristică a statisticii T expresia

$$\begin{aligned} \varphi_T(t) = & c(1 - 2it)^{-(J/2)} M \left[1 + \frac{1}{n} \left\{ \frac{p}{12} \text{Ur } Y^2 - \frac{1}{12} (\text{Ur } Y)^2 + \right. \right. \\ & + \frac{1}{12} (14it - 1) \text{Ur } Y^4 - \frac{14}{3p} (it) \text{Ur } Y \text{Ur } Y^3 - \frac{5}{2p} (it) (\text{Ur } Y^2)^2 + \\ & + \frac{12}{p^2} (it) (\text{Ur } Y)^2 \text{Ur } Y^2 - \frac{6}{p^3} (it) (\text{Ur } Y)^4 + \\ & \left. \left. + \left[\left(it - \frac{1}{6} \right) \text{Ur } Y^3 - \frac{3}{4} (it) \text{Ur } Y \text{Ur } Y^2 + \frac{2}{p^2} (it) (\text{Ur } Y)^3 \right]^2 \right\} + O(n^{-2}) \right], \end{aligned}$$

unde: media este luată pentru o repartiție normală de vector valoare medie zero și matrice de covarianțe $(\sigma_{i,j;k,l})$ cu

$$\sigma_{i,j;k,l} = (t)_1 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})/2 + p^{-1} \{1 - (t)_1\} \delta_{ij} \delta_{kl},$$

$$(t)_\alpha = (1 - 2it)^{-\alpha}.$$

După calcularea mediei obținem

$$\begin{aligned} \varphi_T(t) = & (1 - 2it)^{-(J/2)} \left[1 + n^{-1} \left\{ \frac{1}{12} (p^3 + 3p^2 - 8p - 12 - 200p^{-1}) (t)_3 + \right. \right. \\ & + \frac{1}{8} (-2p^3 - 5p^2 + 7p + 12 + 420p^{-1}) (t)_2 + \\ & + \frac{1}{4} (p^3 + 2p^2 - p - 2 - 216p^{-1}) (t)_1 + \\ & \left. \left. + \frac{1}{24} (-2p^3 - 3p^2 + p + 436p^{-1}) \right\} \right] + O(n^{-2}). \end{aligned}$$

Inversînd funcția caracteristică, teorema este demonstrată.

Are loc

TEOREMA 22 (John (1971), Sugiura (1972)). *Testul bazat pe statistica T este cel mai bun test local invariant.*

Testul raportului de verosimilități pentru verificarea ipotezei H_0 (114) față de ipoteza alternativă (118) este bazat pe statistica

$$(132) \quad l^{**} = l^{2/N} = |S| (p^{-1} \text{Ur } S)^{-p}.$$

Determinăm repartiția exactă a statisticii l^* .

Fie $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_p$ rădăcinile caracteristice ordonate ale matricei Σ și fie

$$(133) \quad \Gamma_p\left(\frac{1}{2}n\right) = \pi^{p(p-1)/4} \prod_{i=1}^p \Gamma\left(\frac{n+1-i}{2}\right).$$

În ipoteza alternativă momentul de ordinul h al statisticii l^* poate fi scris ca

$$(134) \quad \begin{aligned} M(l^{**h}) &= \frac{p^{ph} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}n}}{2^{\frac{1}{2}pn} \Gamma_p\left(\frac{1}{2}n\right)} \int_{S>0} \frac{|S|^{(2h+n-p-1)/2}}{(Ur S)^{ph}} \exp Ur\left(-\frac{1}{2} \Sigma^{-1}S\right) dS = \\ &= \frac{(2p)^{ph} \Gamma_p\left(h + \frac{1}{2}n\right)}{|\Sigma|^{-h} \Gamma_p\left(\frac{1}{2}n\right)} \cdot \frac{\left\{\Gamma\left(h + \frac{1}{2}n\right)\right\}^p}{\Gamma_p\left(h + \frac{1}{2}n\right)} \int_{D(R)} |R|^{(2h+n-p-1)/2} dR \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\left(\prod_{i=1}^p 2\lambda_i\right)^{-(n+2h)/2}}{\left\{\Gamma\left(h + \frac{1}{2}n\right)\right\}^p} \iint_{\text{tot } s_{ii} > 0} \frac{\left(\prod_{i=1}^p s_{ii}\right)^{\frac{2h+n}{2}-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \Sigma s_{ii}/\lambda_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^p s_{ii}\right)^{ph}} \prod_{i=1}^p ds_{ii} = \\ &= \frac{(2p)^{ph} \Gamma_p\left(h + \frac{1}{2}n\right)}{|\Sigma|^{-h} \Gamma_p\left(\frac{1}{2}n\right)} M\left[\left(\sum_{i=1}^p s_{ii}\right)^{-ph}\right] \end{aligned}$$

unde: $D(R) = D(R > 0, R = (r_{ij})$ este simetrică și $r_{ii} = 1$ pentru toți i

$$dR = \prod_{i < j=1}^p dr_{ij}$$

$s_{ii}/\lambda_i (i = 1, 2, \dots, p)$ sînt variabile independente $\sim \chi^2(2h+n)$.

Mai întii determinăm repartitia variabilei $\sum_{i=1}^p s_{ii} = u$.

Transformata Laplace a variabilei u este dată de

$$(135) \quad \begin{aligned} \Phi(\theta) = M(e^{-\theta u}) &= \prod_{i=1}^p (1 + 2\lambda_i \theta)^{-(2h+n)/2} = |I + 2\theta \Sigma|^{-(2h+n)/2} = \\ &= (1 + 2\theta q)^{-p\left[\frac{2h+n}{2}\right]} |q^{-1} \Sigma|^{-\frac{2h+n}{2}} |I - (1 + 2q\theta)^{-1} (I - q\Sigma^{-1})|^{-\frac{2h+n}{2}} = \\ &= (1 + 2\theta q)^{-\frac{p(2h+n)}{2}} |q^{-1} \Sigma|^{-\frac{2h+n}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\tau} \frac{\left(\frac{2h+n}{2}\right)_{\tau} C_{\tau}(I - q\Sigma^{-1})}{(1 + 2q\theta)^{k!}}, \end{aligned}$$

unde: $0 < q < \theta$ și θ astfel încît

$$|1 - q(\text{ch}_{\max} \Sigma)^{-1}| < (1 + 2q\theta),$$

$C_\tau(\mathbf{A})$ este polinomul zonal, (James (1964)), o funcție simetrică în rădăcinile matricei simetrice $\mathbf{A}$ cu k grade corespunzătoare la partiția $\tau = (k_1, k_2, \dots, k_p)$,

$$k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_p \geq 0, \quad \sum_1^p k_i = k,$$

$$(a)_\tau = \prod_{i=1}^p \left(a - \frac{1}{2}(i-1) \right)_{k_i} = \Gamma_p(a, \tau) / \Gamma_p(a)$$

$$(136) \quad (a)_k = a(a+1) \dots (a+k-1)$$

$\text{ch}_{\max} \Sigma$ este rădăcina caracteristică maximă a matricei Σ .
Deci din transformata Laplace inversă avem pentru u densitatea

$$(137) \quad p(u) = |q^{-1}\Sigma|^{-\frac{2h+n}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\tau} \frac{\left(\frac{2h+n}{2} \right)_{\tau} C_{\tau}(\mathbf{I} - q\Sigma^{-1})}{k!} \times$$

$$\times \frac{u^{\frac{p(2h+n)}{2} + k - 1} e^{-u/2q}}{(2q)^{\frac{1}{2}p(2h+n) + k} \Gamma\left[\frac{p(2h+n)}{2} + k \right]}$$

Pentru convergența rapidă a seriei putem lua $q = 2\lambda_1\lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2)$.
Din (137) obținem

$$(138) \quad M[u^{-\frac{1}{2}ph}] = |q^{-1}\Sigma|^{-\frac{2h+n}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\tau} \frac{\left(\frac{2h+n}{2} \right)_{\tau} C_{\tau}(\mathbf{I} - q\Sigma^{-1})}{k! (2q)^{ph}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{np}{2} + k\right)}{\Gamma\left(\frac{p(2h+n)}{2} + k\right)}$$

și deci

$$(139) \quad M(l^{**h}) = \frac{p^{ph} \Gamma_p\left(\frac{2h+n}{2}\right) |q\Sigma^{-1}|^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma_p\left(\frac{1}{2}n\right)} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\tau} \frac{\left(\frac{2h+n}{2} \right)_{\tau} C_{\tau}(\mathbf{I} - q\Sigma^{-1}) \Gamma\left(\frac{np}{2} + k\right)}{k! \Gamma\left(\frac{p(2h+n)}{2} + k\right)}.$$

Folosind teorema de multiplicare a lui Gauss și Legendre

$$(140) \quad \prod_{i=1}^p \Gamma(a + (i-1)/p) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(p-1)} p^{-\frac{1}{2}pa} \Gamma(pa)$$

obținem

$$(141) \quad M(l^{**h}) = \frac{|q\Sigma^{-1}|}{\Gamma_p\left(\frac{1}{2}n\right)} \times \\ \times \frac{\pi^{\frac{1}{4}(p-1)(p+2)}}{2^{-\frac{1}{2}(p-1)} p^{\frac{1}{2}(pn-1)}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\tau} \left[\frac{\prod_{i=1}^p \Gamma\left(h + \frac{1}{2}n + k_i - \frac{1}{2}(i-1)\right)}{\prod_{i=1}^p \Gamma\left(h + \frac{1}{2}n + p^{-1}k + p^{-1}(i-1)\right)} \right] \times \\ \times \left[\frac{\Gamma\left(\frac{np}{2} + k\right)}{k! p^k} \right] C_{\tau}(\mathbf{I} - q\Sigma^{-1}).$$

Folosind definiția funcției G a lui Meijer (Erdelyi (1953) p. 207)

$$(142) \quad G_{p,q}^{m,n} \left[x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right] = (2\pi i)^{-1} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - s) \prod_{j=1}^n (1 - a_j + s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - s)} x^s ds,$$

($i = \sqrt{-1}$), obținem

TEOREMA 23. (Khatrı, Srivastava (1971)). *Densitatea de repartiție a statisticii l^{**} este*

$$(143) \quad p(l^*) = \frac{\pi^{\frac{1}{4}(p-1)(p+2)/4} |q\Sigma^{-1}|^n}{p^{\frac{1}{2}(np-1)} 2^{-\frac{1}{2}(p-1)} \Gamma_p\left(\frac{1}{2}n\right)} l^{*(n-p-1)/2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\tau} \frac{\Gamma\left(\frac{np}{2} + k\right)}{p^k k!} C_{\tau}(\mathbf{I} - q\Sigma^{-1}) \times$$

$$\times G_{p,p}^{p,0} \left[l^* \left| \begin{matrix} \frac{1}{2}(p-1) + p^{-1}(i-1) + p^{-1}k \\ \frac{1}{2}(p-i) + k_i \end{matrix} \right. \right]_{i=1, 2, \dots, p}.$$

Observații. i) Repartiția statisticii l^{**} în ipoteza nulă (Consul (1958)) poate fi obținută din (143) punind

$$\Sigma = \sigma^2 \mathbf{I} \text{ și } q = 1/\sigma^2.$$

În 1974, Khatrı și Srivastava, obțin dezvoltarea asimptotică a statisticii raportului de verosimilități pentru verificarea ipotezei (114) față de alternativa

$$(144) \quad (\mathbf{I} - q\Sigma^{-1}) = (2/m)\mathbf{P},$$

unde $\mathbf{P}$ este o matrice dată (fixată) cînd $m \rightarrow \infty$ și $0 < q < \infty$.

În acest scop consideră

$$n = m + 2\alpha, \alpha = (2p^2 + p + 2)/12p$$

și obțin dezvoltarea pentru

$$P\{-m \ln l^{2/N} \leq z\} \quad (l \text{ dat de (124)})$$

în termeni de combinații de repartiții χ^2 . Are loc

TEOREMA 24. (Khatrı, Srivastava (1974)). *Avem*

$$(145) \quad \begin{aligned} P(-m \ln l^{2/N} \leq z) &= P[\chi^2(f) \leq z] + \\ &+ (c_1/pm) \{P[\chi^2(f) \leq z] - P[\chi^2(f+2) \leq z]\} + \\ &+ (1/pm)^2 \{\alpha_0 P[\chi^2(f) \leq z] + \alpha_1 P[\chi^2(f+2) \leq z] + \\ &+ \alpha_2 P[\chi^2(f+4) \leq z] + O(m^{-3}), \end{aligned}$$

$$\text{unde } f = \frac{1}{2} p(p+1) - 1, \beta_0 = (p+2)(p-1)(p-2)(2p^2 + 6p^2 + 3p + 2)/288$$

$$(146) \quad \begin{aligned} c_1 &= (\text{UrP})^2 - p \text{UrP}^2, \alpha_2 = \beta_0 + \frac{1}{2} c_1^2 + 2\alpha p c_1 + \frac{4}{3} c_2, \\ c_2 &= (\text{UrP})^3 - p^2 \text{UrP}^3, \alpha_1 = -c_1^2 - 4(\text{UrP}) c_1 - 2c_1 - 4\alpha p c_1 \\ \alpha_2 &= -(\alpha_1 + \alpha_0). \end{aligned}$$

În demonstrație se folosește formula (139) în care se ia în loc de $n, m + 2\alpha$ și în loc de $h, \frac{1}{2} mh$.

§ 4. Testul raportului de verosimilități pentru verificarea ipotezei $\Sigma = \Sigma_0$ și $\mu = \mu_0$

TEOREMA 25 (Sugiura, Nagao (1968)). *Testul raportului de verosimilități pentru verificarea ipotezei.*

$$(147) \quad H_0 : \Sigma = \Sigma_0 \text{ și } \mu = \mu_0$$

față de ipoteza alternativă

$$(148) \quad H_1 : \Sigma \neq \Sigma_0 \text{ sau } \mu \neq \mu_0$$

avînd regiunea de acceptare

$$(149) \quad \text{încît } |\Sigma_0^{-1}|^{N/2} \exp \text{Ur} \left[-\frac{1}{2} \Sigma_0^{-1} \{S + N(\bar{X} - \mu_0)(\bar{X} - \mu_0)'\} \right] \geq c_\alpha \}$$

unde :

$$-S = \sum_{\alpha=1}^N (X_{\alpha} - \bar{X}) (X_{\alpha} - \bar{X})',$$

$$-\bar{X} = N^{-1} \sum_{\alpha=1}^N X_{\alpha},$$

este nedeplasat.

Demonstrație. Fără a restringe generalitatea putem presupune $\Sigma_0 = I$ și $\Sigma = \Gamma$ (matricea diagonală). Atunci putem să scriem

$$(150) \quad P_{H_1}(\bar{W}) = N^{p/2} C_{p,n} (2\pi)^{-p/2} \times$$

$$\times \int_{(\bar{X}, S) \in \bar{W}} |S|^{(N-p-2)} |\Gamma|^{-N/2} \exp \text{Ur} \left[-\frac{1}{2} \Gamma^{-1} \{S + N(\bar{X} - \mu)(\bar{X} - \mu)'\} \right] d\bar{X} dS.$$

Dacă punem

$$U = \Gamma^{-\frac{1}{2}} S \Gamma^{-\frac{1}{2}} \text{ și } \bar{Y} - \mu_0 = \Gamma^{-\frac{1}{2}} (\bar{X} - \mu),$$

atunci $|\partial(\bar{Y}, U)/\partial(\bar{X}, S)| = \Gamma^{-(p+2)/2}$. Avem :

$$(151) \quad P_{H_1}(\bar{W}) = N^{p/2} C_{p,n} (2\pi)^{-p/2} \times$$

$$\times \int_{(\bar{Y}, U) \in \bar{W}^*} |U|^{(N-p-2)/2} \exp \text{Ur} \left[-\frac{1}{2} \{U + N(\bar{Y} - \mu_0)(\bar{Y} - \mu_0)'\} \right] d\bar{Y} dU,$$

unde $\bar{W}^*$ reprezintă mulțimea tuturor vectorilor $\bar{Y}$ $p \times 1$ și matricelor U pozitiv definite astfel încât

$$(\Gamma^{\frac{1}{2}} (\bar{Y} - \mu_0) + \mu, \Gamma^{\frac{1}{2}} U \Gamma^{\frac{1}{2}}) \in \bar{W}.$$

Ca și în § 3.1. găsim

$$(152) \quad P_{H_0}(\bar{W}) - P_{H_1}(\bar{W}) \geq$$

$$\geq N^{p/2} C_{p,n} C_{\alpha} (2\pi)^{-p/2} \left\{ \int_{(\bar{Y}, U) \in \bar{W}} - \int_{(\bar{Y}, U) \in \bar{W}^*} \right\} |U|^{-(p+2)/2} d\bar{Y} dU.$$

Dacă trecem de la $(\bar{Y}, U)$ la $(\bar{Z}, V)$ prin transformarea

$$\bar{Z} = \Gamma^{\frac{1}{2}} (\bar{Y} - \mu_0) + \mu \text{ și } V = \Gamma^{\frac{1}{2}} U \Gamma^{\frac{1}{2}},$$

a doua integrală din (152) devine

$$\int_{(\bar{Y}, U) \in \bar{W}^*} |U|^{-(p+2)/2} d\bar{Y} dU = \int_{(\bar{Z}, V) \in \bar{W}} |V|^{-(p+2)/2} d\bar{Z} dV,$$

ceea ce demonstrează teorema.

Raportul de verosimilități pentru verificarea ipotezei (147) față de (148) este

$$(153) \quad l = (e/N)^{Np/2} |\Sigma \Sigma_0^{-1}|^{N/2} \exp \text{Ur} \left[-\frac{1}{2} \Sigma_0^{-1} \{S + N(\bar{X} - \mu_0)(\bar{X} - \mu_0)'\} \right].$$

Ne propunem să determinăm dezvoltarea asimptotică a funcției de repartiție a statisticii l . În ipoteza H_1 (148) momentul de ordinul h al statisticii l este

$$(154) \quad \begin{aligned} M[l^h | H_1] &= (2e/N)^{Nh/2} \left[\Gamma_p((n+Nh)/2) / \Gamma_p\left(\frac{1}{2}n\right) \right] \times \\ &\times |\Sigma \Sigma_0^{-1}|^{Nh/2} |\mathbf{I} + h \Sigma \Sigma_0^{-1}|^{N(1+h)/2} \exp \text{Ur} \left[-\frac{1}{2} Nh \Sigma_0^{-1} (\mu - \mu_0) \times \right. \\ &\left. \times (\mu - \mu_0)' \{ \mathbf{I} - h \Sigma_0^{-1} (\Sigma^{-1} + h \Sigma_0^{-1})^{-1} \} \right], \end{aligned}$$

unde $n = N - 1$. Ca și în § 3.1, sub H_1 funcția caracteristică a statisticii $-2 \ln l$ se obține înlocuind în (82)

$$-p(p+1)/4, \quad n, \quad B_{r+1}$$

prin

$$-p(p+1)/4 - p/2, \quad N, \quad \text{respectiv } B'_{r+1} = \sum_{j=1}^p B_{r+1}(-j/2).$$

Se obține

TEOREMA 26. (Sugiura (1969)). În ipoteza H_0 (147) are loc următoarea dezvoltare asimptotică

$$(155) \quad \begin{aligned} P(-2 \ln l \leq z) &= P[\chi^2(f) \leq z] + B'_2 N^{-1} \{P[\chi^2(f+2) \leq z] - \\ &- P[\chi^2(f) \leq z]\} + \frac{1}{6} N^{-2} \{(3B'_2{}^2 - 4B'_3) P[\chi^2(f+4) \leq z] - \\ &- 6B'_2{}^2 P[\chi^2(f+2) \leq z] + (3B'_2{}^2 + 4B'_3) P[\chi^2(f) \leq z]\} + \\ &+ \frac{1}{6} N^{-3} \{(4B'_4 - 4B'_2 B'_3 + B'_2{}^3) P[\chi^2(f+6) \leq z] + \\ &+ B'_2 (4B'_3 - 3B'_2{}^2) P[\chi^2(f+4) \leq z] + B'_2 (4B'_3 + 3B'_2{}^2) \times \\ &\times P[\chi^2(f+2) \leq z] - (4B'_4 + 4B'_2 B'_3 + B'_2{}^3) \times \\ &\times P[\chi^2(f) \leq z] + O(n^{-4}), \end{aligned}$$

unde: l este dat de (153),

$$f = p + p(p + 1)/2$$

$$B'_2 = p(2p^2 + 9p + 11)/24, \quad B'_3 = -p(p + 1)(p + 2)(p + 3)/32,$$

$$B'_4 = p(6p^4 + 45p^3 + 110p^2 + 90p + 3)/480.$$

Ne propunem să verificăm ipoteza

$$H_0: \Sigma = \Sigma_0 \text{ și } \mu = \mu_0$$

față de șirul de ipoteze alternative

$$(156) \quad H_\gamma: \mu - \mu_0 = N^{-\gamma} \Sigma_0^{\frac{1}{2}} v, \quad \Sigma_0^{-\frac{1}{2}} \Sigma \Sigma_0^{-\frac{1}{2}} = I + N^{-\gamma} \odot.$$

An loc teoremele

TEOREMA 27 (Sugiura (1973)). În ipoteza H_γ pentru $0 < \gamma < \frac{1}{2}$, repartiția asimptotică, când $N \rightarrow \infty$, a statisticii

$$(157) \quad N^{\gamma - \frac{1}{2}} [-2 \ln l - N \{ \text{Ur}(\Sigma \Sigma_0^{-1} - I) - \\ - \ln |\Sigma \Sigma_0^{-1}| + (\mu - \mu_0)' \Sigma_0^{-1} (\mu - \mu_0) \}]$$

este $N(0, 2 \text{ Ur } \odot^2 + 4v'v)$.

TEOREMA 28 (Sugiura (1973)). În ipoteza H_γ pentru $\gamma > \frac{1}{2}$, statistica $-2 \ln l$ (l dat de (153)) are asimptotic o repartiție $\chi^2 [f = p + p(p + 1)/2]$.

Când $\gamma = 1$, punând $s_j = \text{Ur } \odot^j$ și $t_j = v' \odot^j v$,

$$(158) \quad P_\gamma(-2 \ln l < \chi^2) = P_{H_0}(-2 \ln l < \chi^2) + N^{-1} \left(\frac{1}{4} s_2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} t_0 \right) \{P(f + 2) - P(f)\} + N^{-2} \sum_{\alpha=0}^2 g'_{2\alpha} P(f + 2\alpha) + o(N^{-3}),$$

unde primul termen $P_{H_0}(-2 \ln l < \chi^2)$ este dezvoltarea asimptotică în ipoteza H_0 dată de

$$(159) \quad P(f) + N^{-1} B'_2 \{P(f + 2) - P(f)\} + \frac{1}{6} N^{-2} \{(3B_2'^2 - 4B'_3) P(f + 4) - \\ - 6B_2'^2 P(f + 2) + (3B_2'^2 + 4B'_3) P(f)\} + o(N^{-3}),$$

și

$$B'_2 = p(2p^2 + 9p + 11)/24, \quad B'_3 = -p(p+1)(p+1)(p+3)/32$$

$$(160) \quad g'_0 = \frac{1}{4} B'_2 s_2 + \frac{1}{3} s_3 + \frac{1}{32} s_2^2 + \frac{1}{2} v' v \left(\frac{1}{4} s_2 + B'_2 \right) + \\ + \frac{1}{2} t_1 + \frac{1}{8} t_0,$$

$$g'_2 = -2g'_0 + \frac{1}{6} s_3, \quad g'_4 = g'_0 - \frac{1}{6} s_3.$$

Când $\gamma = \frac{1}{2}$, $-2 \ln l$ are asimptotic o repartiție

$$\chi^2 \left(f, \delta^2 = \frac{1}{4} \text{Ur} \Theta^2 + \frac{1}{2} v' v \right)$$

și avem

$$(161) \quad P_\gamma(-2 \ln l < \chi^2) = P(f, \delta^2) + \frac{1}{6} N^{-\frac{1}{2}} \{ (s_3 + 3t_1) P(f+4, \delta^2) - \\ - (3s_3 + 6t_1) P(f+2, \delta^2) + (2s_3 + 3t_1) P(f, \delta^2) \} + \\ + N^{-1} \sum_{\alpha=0}^4 h'_{2\alpha} P(f+2\alpha, \delta^2) + o(N^{-\frac{3}{2}})$$

unde

$$(162) \quad h'_0 = -B'_2 - \frac{3}{8} s_4 + \frac{1}{18} s_3^2 - \frac{1}{2} t_2 + \frac{1}{8} t_1^2 + \frac{1}{6} t_1 s_3, \\ h'_2 = B'_2 + \frac{3}{4} s_4 - \frac{1}{6} s_3^2 + \frac{3}{2} t_2 - \frac{1}{2} t_1^2 - \frac{7}{12} t_1 s_3, \\ h'_4 = -\frac{1}{2} s_4 + \frac{13}{72} s_3^2 - \frac{3}{2} t_2 + \frac{3}{4} t_1^2 + \frac{3}{4} t_1 s_3, \\ h'_6 = \frac{1}{8} s_4 - \frac{1}{12} s_3^2 + \frac{1}{2} t_2 - \frac{1}{2} t_1^2 - \frac{5}{12} t_1 s_3, \\ h'_8 = \frac{1}{72} s_3^2 + \frac{1}{8} t_1^2 + \frac{1}{12} t_1 s_3.$$

Dacă consideră, șirul mai general de alternative

$$(163) \quad H_{\gamma_1 \gamma_2}: \Sigma_0^{-\frac{1}{2}} (\mu - \mu_0) = N^{-\gamma_1} v, \Sigma_0^{-\frac{1}{2}} \Sigma \Sigma_0^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{I} + N^{-\gamma_2} \Theta,$$

— $2 \ln l$ are asimptotic o repartiție :

- normală dacă $\min (\gamma_1, \gamma_2) < \frac{1}{2}$,
- χ^2 necentrată dacă $\min (\gamma_1, \gamma_2) = \frac{1}{2}$
- χ^2 dacă $\min (\gamma_1, \gamma_2) > \frac{1}{2}$.

§ 5. Testul raportului de verosimilități pentru verificarea ipotezei $\Sigma_1 = \Sigma_2$.

Fie $X_{t1}, X_{t2}, \dots, X_{tN_t}$, ($N_t > p$) o selecție asupra unui vector normal p -dimensional de vector valoare medie μ_t necunoscută și matrice de covarianțe Σ_t de asemenea necunoscută ($|\Sigma_t| \neq 0$) pentru $i = 1, 2$.
Ne propunem să verificăm ipoteza

$$(164) \quad H_0 : \Sigma_1 = \Sigma_2$$

față de ipoteza alternativă

$$(165) \quad H_1 : \Sigma_1 \neq \Sigma_2.$$

Regiunea de acceptare a testului raportului de verosimilități pentru această problemă este

$*A = \{(S_1, S_2) \mid S_1 \text{ și } S_2 \text{ sînt pozitiv definite},$

$$(166) \quad |S_1|^{N_1/2} |S_2|^{N_2/2} |S_1 + S_2|^{-(N_1+N_2)/2} \geq C_\alpha\}$$

unde :

$$S_t = \sum_{\alpha=1}^{N_t} (X_{t\alpha} - \bar{X}_t) (X_{t\alpha} - \bar{X}_t)'$$

$$\bar{X}_t = \frac{1}{N_t} \sum_{\alpha=1}^{N_t} X_{t\alpha}.$$

TEOREMA 29 (Brown (1939)). În cazul $p = 1$, regiunea de acceptare
(166) dă un test nedeplasat dacă și numai dacă $N_1 = N_2$.

TEOREMA 30. Înlocuind în (166)

$$\begin{aligned} & |S_1|^{N_1/2} |S_2|^{N_2/2} |S_1 + S_2|^{-(N_1+N_2)/2} \text{ prin} \\ & |S_1|^{(N_1-1)/2} |S_2|^{(N_2-1)/2} |S_1 + S_2|^{-(N_1+N_2-2)/2} \end{aligned}$$

se obține un test U.C.M.P. nedeplasat.

Rezultă din § 4. Cap. XIII.

TEOREMA 31. (Sugiura, Nagao (1968)). Pentru verificarea ipotezei H_0 (164) față de ipoteza H_1 (165), testul raportului de verosimilități modificat (se schimbă volumul selecției N_t cu $n_t = N_t - 1$) avînd regiunea de acceptare

$$\bar{W} = \{(S_1, S_2) \mid S_1 \text{ și } S_2 \text{ sînt pozitiv definite},$$

$$(167) \quad |S_1|^{n_1/2} |S_2|^{n_2/2} |S_1 + S_2|^{-(n_1+n_2)/2} \geq C_\alpha\}$$

este nedeplasat.

Demonstrație. Deoarece pentru orice matrice nesară A , transformarea

$$(S_1, S_2) \rightarrow (AS_1A', AS_2A')$$

lasă invariantă regiunea de acceptare, putem presupune, fără a micșora generalitatea, că $\Sigma_1 = \Gamma$ (matricea diagonală ale cărei elemente diagonale sînt date de cele p rădăcini caracteristice ale $\Sigma_1 \Sigma_2^{-1}$) și $\Sigma_2 = I$.

Atunci

$$(168) \quad P_{H_1}(\bar{W}) = C_{p,n_1} C_{p,n_2} \int_{(S_1, S_2) \in \bar{W}} |S_1|^{(n_1-p-1)/2} |S_2|^{(n_2-p-1)/2} |\Gamma|^{-n_1/2} \times \\ \times \exp \operatorname{Ur} \left[-\frac{1}{2} (\Gamma^{-1} S_1 + S_2) \right] dS_1 dS_2.$$

Punind

$$S_1 = U_1 \text{ și } S_2 = U_1^{\frac{1}{2}} U_2 U_1^{\frac{1}{2}},$$

unde $U_1^{\frac{1}{2}}$ poate fi definită în mod unic cu probabilitatea unu, astfel încît

$$U_1^{\frac{1}{2}} U_1^{\frac{1}{2}} = U_1 \text{ și } U_1^{\frac{1}{2}} \text{ este simetrică,}$$

urmează că jacobianul

$$\left| \frac{\partial(S_1, S_2)}{\partial(U_1, U_2)} \right| = |U_1|^{(p+1)/2}$$

(168) devine

$$(169) \quad C_{p,n_1} C_{p,n_2} \int_{(U_1, U_2) \in \bar{W}} |U_1|^{(n_1+n_2-p-1)/2} \times \\ \times |U_2|^{(n_2-p-1)/2} |\Gamma|^{-n_1/2} \exp \operatorname{Ur} \left[-\frac{1}{2} (\Gamma^{-1} + U_2) U_1 \right] dU_1 dU_2 = \\ = C_{p,n_1} C_{p,n_2} C_{p,n_1+n_2}^{-1} \int_{(U, U_2) \in \bar{W}} |U_2|^{(n_2-p-1)/2} |\Gamma|^{-n_1/2} |\Gamma^{-1} + U_2|^{-(n_1+n_2)/2} dU_2.$$

Făcînd transformarea $V = \Gamma^{\frac{1}{2}} U_2 \Gamma^{\frac{1}{2}}$, obținem

$$(170) \quad P_{H_1}(\bar{W}) = C_{p,n_1} C_{p,n_2} C_{p,n_1+n_2}^{-1} \int_{V \in \bar{W}^*} |V|^{(n_2-p-1)/2} |I + V|^{-(n_1+n_2)/2} dV,$$

unde $\bar{W}^*$ este mulțimea tuturor matricilor V de ordin $p \times p$ pozitiv definite astfel încît

$$(I, \Gamma^{-\frac{1}{2}} V \Gamma^{-\frac{1}{2}}) \in \bar{W}.$$

Fie ${}^*\bar{W}$ mulțimea tuturor matricilor V de ordin $p \times p$, pozitiv definite astfel încât

$$(I, V) \in \bar{W}$$

și fie $b = C_{p,n_1} C_{p,n_2} C_{p,n_1+n_2}^{-1}$. Urmează că

$${}^*\bar{W} = \{V \mid V \text{ este pozitiv definită și}$$

$$|V|^{n_2/2} |I + V|^{-(n_1+n_2)/2} \geq C_\alpha\},$$

$$\begin{aligned} P_{H_0}(\bar{W}) - P_{H_1}(\bar{W}) &= b \left\{ \int_{V \in {}^*\bar{W}} - \int_{V \in \bar{W}^*} \right\} |V|^{(n_2-p-1)/2} |I + V|^{-(n_1+n_2)/2} dV = \\ (171) \quad &= b \left\{ \int_{V \in {}^*\bar{W} - \bar{W}^* \cap {}^*\bar{W}} - \int_{V \in \bar{W}^* - {}^*\bar{W} \cap \bar{W}^*} \right\} \times \\ &\times |V|^{n_2/2} |I + V|^{-(n_1+n_2)/2} |V|^{-(p+1)/2} dV. \end{aligned}$$

Deoarece integrala

$$\int_{V \in {}^*\bar{W}} |V|^{(n_2-p-1)/2} |I + V|^{-(n_1+n_2)/2} dV$$

există și inegalitatea

$$(172) \quad \int_{V \in \omega} |V|^{(n_2-p-1)/2} |I + V|^{-(n_1+n_2)/2} dV \geq C_\alpha \int_{V \in \omega} |V|^{-(p+1)/2} dV$$

are loc pentru orice submulțime ω a mulțimii ${}^*\bar{W}$ urmează că

$$\int_{V \in {}^*\bar{W}} |V|^{-(p+1)/2} dV \text{ există.}$$

Deci

$$\begin{aligned} P_{H_0}(\bar{W}) - P_{H_1}(\bar{W}) &\geq b C_\alpha \left\{ \int_{V \in {}^*\bar{W} - \bar{W}^* \cap {}^*\bar{W}} - \int_{V \in \bar{W}^* - {}^*\bar{W} \cap \bar{W}^*} \right\} |V|^{-(p+1)/2} dV = \\ (173) \quad &= b C_\alpha \left\{ \int_{V \in \bar{W}^*} - \int_{V \in {}^*\bar{W}} \right\} |V|^{-(p+1)/2} dV = 0. \end{aligned}$$

Astfel avem $P_{H_1}(\bar{W}^c) \geq P_{H_0}(\bar{W}^c)$, ceea ce demonstrează teorema.

§ 6. Verificarea ipotezei privind egalitatea a k matrici de covarianțe

Fie $(X_{1j}, X_{2j}, \dots, X_{N_jj}) j = 1, 2, \dots, k$ o selecție asupra unui vector $X_j \sim N(\mu_j, \Sigma_j)$ și

$$\sum_1^k N_j = N, S_j = \sum_1^{N_j} (X_{ij} - \bar{X}_j)(X_{ij} - \bar{X}_j)', S = \sum_1^k S_j.$$

Ne propunem să verificăm ipoteza

$$H_0 : \Sigma_1 = \Sigma_2 = \dots = \Sigma_k.$$

În acest scop vom folosi testul raportului de verosimilitate. Funcția de verosimilitate este

$$(174) \quad P = \prod_{j=1}^k (2\pi)^{-pN_j/2} |\Sigma_j|^{-N_j/2} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_j} (X_{ij} - \mu_j)' \Sigma_j^{-1} \times \right. \\ \left. \times (X_{ij} - \mu_j) \right].$$

Ω este spațiul parametrilor în care fiecare Σ_j este o matrice pozitiv definită și μ_j un vector arbitrar.

ω reprezintă subspațiul lui Ω în care $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \dots = \Sigma_k$, și μ_j este un vector arbitrar.

Estimatorii de maximă verosimilitate sînt

$$(\hat{\mu}_j)_\Omega = \bar{X}_j, (\hat{\Sigma}_j)_\Omega = \frac{1}{N_j} S_j$$

și respectiv

$$(\hat{\mu}_j)_\omega = \bar{X}_j$$

și de aici rezultă că valorile estimatorilor pentru μ_j nu depind de Σ_j .

Funcția, a cărei maxim trebuie determinat pentru $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \dots = \Sigma_k = \Sigma$ are forma

$$(175) \quad P = (2\pi)^{-np/2} |\Sigma|^{-N/2} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_j \sum_i (X_{ij} - \bar{X}_j)' \times \right. \\ \left. \times \Sigma^{-1} (X_{ij} - \bar{X}_j) \right].$$

Maximul acestei funcții se obține pentru $\hat{\Sigma}_\omega = N^{-1} S$ și are valoarea

$$(P)_\omega = (2\pi)^{-pN/2} |\hat{\Sigma}_\omega|^{-N/2} \exp \left[-\frac{1}{2} pN \right]$$

Raportul de verosimilități pentru verificarea ipotezei H_0 este

$$(176) \quad l_1 = \frac{\prod_{j=1}^k |\hat{\Sigma}_j|^{N_j/2}}{|\hat{\Sigma}_\omega|^{N/2}} = \frac{\prod_{j=1}^k |S_j|^{N_j/2}}{|S|^{N/2}} \cdot \frac{N^{Np/2}}{\prod_{j=1}^k N_j^{N_j p/2}}$$

iar regiunea critică este

$$l_1 \leq l_{1\alpha}$$

unde $l_{1\alpha}$ se alege astfel încît

$$P[l_1 \leq l_{1\alpha} | H_0] = \alpha.$$

Bartlett (1937) a propus o altă formulă pentru l_1 în care în locul volumului selecției apare numărul gradelor de libertate $n_j = N_j - 1$ ale matricei S_j . Propune statistica

$$(177) \quad V_1 = \frac{\prod_{j=1}^k |S_j|^{n_j/2}}{|S|^{n/2}}$$

unde $n = \sum n_j = N - k$.

În cazul $p = 1$ și $j = 2$, statistica V_1 capătă forma:

$$(177') \quad V_1 = \frac{(n_1)^{\frac{1}{2}n_1} (n_2)^{\frac{1}{2}n_2} F^{\frac{1}{2}n_1}}{(n_1 F + n_2)^{\frac{1}{2}(n_1+n_2)}}$$

unde $F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$, s_1^2 și s_2^2 fiind estimații pentru σ_1^2 respectiv σ_2^2 .

Dacă în ecuația regiunii critice

$$V_1 \leq V_{1\alpha}$$

se folosește variabila $F(n_1, n_2)$, regiunea critică devine

$$F \leq F_{1\alpha}$$

(178)

$$F \geq F_{2\alpha}$$

TEOREMA 32. (Brown (1939)). Testul avînd regiunea critică (178) este nedeplasat.

§ 7. Verificarea ipotezei privind identitatea a k repartiții normale

Ne propunem să verificăm ipoteza

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k, \Sigma_1 = \Sigma_2 = \dots = \Sigma_k$$

unde μ_j (Σ_j) este vectorul valoare medie (matricea de covarianțe) a unui vector normal.

În acest caz

Ω este spațiul parametrilor $\{\mu_j, \Sigma_j\}$, $j = 1, \dots, k$ unde Σ_j este o matrice pozitiv definită.

ω este subspațiul lui Ω în care este adevărată ipoteza H_0 .

Are loc

PROPOZIȚIA 3. Fie z un vector avînd densitatea de repartiție $f(z, \theta)$ unde θ este un vector din spațiul Ω și y vectorul variabilelor de selecție asupra acestuia. Considerăm ipotezele

$$H_1: \theta \in \Omega_1 \subset \Omega$$

$$H_2: \theta \in \Omega_2 \subset \Omega_1 \text{ cu condiția } \theta \in \Omega_1$$

și

$$H_{12}: \theta \in \Omega_2 \text{ cu condiția } \theta \in \Omega$$

Dacă l_1 , l_2 și l_{12} sînt rapoartele de verosimilități pentru verificarea ipotezelor H_1 , H_2 și respectiv H_{12} , atunci

$$l_{12} = l_1 l_2.$$

Demonstrație. Deoarece

$$l_1 = \frac{\max_{\theta \in \Omega_1} f(y, \theta)}{\max_{\theta \in \Omega} f(y, \theta)}, \quad l_2 = \frac{\max_{\theta \in \Omega_2} f(y, \theta)}{\max_{\theta \in \Omega_1} f(y, \theta)}$$

$$l_{12} = \frac{\max_{\theta \in \Omega_2} f(y, \theta)}{\max_{\theta \in \Omega} f(y, \theta)}$$

are loc egalitatea $l_{12} = l_1 l_2$.

Astfel, raportul de verosimilități pentru verificarea ipotezei H_0 este produsul rapoartelor de verosimilitate pentru verificarea ipotezelor H_1 și H_2 .

$$(179) \quad l_{12} = l_1 l_2 = \left(\prod_{j=1}^k \frac{|S_j|^{\frac{1}{2} N_j}}{N_j^{\frac{1}{2} p N_j}} \right) \frac{N^{\frac{1}{2} p N}}{|S^*|^{\frac{1}{2} N}}$$

unde

$$(180) \quad S^* = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{N_j} (X_{ij} - \bar{X}) (X_{ij} - \bar{X})' = S + \sum_{j=1}^k N_j (\bar{X}_j - \bar{X}) (\bar{X}_j - \bar{X})'.$$

Regiunea critică se alege astfel încît

$$l \leq l_{\alpha} [P(l \leq l_{\alpha} | H_0) = \alpha].$$

Statistica

$$(181) \quad V_2 = \frac{|S|^{\frac{1}{2}n}}{|S^*|^{\frac{1}{2}n}} = l_2^{n/N}$$

este echivalentă cu raportul de verosimilități l_2 pentru verificarea ipotezei H_2 . Urmează că pentru verificarea ipotezei H_0 în locul statisticii l se poate folosi statistica

$$(182) \quad V = V_1 V_2 = \frac{\prod_1^k |S_j|^{\frac{1}{2}n_j}}{|S^*|^{\frac{1}{2}n}}.$$

TESTELE WALD-WOLFOWITZ,
WILCOXON-MANN-WHITNEY ȘI X

§ 1. Repartiții în teoria iterațiilor și caracteristici ale acestora

Fie $(X_j)_{1 \leq j \leq n}$, n variabile aleatoare independente, fiecare dintre ele avînd repartiția

$$X_j: \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

Considerăm șirurile $x_1, x_2, \dots, x_n$. Fiecare șir conține elementele a_1 și a_2 care apar într-o anumită ordine.

DEFINIȚIA 1. Șirul $x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+l}$, unde $1 \leq j \leq n$ și $0 \leq l \leq n-j$ este numit iterație dacă

$$(1) \quad x_{j-1} \neq x_j = x_{j+1} = \dots = x_{j+l} \neq x_{j+l+1}.$$

Numărul $l+1$ poartă numele de lungimea iterației.

Dacă r_{ij} reprezintă numărul de iterații de lungimea j ce se compun din elemente a_i ($i = 1, 2$), iar n_i , $i = 1, 2$, numărul de a_i , atunci

$$(2) \quad n_1 + n_2 = n,$$

$$\sum_j j r_{ij} = n_i, \quad i = 1, 2.$$

Dacă r_i ($i = 1, 2$) reprezintă numărul iterațiilor ce se compun din elemente a_i , iar r numărul total de iterații, atunci

$$(3) \quad r_i = \sum_j r_{ij},$$

$$r = r_1 + r_2.$$

Se pune problema determinării repartiției variabilelor introduse anterior. Pentru o mulțime de valori r_{ij} dată, cele r_i iterații compuse din a_i se pot aranja în

$$(4) \quad \frac{r_i!}{r_{i1}! r_{i2}! \dots r_{in_i}!}, \quad i = 1, 2$$

moduri. Se observă că r_1 și r_2 pot să difere cel mult prin 1, deoarece în caz contrar ar trebui ca cel puțin 2 iterații ale aceluiași element să fie înlăturate, ceea ce contrazice definiția iterației.

Funcția

$$(5) \quad G(r_1, r_2) = \begin{cases} 0, & |r_1 - r_2| > 1, \\ 1, & |r_1 - r_2| = 1, \\ 2, & r_1 = r_2 \end{cases}$$

dă numărul de moduri de aranjare a r_1 obiecte de primul fel și r_2 obiecte de al doilea fel astfel ca două obiecte de același fel să nu apară împreună.

Din independența și din faptul că variabilele aleatoare X_k au aceeași repartiție, urmează că, pentru n_1 și n_2 dați, iterațiile de orice ordin ale lui a_1 și a_2 au aceeași probabilitate de realizare.

Numărul modurilor de obținere a r_{1j} iterații compuse din a_1 de lungime $j = 1, \dots, n_1$ și de obținere a r_{2j} iterații compuse din a_2 de lungime $j = 1, \dots, n_2$ este

$$(6) \quad \frac{r_1! r_2!}{\prod_{j=1}^{n_1} r_{1j}! \prod_{j=1}^{n_2} r_{2j}!} \cdot G(r_1, r_2).$$

TEOREMA 1. Funcția de frecvență $P(r_{1j}, r_{2j}, n_1, n_2)$ a vectorului aleator $(r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1n_1}, r_{21}, r_{22}, \dots, r_{2n_2}, n_1, n_2)$ este

$$(7) \quad P(r_{1j}, r_{2j}, n_1, n_2) = \frac{r_1! r_2!}{\prod_{j=1}^{n_1} r_{1j}! \prod_{j=1}^{n_2} r_{2j}!} G(r_1, r_2) p^{n_1} (1-p)^{n_2}.$$

Demonstrație. Avem

$$(8) \quad P(r_{1j}, r_{2j}, n_1, n_2) = P(r_{11}, \dots, r_{1n_1}, r_{21}, \dots, r_{2n_2} | n_1, n_2) P(n_1, n_2),$$

unde

$$\begin{aligned} P(r_{11}, \dots, r_{1n_1}, r_{21}, \dots, r_{2n_2} | n_1, n_2) &= \\ &= \frac{r_1! r_2!}{\prod_{j=1}^{n_1} r_{1j}! \prod_{j=1}^{n_2} r_{2j}!} \cdot \frac{n_1! n_2!}{n!} G(r_1, r_2), \end{aligned}$$

$$P(n_1, n_2) = \frac{n!}{n_1! n_2!} p^{n_1} (1-p)^{n_2},$$

ceea ce demonstrează teorema

TEOREMA 2. Repartiția marginală a vectorului aleator $(r_{11}, \dots, r_{1n_1}, n_1, n_2)$ are funcția de frecvență

$$(9) \quad P(r_{1j}, n_1, n_2) = C_{n_2+1}^{r_1} \frac{r_1!}{r_{11}! r_{12}! \dots r_{1n_1}!} p^{n_1} (1-p)^{n_2}.$$

Demonstrație. Pentru determinarea repartiției vectorului aleator $(r_{11}, \dots, r_{1n_1}, n_1, n_2)$ vom proceda în două etape.

Mai întâi vom determina funcția de frecvență $P(r_{1j}, r_2, n_1, n_2)$ a vectorului aleator $(r_{11}, \dots, r_{1n_1}, r_2, n_1, n_2)$ iar apoi pentru a obține rezultatul dorit însumăm $P(r_{1j}, r_2, n_1, n_2)$ pentru toți r_2 .

Pentru a evalua expresia

$$(10) \quad \sum \frac{r_2!}{r_{21}! \dots r_{2n_2}!}$$

unde suma este extinsă asupra acelor $r_{21}, \dots, r_{2n_2}$ care satisfac egalitățile

$$(11) \quad \sum j r_{2j} = n_2, \quad \sum r_{2j} = r_2 \quad (n_2 \text{ și } r_2 \text{ fixați})$$

vom folosi identitatea în s .

$$(12) \quad (s + s^2 + \dots)^{r_2} = s^{r_2} (1 - s)^{-r_2} = s^{r_2} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(r_2 + t - 1)!}{(r_2 - 1)! t!} s^t$$

(identitatea adevărată pentru valorile lui s apropiate de zero).

Acum coeficientul lui s^{n_2} în prima expresie a lui (12) este (10), supus la condiția (11). Însă din (12) rezultă că coeficientul lui s^{n_2} este

$$(13) \quad C_{n_2-1}^{r_2-1}.$$

Din (7) obținem

$$(14) \quad \begin{aligned} P(r_{1j}, r_2, n_1, n_2) &= \frac{r_1!}{r_{11}! r_{12}! \dots r_{1n_1}!} \cdot G(r_1, r_2) p^{n_1} (1-p)^{n_2} \sum \frac{r_2!}{r_{21}! r_{22}! \dots r_{2n_2}!} = \\ &= \frac{r_1!}{r_{11}! r_{12}! \dots r_{1n_1}!} C_{n_2-1}^{r_2-1} G(r_1, r_2) p^{n_1} (1-p)^{n_2}. \end{aligned}$$

Pentru a obține $P(r_{1j}, n_1, n_2)$ însumăm (14) în raport cu r_2 . Din relația dintre r_1 și r_2 și din definiția lui $G(r_1, r_2)$, obținem

$$\begin{aligned} (n_2 - 1)! \sum_{r_2=1}^{n_2} \frac{G(r_1, r_2)}{(r_2 - 1)! (n_2 - r_2)!} &= (n_2 - 1)! \left[\frac{2}{(r_1 - 1)! (n_2 - r_1)!} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(r_1 - 1)! (n_2 - r_1 + 1)!} + \frac{1}{r_1! (n_2 - r_1 - 1)!} \right] = C_{n_2+1}^{r_1} \end{aligned}$$

Urmează că

$$\begin{aligned} P(r_{1j}, n_1, n_2) &= \frac{r_1!}{r_{11}! r_{12}! \dots r_{1n_1}!} p^{n_1} (1-p)^{n_2} (n_2 - 1) \times \\ &\quad \times \sum_{r_2=1}^{n_2} \frac{G(r_1, r_2)}{(r_2 - 1)! (n_2 - r_2)!} \end{aligned}$$

ceea ce demonstrează teorema.

Pentru $P(r_2, n_1, n_2)$ găsim o expresie similară.

O altă repartiție importantă este cea corespunzătoare vectorului (r_1, r_2, n_1, n_2) . Funcția de frecvență a acestei repartiții se obține sumând (14) pentru toate valorile r_{1j} . Obținem

$$(15) \quad P(r_1, r_2, n_1, n_2) = C_{n_1-1}^{r_1-1} C_{n_2-1}^{r_2-1} G(r_1, r_2) p^{n_1} (1-p)^{n_2}.$$

Adunând (15) pentru toate r_1 și r_2 , găsim funcțiile de frecvențe ale vectorilor aleatori (r_1, n_1, n_2) și (r_2, n_1, n_2) . Avem

$$(16) \quad \begin{aligned} P(r_1, n_1, n_2) &= C_{n_1-1}^{r_1-1} C_{n_2+1}^{r_1} p^{n_1} (1-p)^{n_2} \\ P(r_2, n_1, n_2) &= C_{n_1+1}^{r_2} C_{n_2-1}^{r_2-1} p^{n_1} (1-p)^{n_2}. \end{aligned}$$

Pentru a determina funcția de frecvență a numărului total de iterații $r = r_1 + r_2$ vom distinge două cazuri:

a) r este un număr par. Deoarece r_1 și r_2 pot să difere cel mult printr-o unitate, urmează că $r_1 = r_2 = \frac{r}{2}$ și din (15)

$$(17) \quad P(r) = P\left(\frac{r}{2}, \frac{r}{2}, n_1, n_2\right) = 2 C_{n_1-1}^{\frac{r}{2}-1} C_{n_2-1}^{\frac{r}{2}-1} p^{n_1} (1-p)^{n_2}$$

deoarece

$$G\left(\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right) = 2;$$

b) r este un număr impar. Atunci

$$r_1 = \frac{1}{2}(r-1), \quad r_2 = \frac{1}{2}(r+1)$$

sau

$$r_2 = \frac{1}{2}(r+1), \quad r_1 = \frac{1}{2}(r-1).$$

Cum $|r_1 - r_2| = 1$, urmează că $G(r_1, r_2) = 1$, ceea ce ne conduce la

$$(18) \quad \begin{aligned} P(r) &= P\left[\frac{1}{2}(r-1), \frac{1}{2}(r+1), n_1, n_2\right] + P\left[\frac{1}{2}(r+1), \frac{1}{2}(r-1), n_1, n_2\right] = \\ &= [C_{n_1-1}^{\frac{1}{2}(r-3)} C_{n_2-1}^{\frac{1}{2}(r-1)} + C_{n_1-1}^{\frac{1}{2}(r-1)} C_{n_2-1}^{\frac{1}{2}(r-3)}] p^{n_1} (1-p)^{n_2}. \end{aligned}$$

Am demonstrat

TEOREMA 3. Funcția de frecvență a variabilei r este dată de (17) pentru r par și de (18) pentru r impar.

Din (16) și ținând seama de valoarea lui $P(n_1, n_2)$, obținem

$$(19) \quad \begin{aligned} P(r_1 | n_1, n_2) &= C_{n_1-1}^{r_1-1} C_{n_2+1}^{r_1} / C_n^{n_1}, \\ P(r_2 | n_1, n_2) &= C_{n_1+1}^{r_2} C_{n_2-1}^{r_2-1} / C_n^{n_1}, \end{aligned}$$

iar din (18)

$$(20) \quad \begin{aligned} P(r | n_1, n_2) &= 2C_{n_1-1}^{\frac{1}{2}(r-2)} C_{n_2-1}^{\frac{1}{2}(r-2)} / C_n^{n_1}, \quad r \text{ par}, \\ P(r | n_1, n_2) &= [C_{n_1-1}^{\frac{1}{2}(r-3)} C_{n_2-1}^{\frac{1}{2}(r-1)} + C_{n_1-1}^{\frac{1}{2}(r-1)} C_{n_2-1}^{\frac{1}{2}(r-3)}] / C_n^{n_1}, \quad r \text{ impar}, \end{aligned}$$

rezultat obținut pentru prima oară de Stevens (1939). Swed și Eisenhart (1943) construiesc tabele pentru $P(r | n_1, n_2)$.

În cele ce urmează vom determina valoarea medie și dispersia unora dintre variabilele introduse anterior.
Din (19) obținem

$$(21) \quad M(r_1 | n_1, n_2) = \sum_{r_1=1}^{n_1} r_1 C_{n_1-1}^{r_1-1} C_{n_2+1}^{r_1} / C_n^{n_1} = (n_2 + 1) \sum_{r_1=1}^{n_1} C_{n_1-1}^{r_1-1} C_{n_2+1}^{r_1} / C_n^{n_1}.$$

Pentru a determina

$$\sum_{r_1=1}^{n_1} C_{n_1-1}^{r_1-1} C_{n_2+1}^{r_1}$$

vom compara termenii care nu conțin pe s din ambii membri ai identității

$$(1+s)^{n_2} \left(1 + \frac{1}{s}\right)^{n_1-1} = \frac{(1+s)^{n_1+n_2-1}}{s^{n_1-1}}.$$

În membrul drept avem

$$C_{n_1+n_2-1}^{n_1-1}$$

iar în membrul stâng

$$\sum_{r_1=1}^{n_1} C_{n_1-1}^{r_1-1} C_{n_2+1}^{r_1}.$$

Obținem

$$(22) \quad M(r_1 | n_1, n_2) = \frac{(n_2 + 1)(n - 1)!}{(n_1 - 1)! n_2!} / C_n^{n_1} = \frac{(n_2 + 1) n_1}{n}$$

și analog

$$(23) \quad M(r_2 | n_1, n_2) = \frac{(n_1 + 1) n_2}{n}.$$

Am demonstrat

TEOREMA 4. $M(r_1 | n_1, n_2)$ și $M(r_2 | n_1, n_2)$ sînt date de (22) și respectiv (23).

Din (22) și (23) rezultă că

$$(24) \quad M(r | n_1, n_2) = M(r_1 | n_1, n_2) + M(r_2 | n_1, n_2) = \frac{2n_1n_2 + n}{n}$$

(19) conduce la

$$(25) \quad M[r_1(r_1 - 1) | n_1, n_2] = n_2(n_2 + 1) \sum_{r_1=1}^{n_1} C_{n_1-1}^{r_1-1} C_{n_2-1}^{r_1-2} / C_n^{n_1}.$$

Comparînd coeficientul lui s^{-1} din ambii membri ai dezvoltării binomiale din identitatea

$$(1 + s)^{n_2-1} \left(1 + \frac{1}{s}\right)^{n_1-1} \equiv \frac{(1 + s)^{n_1+n_2-2}}{s^{n_1-1}}$$

obținem

$$(26) \quad \sum_{r_1=1}^{n_1} C_{n_1-1}^{r_1-1} C_{n_2-1}^{r_1-2} = C_{n_1+n_2-2}^{n_1-2}.$$

Ținînd seama de (26) în (25) obținem

$$(27) \quad M[r_1(r_1 - 1) | n_1, n_2] = n_2(n_2 + 1) C_{n_1+n_2-2}^{n_1-2} / C_n^{n_1} = \frac{n_1n_2(n_1-1)(n_2-1)}{n(n-1)}$$

(27) se mai poate scrie

$$M(r_1^2 - r_1 | n_1, n_2) = M(r_1^2 | n_1, n_2) - M(r_1 | n_1, n_2),$$

de unde

$$M(r_1^2 | n_1, n_2) = \frac{n_1n_2(n_1-1)(n_2-1)}{n(n-1)} + M(r_1 | n_1, n_2).$$

Urmează că

$$\begin{aligned} D^2(r_1 | n_1, n_2) &= M(r_1^2 | n_1, n_2) - M^2(r_1 | n_1, n_2) = \\ &= \frac{n_1n_2(n_1-1)(n_2-1)}{n(n-1)} + \frac{n_1(n_2+1)}{n} - \frac{n_1^2(n_2+1)^2}{n^2} \end{aligned}$$

ceea ce ne permite să scriem

$$(28) \quad D^2(r_1 | n_1, n_2) = \frac{n_1(n_1-1)n_2(n_2+1)}{(n-1)n^2}.$$

Analog

$$(29) \quad D^2(r_2 | n_1, n_2) = \frac{n_1(n_1+1)n_2(n_2-1)}{(n-1)n^2}.$$

Pentru calcularea dispersiei variabilei $(r|n_1, n_2)$ calculăm media variabilei aleatoare $(r_1 - 1)(r_2 - 1)$.

Avem, succesiv

$$\begin{aligned} M[(r_1 - 1)(r_2 - 1) | n_1, n_2] &= \sum_{r_1, r_2} (r_1 - 1)(r_2 - 1) \frac{C_{n_1-1}^{r_1-1} C_{n_2-1}^{r_2-1}}{C_n^{n_1}} G(r_1, r_2) = \\ &= \frac{(n_1 - 1)(n_2 - 1)}{C_n^{n_1}} \sum_{r_1, r_2} C_{n_1-2}^{r_1-2} C_{n_2-2}^{r_2-2} G(r_1, r_2) = \\ &= \frac{(n_1 - 1)(n_2 - 1)}{C_n^{n_1}} \sum_{r_1} C_{n_1-2}^{r_1-2} (C_{n_2-2}^{r_1-2} + 2C_{n_2-2}^{r_1-2} + C_{n_2-2}^{r_1-1}) = \\ &= \frac{(n_1 - 1)(n_2 - 1)}{C_n^{n_1}} \sum_{r_1} C_{n_1-2}^{r_1-2} C_{n_2-1}^{r_1-1} = \frac{(n_1 - 1)(n_2 - 1)}{C_n^{n_1}} C_{n-2}^{n_1-1}. \end{aligned}$$

Din relațiile anterioare,

$$\text{cov}(r_1, r_2 | n_1, n_2) = \frac{n_1(n_1 - 1)(n_2 - 1)n_2}{n^2(n - 1)}$$

și ținând seama că

$$D^2(r | n_1, n_2) = D^2(r_1 | n_1, n_2) + D^2(r_2 | n_1, n_2) + 2 \text{cov}[(r_1 | n_1, n_2), (r_2 | n_1, n_2)]$$

obținem

$$(30) \quad D^2(r | n_1, n_2) = \frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - 1)}{(n - 1)n^2}.$$

Am demonstrat

TEOREMA 5. Dispersia numărului total de iterații este dată de (30).

§ 2. Testul Wald-Wolfowitz

În 1940, Wald și Wolfowitz formulează o metodă de verificare a ipotezei conform căreia două selecții provin din populații cu aceeași funcție de repartiție continuă.

Fie $(X_{11}, \dots, X_{1n_1})$ și $(X_{21}, \dots, X_{2n_2})$ două selecții asupra variabilelor independente X_1 și X_2 cu aceeași funcție de repartiție continuă. Deoarece

$$P(X_{1l} - X_{1l'} = 0) = P(X_{2j} - X_{2j'} = 0) = P(X_{1l} - X_{2j} = 0) = 0$$

putem presupune că

$$x_{1l} \neq x_{1l'}; \quad x_{2j} \neq x_{2j'}; \quad x_{1l} \neq x_{2j}$$

$$l \neq l', j \neq j', \quad 1 \leq l \leq n_1, \quad 1 \leq j \leq n_2.$$

Aranjind valorile x_{1i} și x_{2j} în ordine crescătoare, obținem șirul $(z_m)_{1 \leq m \leq n_1 + n_2}$, unde

$$z_1 < z_2 < \dots < z_{n_1 + n_2}.$$

Vom asocia numărul zero la acei z_m care sînt elemente ale primei selecții și la ceilalți z_m , numărul unu. În acest fel se obține un șir y_m ce conține pe zero de n_1 ori și pe unu de n_2 ori. Dacă ipoteza H_0 , conform căreia ambele selecții sînt efectuate asupra unor variabile cu aceeași funcție de repartiție, este adevărată, toate combinațiile ce conțin pe zero de n_1 ori și pe unu de n_2 ori au aceeași probabilitate de apariție.

Să vedem cum aplicăm teoria iterațiilor la verificarea unei astfel de ipoteze. Sîntem înclinați să respingem ipoteza H_0 dacă numărul total de iterații este semnificativ mai mic decît numărul mediu de iterații, prin urmare elementele fiecărei selecții au tendința de a apărea concentrat, ceea ce ar arăta că variabilele aleatoare X_1 și X_2 au repartiții diferite.

Definim mulțimea critică a valorilor lui r , ca mulțimea pentru care

$$(31) \quad P[r \leq r_0(\alpha, n_1, n_2)] \leq \alpha$$

unde $r_0(\alpha, n_1, n_2)$ este cel mai mare întreg pentru care (31) are loc, iar α pragul de semnificație ales. Prin urmare vom respinge ipoteza H_0 dacă valoarea observată r este cel mult egală cu r_0 .

TEOREMA 6. (Wald, Wolfowitz (1940)). Dacă $F_1(x) = F_2(x)$, pentru $n_1, n_2 \rightarrow \infty$, astfel încît $\frac{n_2}{n_1} \rightarrow s > 0$, atunci r este repartizat.

$$N \left(\frac{2n_1s}{1+s}, \frac{4s^2n_1}{(1+s)^3} \right).$$

Demonstrație. Considerăm statistica

$$y = \frac{1}{2s\sqrt{n_1}} \left(r - \frac{2n_1s}{1+s} \right) (1+s)^{3/2}$$

de unde

$$(32) \quad r = (1+s)^{-3/2} [2s\sqrt{n_1}(y + \sqrt{(1+s)n_1})].$$

Dacă notăm $P_1(r)$ [$P_2(r)$] valoarea lui $P(r|n_1, n_2)$ din (20), pentru r par (impar), atunci pentru n_1 dat și numerele y' și y'' ($y' < y''$) date, avem

$$(33) \quad \begin{aligned} P(y' < y < y'') &= \Sigma^* P_1 \left[\frac{2s\sqrt{n_1}(y + \sqrt{n_1(1+s)})}{(1+s)^3} \right] + \\ &+ \Sigma^{**} P_2 \left[\frac{2s\sqrt{n_1}(y + \sqrt{n_1(1+s)})}{(1+s)^3} \right] \end{aligned}$$

unde Σ^* (Σ^{**}) reprezintă suma după toate valorile discrete ale lui y dintre y' și y'' pentru valorile pare (impare) ale lui r ce satisfac (31).

Prima sumă mai poate fi scrisă

$$(34) \quad \Sigma^* \left\{ P_1 \left[\frac{2sn_1(y + \sqrt{n_1(1+s)})}{(1+s)^3} \right] \sqrt{n_1 s^2 / (1+s)^3} \right\} \sqrt{(1+s)^3 / n_1 s^2}$$

Folosind formula lui Stirling

$$h! \simeq \sqrt{2\pi h} h^h e^{-h}$$

pentru $n_1 \rightarrow \infty$, urmează că (34) converge către

$$(35) \quad \frac{1}{2} \int_{y'}^{y''} \varphi(x) dx.$$

Analog, pentru $n_1 \rightarrow \infty$ a doua sumă din (33) converge către aceeași limită (35). Deci

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} P(y' < y < y'') = \int_{y'}^{y''} \varphi(x) dx.$$

Pentru studiul comportării asimptotice a statisticii r , cînd volumele selecțiilor tind către infinit, vom mai prezenta încă două rezultate.

i) **TEOREMA 7.** (Mood (1940)). Pentru $n \rightarrow \infty$ ($n_1 + n_2 \rightarrow \infty$) repartiția limită a vectorului

$$(r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1n_1}, r_{21}, r_{22}, \dots, r_{2n_2})$$

este o repartiție normală multidimensională.

DEFINIȚIA 2. (Wolfowitz (1942)). Statistica

$$l(r_{11}, r_{12}, \dots, r_{21}, r_{22}, \dots) = \sum_{j=1}^{\infty} [r_{1j}f(j) + r_{2j}g(j)]$$

unde funcțiile $f(x)$ și $g(x)$ sînt definite pentru orice x real poartă numele de funcție de desfacere aditivă.

ii) **TEOREMA 8.** (Wolfowitz (1942)). Dacă funcțiile $f(x)$ și $g(x)$ nu sînt proporționale cu x și dacă seriile

$$(36) \quad \sum_{j=1}^{\infty} |f(j)| e_m^{j/2}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} |g(j)| e_m^{j/2}$$

unde

$$e_m = \max(e_1, e_2) \text{ cu } e_i = \frac{n_i}{n}, \quad i = 1, 2$$

sînt convergente,

atunci repartiția limită a funcției de desfacere aditivă, pentru $n \rightarrow \infty$ ($n_1 + n_2 \rightarrow \infty$) este o repartiție normală.

Demonstrația este bazată pe metoda aproximării funcției de desfacere aditivă cu ajutorul funcției

$$\sum_{j=1}^u r_{1j}f(j) + \sum_{j=1}^v r_{2j}f(j)$$

pentru valori suficient de mari ale lui n .

Repartiția limită se deduce folosind rezultatul lui Mood.

Statistica r este un caz particular al statisticii l , luând funcțiile $f(x)$ și $g(x)$ constante [$f(x) = g(x) = 1$].

Condițiile impuse funcțiilor $f(x)$ și $g(x)$ în studiul funcției de desfacere aditivă l sînt satisfăcute.

Într-adevăr $f(x)$ și $g(x)$ nu sînt proporționale cu x și cele două serii date de (36) se identifică cu seria $\sum_{j=1}^{\infty} e_m^{j/2}$ care este convergentă, fiind o serie geometrică cu e_m subunitar.

§ 3. Testul Wilcoxon-Mann-Whitney

Wilcoxon (1945) propune un test pentru selecții de același volum, test extins în 1947 de Mann și Whitney pentru selecții de volume neegale.

Van der Vaart (1950), van der Waerden (1952, 3), van Dantzig (1951) și Lehmann (1953) se ocupă de puterea testului Wilcoxon-Mann-Whitney.

3.1. Definirea statisticii U a lui Mann-Whitney

Fie $X_{11}, \dots, X_{1n_1} (X_{21}, \dots, X_{2n_2})$ o selecție asupra variabilei aleatoare $X_1 (X_2)$ cu funcția de repartiție $F_1 (F_2)$ continuă, X_1 și X_2 fiind independente. Vom presupune că

$$F_1(x) = F_2(x) \text{ pentru orice } x \text{ real}$$

și $y_m (m = 1, \dots, n_1 + n_2)$ au aceeași semnificație ca în § 2.

Numărăm zerourile din șirul $\{y_m\}$ care sînt precedați de unu și după aceea facem suma acestor numere. Notăm această sumă prin u . Prin urmare, u este numărul perechilor (x_{1i}, x_{2j}) pentru care $x_{2j} < x_{1i}$. Aceasta este valoarea observată u a statisticii U a lui Mann-Whitney.

3.1.1. Repartiția statisticii U cînd $F_1 = F_2$

Fie $\bar{p}_{n_1 n_2}(u)$ (și respectiv $p_{n_1 n_2}(u)$) numărul șirurilor $\{y_m\}$ ce conțin pe zero de n_1 ori și pe unu de n_2 ori în care unu precede u zero (și probabilitatea unui astfel de șir). Deoarece numărul total al șirurilor ce conține pe zero de n_1 ori și pe unu de n_2 ori este $C_{n_1+n_2}^{n_1}$ și fiecare șir are aceeași probabilitate de apariție, avem relația

$$(37) \quad p_{n_1 n_2}(u) = \frac{n_1! n_2!}{(n_1 + n_2)!} \bar{p}_{n_1 n_2}(u).$$

PROPOZIȚIA 1. (Mann, Whitney (1947)). $\bar{p}_{n_1 n_2}(u)$ satisfac relația de recurență

$$(38) \quad \bar{p}_{n_1 n_2}(u) = \bar{p}_{n_1-1, n_2}(u - n_2) + \bar{p}_{n_1, n_2-1}(u),$$

unde $\bar{p}_{n_1 n_2}(u) = 0$ pentru $u < 0$ și $u > n_1 n_2$.

Demonstrație. Vom împărți șirul existent în două grupe. Prima grupă constă în acele șiruri care au zero în ultimul loc din dreapta, a doua, acelea care au unu în acest loc. Notăm prin $a_{n_1 n_2}(u)$ și $b_{n_1 n_2}(u)$ numărul șirurilor din prima și respectiv a doua grupă, în care 1 precede u zerouri. Avem

$$(39) \quad \bar{p}_{n_1 n_2}(u) = a_{n_1 n_2}(u) + b_{n_1 n_2}(u).$$

Eliminăm ultimul zero din șirurile primului grup; în acest mod am obținut șiruri ce conțin pe zero de $(n_1 - 1)$ ori și pe unu de n_2 ori fiecare, deoarece fiecare unu precede un zero mai puțin ca în șirul inițial. Deoarece fiecare șir conține pe unu de n_2 ori

$$(40) \quad a_{n_1 n_2}(u) = \bar{p}_{n_1-1, n_2}(u - n_2).$$

Eliminăm ultimul 1 din șirurile grupului doi. Aceste șiruri vor conține pe zero de n_1 ori și pe unu de $n_2 - 1$ ori. Deoarece eliminând numărul 1 din ultimul loc din dreapta nu se schimbă valoarea lui u , avem

$$(41) \quad b_{n_1 n_2}(u) = \bar{p}_{n_1, n_2-1}(u).$$

Din (40) și (41) rezultă (38).

Ținând seama de (37) în (38) obținem

$$(38') \quad p_{n_1 n_2}(u) = \frac{n_1}{n_1 + n_2} p_{n_1-1, n_2}(u - n_2) + \frac{n_2}{n_1 + n_2} p_{n_1, n_2-1}(u).$$

3.1.2. Repartiția statisticii U în alternativa Lehmann generalizată

DEFINIȚIA 3. Prin alternativă Lehmann generalizată vom înțelege

$$\mathcal{E}_1 : F_2 = F_1^k, \quad k > 0$$

sau

$$\mathcal{E}_2 : F_2 = 1 - (1 - F_1)^k, \quad k > 0.$$

Considerăm mai întâi alternativa $\mathcal{E}_1$. Fie $k = \frac{a}{b}$, a și b întregi pozitivi și fie

$$g(v) = F_1^{-1}[F_1^{1/b}(v)].$$

Definim $X_{1i}^* = g(X_{1i})$, $i = 1, \dots, n_1$ și $X_{2j}^* = g(X_{2j})$, $j = 1, 2, \dots, n_2$. Atunci X_{1i}^* are funcția de repartiție F_1^b și X_{2j}^* are funcția de repartiție F_1^a . Deoarece transformarea este strict crescătoare, repartiția statisticii U nu este afectată.

Fie $W_{11}, \dots, W_{a1} : \dots : W_{1n_1}, \dots, W_{bn_1}$ și $Z_{11}, \dots, Z_{a1} : \dots : Z_{1n_1}, \dots, Z_{an_1}$ variabile aleatoare independente și identic repartizate cu funcția de repartiție F_1 . Atunci

$$X_{1i} = \max_{1 \leq t \leq b} W_{ti} \text{ are funcția de repartiție } F_1^b, i = 1, 2, \dots, n_1$$

și

$$X_{2j} = \max_{1 \leq t \leq a} Z_{tj} \text{ are funcția de repartiție } F_1^a, j = 1, 2, \dots, n_2$$

Înlocuim

$$W_{ti} \text{ prin } -1, \dots, W_{in_1} \text{ prin } -n_1, i = 1, \dots, b$$

și

$$Z_{tj} \text{ prin } 1, \dots, Z_{jn_2} \text{ prin } n_2, j = 1, \dots, a.$$

Definim $A_{bn_1, an_2}(u)$ ca numărul configurațiilor distincte de

$$-b, \dots, -1, 1, \dots, a$$

având $U = u$. Atunci

$$(37') \quad p_{n_1 n_2}(u) = A_{bn_1, an_2}(u) / [(bn_1 + an_2)! / (b!)^{n_1} (a!)^{n_2}].$$

Considerînd configurațiile pentru care extremitatea dreaptă este mai întii negativă și apoi pozitivă obținem formula de recurență

$$(39') \quad A_{bn_1, an_2}(u) = n_1 C_{bn_1 + an_2 - 1}^{b-1} A_{b(n_1-1), an_2}(u - n_2) + n_2 C_{bn_1 + an_2 - 1}^{a-1} A_{bn_1, a(n_2-1)}(u).$$

Primul termen din membrul drept provine din configurațiile cu ultimul element negativ. Fiecare dintre elementele $-1, \dots, -n$ sînt o posibilitate. Factorul $C_{bn_1 + an_2 - 1}^{b-1}$ reprezintă numărul modurilor de a pune ceilalți $b-1$ întregi care nu se pot distinge în cele $b(n_1-1) + an_2 + 1$ celule formate de ceilalți întregi. Argumentul $u - n_2$ este rezultat din faptul că valoarea statisticii U este redusă cu n_2 pentru fiecare dintre aceste configurații dacă extremitatea dreaptă este îndepărtată.

Împărțind (39') prin $(bn_1 + an_2)! / (b!)^{n_1} (a!)^{n_2}$ și ținînd seama de (37') obținem

PROPOZIȚIA 2. (Shorack (1966)) $p_{n_1 n_2}(u)$ satisface relația de recurență

$$(38'') \quad p_{n_1 n_2}(u) = \frac{n_1}{kn_2 + n_1} p_{n_1-1, n_2}(u - n_2) + \frac{kn_2}{kn_2 + n_1} p_{n_1, n_2-1}(u)$$

Observație. Pentru $k = 1$, (38'') se reduce la (38')

Arătăm că proporția 2 se păstrează și pentru k irațional. Fie $Q_{F_1, k}(u)$ funcția de repartiție a repartiției date de (38'') pentru $k > 0$ însă nu necesar k rațional. Definim distanța dintre două funcții de repartiție F_1 și F_2 ca

$$d(F_1, F_2) = \sup_x |F_1(x) - F_2(x)|.$$

Atunci

$$d(Q_{F_1, k}, Q_{F_1, k'}) = \max_{u=0,1,\dots,n_1 n_2} |Q_{F_1, k}(u) - Q_{F_1, k'}(u)|.$$

Presupunem că $T_{F_1}(k)$ aplică perechea (F_1, F_1^k) în densitatea de repartiție a statisticii U cînd X_1 are funcția de repartiție F_1 și X_2 are func-

ția de repartiție F_1^k . Am arătat că pentru k pozitiv rațional $T_{F_1}(k) = Q_{F_1, k}$. T_F este uniform continuă în sensul că dat $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încît dacă $0 < |k - k'| < \delta$, atunci $d(Q_{F_1, k}, Q_{F_1, k'}) < \varepsilon$. Fie $k > 0$ irațional și fie $(r_n)_{1 \leq n < \infty}$ un șir de numere raționale pozitive astfel încît $\lim_n r_n = k$. Atunci $\lim_n T_{F_1}(r_n) = \lim_n Q_{F_1, r_n}$. Dar, după (38''), $\lim_n Q_{F_1, r_n} = Q_{F_1, k}$. Deoarece T_{F_1} este continuă în k ,

$$\lim_n T_{F_1}(r_n) = T_{F_1}(\lim_n r_n) = T_{F_1}(k).$$

Astfel $T_{F_1}(k) = Q_{F_1, k}$. Deci (38'') are loc pentru toți $k > 0$.

Obținerea repartiției statisticii U pentru k rațional este analogă celei folosite în deducerea propoziției 2. Se folosește însă pentru obținerea statisticilor X_{1i}^* și X_{2j}^* transformarea

$$g(v) = F_1^{-1}[1 - (1 - F_1(v))^{1/b}]$$

și se ia

$$X_{1i} = \min_{1 \leq t \leq b} W_{ti} \text{ și } X_{2j} = \min_{1 \leq t \leq a} Z_{tj}$$

Atunci X_{1i} are funcția de repartiție $1 - (1 - F_1)^b$

X_{2j} are funcția de repartiție $1 - (1 - F_1)^a$.

Considerînd configurații pentru care extremitatea stîngă este mai întîi negativă și apoi pozitivă obținem

PROPOZIȚIA 3. *Au loc relațiile de recurență*

$$(39'') \quad A_{bn_1, an_2}(u) = n_1 C_{bn_1 + an_2 - 1}^{b-1} A_{b(n_1-1), an_2}(u) + n_2 C_{bn_1 + an_2 - 1}^{a-1} A_{bn_1, a(n_2-1)}(u - n_1)$$

și

$$(38''') \quad p_{n_1 n_2}(u) = \frac{n_1}{kn_2 + n_1} p_{n_1-1, n_2}(u) + \frac{kn_2}{kn_2 + n_1} p_{n_1, n_2-1}(u - n_1).$$

3.2. Caracteristici ale statisticii U

Avem

$$\begin{aligned} P(X_2 - X_1 < y) &= \iint_{x_2 - x_1 < y} dF_1(x_1) dF_2(x_2) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{y+x_1} dF_2(x_2) \right) dF_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(y + x_1) dF_1(x_1). \end{aligned}$$

Introducem notația

$$(42) \quad p = P(X_2 - X_1 < 0) = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(x) dF_1(x)$$

și definim funcțiile $g(z)$ și ξ_{lj} după cum urmează

$$(43) \quad g(z) = \begin{cases} 1, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$$

$$(44) \quad \xi_{lj} = g(x_{1l} - x_{2j}), \quad l = 1, \dots, n_1, \quad j = 1, \dots, n_2.$$

Prin urmare ξ_{lj} este egală cu unu dacă $x_{1l} > x_{2j}$; deci statistica Mann-Whitney poate fi pusă sub forma

$$(45) \quad U = \sum_{l=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \xi_{lj}.$$

Din (42) și (44) avem

$$(46) \quad M(\xi_{lj}) = M(\xi_{lj}^2) = p$$

Deoarece pentru $l \neq l_1$ și $j \neq j_1$, ξ_{lj} și ξ_{lj_1} sînt independente

$$(47) \quad M(\xi_{lj} \xi_{lj_1}) = p^2.$$

Fie

$$(48) \quad \gamma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [F_2(x) - p]^2 dF_1(x),$$

și

$$(49) \quad \delta^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [F_1(x) - (1-p)]^2 dF_2(x)$$

Dacă $j \neq j_1$ atunci

$$\xi_{lj} \xi_{lj_1} = \begin{cases} 1, & \begin{array}{l} x_{2j} - x_{1l} < 0 \\ \text{și} \\ x_{2j_1} - x_{1l} < 0 \end{array} \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Avem

$$\begin{aligned} P(X_{2j} < X_{1l}, X_{2j_1} < X_{1l}) &= P(X_{2j} - X_{1l} < 0, X_{2j_1} - X_{1l} < 0) = \\ &= \iiint_{\substack{x_2 - x_1 < 0 \\ x_2 - x_1 < 0}} dF_1(x_1) dF_2(x_2) dF_2(x_2^*) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\iint_{\substack{x_2 < x_1 \\ x_2^* < x_1}} dF_2(x_2) dF_2(x_2^*) \right)^2 dF_1(x_1) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{x_1} dF_2(x_2) \right) \left(\int_{-\infty}^{x_1} dF_2(x_2^*) \right) dF_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} [F_2(x)]^2 dF_1(x). \end{aligned}$$

Din (42) și (43) urmează că integrala din membrul drept al egalității precedente este $\gamma^2 + p^2$, de unde

$$(50) \quad M(\xi_{lj} \xi_{lj_1}) = \gamma^2 + p^2$$

Dacă $l \neq l_1$ atunci

$$\xi_{ij} \xi_{li,j} = \begin{cases} 1, & x_{2j} - x_{1l} < 0, \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Avem

$$\begin{aligned} P(X_{2j} - X_{1l} < 0, X_{2j} - X_{1l_1} < 0) &= \iiint_{\substack{x_2 - x_1 < 0 \\ x_2 - x_1 < 0}} dF_1(x_1) dF_1(x_1^*) dF_2(x_2) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\iint_{\substack{x_1 > x_2 \\ x_1 > x_2}} dF_1(x_1) dF_1(x_1^*) \right) dF_2(x_2) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\int_{x_2}^{\infty} dF_1(x_1) \right) \left(\int_{x_2}^{\infty} dF_1(x_1^*) \right) \right] dF_2(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} [1 - F_1(x)]^2 dF_2(x). \end{aligned}$$

Se observă că

$$P(X_2 - X_1 > 0) = P(X_1 - X_2 < 0) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x) dF_2(x).$$

Prin urmare

$$(51) \quad M(\xi_{ij} \xi_{li,j}) = \delta^2 + p^2.$$

Din (45), (47), (50) și (51), obținem

$$(52) \quad M(U) = n_1 n_2 p$$

$$(53) \quad M(U^2) = M\left(\sum_1^{n_1} \sum_1^{n_2} \xi_{ij}\right)^2 = n_1 n_2 [p + (n_2 - 1)(\gamma^2 + p^2) + \\ + (n_1 - 1)(\delta^2 + p^2) + (n_1 - 1)(n_2 - 1)p^2],$$

de unde

$$(54) \quad D^2(U) = n_1 n_2 [(n - 1)\delta^2 + (n_2 - 1)\gamma^2 + p(1 - p)].$$

Am demonstrat

TEOREMA 9. (van Dantzig (1951)) Media și dispersia statisticii U sînt date de (52) și respectiv (54).

Teorema s-a obținut fără să presupunem că $F_1(x) = F_2(x)$.

Observație. Dacă $F_1(x) = F_2(x)$, atunci, integrînd prin părți în (42), (48) și (49), obținem

$$p = \frac{1}{2}, \quad \gamma^2 = \frac{1}{12}.$$

Atunci din (52) și (53) avem

$$M(U) = n_1 n_2 / 2$$

$$(55) \quad D^2(U) = n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1) / 12.$$

TEOREMA 10. (Mann și Whitney (1947)). Dacă $F_1(x) = F_2(x)$, U este asimptotic repartizat $N(n_1 n_2 / 2, \sqrt{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1) / 12})$ pentru n_1 și n_2 mari.

3.3. Repartiția asimptotică a statisticii U pentru $n_2 \rightarrow \infty$

Pentru început să presupunem că $n_1 = 2$.

Fie (X_{11}, X_{12}) și $(X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n_2})$ selecții independente asupra aceleiași variabile aleatoare avînd funcția de repartiție $F(t) = t$. Altfel spus $X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n_2}$ sînt variabile aleatoare independente repartizate uniform pe $(0,1)$. Numărul de inversiuni ale valorilor x_{11} și x_{12} cu x_{2j} le notăm cu u_1 și respectiv u_2 . Deci numărul total de inversiuni este $U = u_1 + u_2$.

Să presupunem că x_{11} și x_{12} sînt fixați. Pentru x_{11} fix

$$P(X_{2j} < x_{11}) = F(x_{11}) = x_{11}.$$

Frecvența mărimilor x_{2j} este $v_1 = u_1 / n_2$. Pentru valori mari ale lui n_2 , cu probabilitate mare v_1 este aproape de $F(x_{11}) = x_{11}$. Același lucru se poate spune și pentru x_{12} și $v_2 = u_2 / n_2$. Urmează că $v_1 + v_2 = U / n_2$ este în vecinătatea lui $x_{11} + x_{12}$ cu o probabilitate foarte mare.

Vom determina funcția de repartiție a statisticii U , adică probabilitatea evenimentului $U < u$. În loc de $U < u$ putem scrie

$$v_1 + v_2 = \frac{U}{n_2} < \frac{u}{u_2} = t.$$

Deoarece cu o probabilitate foarte mare $v_1 + v_2$ este în vecinătatea lui $x_{11} + x_{12}$, este suficient să calculăm probabilitatea evenimentului $X_{11} + X_{12} < t$.

Cum variabilele aleatoare X_{11} și X_{12} sînt independente și repartizate uniform pe intervalul $(0,1)$, probabilitatea ca vectorul (X_{11}, X_{12}) să aparțină pătratului

$$0 < x_{11} < 1, 0 < x_{12} < 1$$

este egală cu unu.

Prin urmare, probabilitatea evenimentului $X_{11} + X_{12} < t$ este egală cu aria domeniului

$$0 < x_{11}, x_{12} < 1,$$

$$x_{11} + x_{12} < t$$

Notind această probabilitate prin $H(t)$, avem

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \frac{1}{2} t^2, & 0 \leq t \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{2} (2 - t)^2, & 1 \leq t \leq 2, \\ 1, & t \geq 2 \end{cases}$$

$H(t)$ are graficul dat în figura 7.

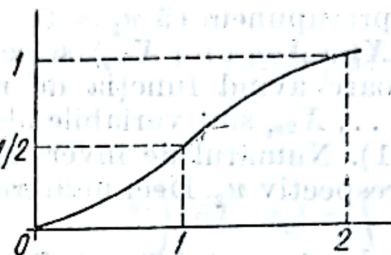


Fig. 7

Analog pentru $n_1 = 3$, probabilitatea evenimentului $X_{11} + X_{12} + X_{13} < t$ este egală cu volumul

$$0 < x_{11}, x_{12}, x_{13} < 1,$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} < t.$$

În acest caz avem

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \frac{1}{6} t^3, & 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{1}{6} t^3 - \frac{1}{2} (t - 1)^3, & 1 \leq t \leq 2, \\ 1 - \frac{1}{6} (3 - t)^3, & 2 \leq t \leq 3, \\ 1, & t \geq 3 \end{cases}$$

Atunci $H(t)$ se reprezintă grafic ca în figura 8.

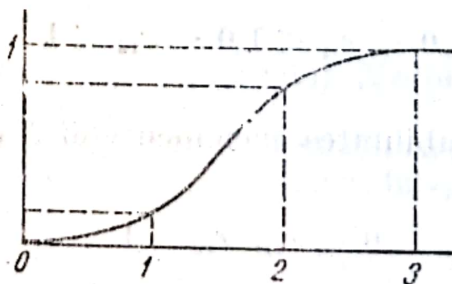


Fig. 8

Pentru $n_1 = 4$, graficul funcției $H(t)$ se apropie de graficul funcției de repartiție corespunzător unei variabile normale.

Pentru funcția $H(t)$ are loc

LEMA 1. Pentru orice n_1 întreg și pozitiv

$$H(t + \varepsilon) - H(t) \leq \varepsilon.$$

Demonstrație. În partea stângă a acestei inegalități avem

$$\iint \dots \int dx_1 \dots dx_{n_1}$$

unde integrarea se face pe domeniul

$$t \leq \sum_{j=1}^{n_1} x_{1j} < t + \varepsilon,$$

$$0 < x_{1j} < 1, 1 \leq j \leq n_1.$$

Dacă integrăm întâi după x_{1n_1} , cu $x_{11}, \dots, x_{1n_1-1}$ fixați, atunci domeniul de integrare este un interval de lungime cel mult ε ceea ce rezultă din condițiile de delimitare ale domeniului. Integrând acum după $x_{11}, \dots, x_{1n_1-1}$ pe cubul unitate, obținem cel mult ε , ceea ce demonstrează lema.

TEOREMA 11. Pentru n_1 fix și $n_2 \rightarrow \infty$, statistica U are asimptotic aceeași repartiție ca și suma a n_1 variabile aleatoare independente, avînd aceeași repartiție uniformă în intervalul $(0, n_2)$.

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$, dat. Vom arăta că probabilitatea evenimentului $v_1 + v_2 < t$ diferă de $H(t)$, pentru n_2 suficient de mare, cu cel mult 2ε . Știm că probabilitatea ca $X_{11} + X_{12}$ să difere de $v_1 + v_2$ cu mai mult de ε , pentru n_2 suficient de mare, este mai mică decît ε .

Să considerăm evenimentul $v_1 + v_2 < t$ și evenimentele complementare

$$(X_{11} + X_{12}) - (v_1 + v_2) < \varepsilon$$

și

$$(X_{11} + X_{12}) - (v_1 + v_2) \geq \varepsilon.$$

Dacă se realizează evenimentul $v_1 + v_2 < t$, atunci evenimentul

$$(X_{11} + X_{12}) - (v_1 + v_2) < \varepsilon$$

se va scrie

$$X_{11} + X_{12} < t + \varepsilon$$

Urmează că evenimentul $v_1 + v_2 < t$ este inclus în reuniunea evenimentelor

$$X_{11} + X_{12} < t + \varepsilon \text{ și } (X_{11} + X_{12}) - (v_1 + v_2) \geq \varepsilon.$$

Deci

$$\begin{aligned} P(v_1 + v_2 < t) &\leq P(X_{11} + X_{12} < t + \epsilon) + \epsilon = \\ &= H(t + \epsilon) + \epsilon \leq H(t) + 2\epsilon. \end{aligned}$$

În același mod obținem

$$\begin{aligned} P(v_1 + v_2 < t) &\geq P(X_{11} + X_{12} < \\ &< t - \epsilon) - \epsilon = H(t - \epsilon) - \epsilon \geq H(t) - 2\epsilon, \end{aligned}$$

ceea ce demonstrează teorema.

Se obține același rezultat pentru orice n_1 finit.

Observații. Media acestei sume de n_1 variabile independente repartizate uniform este

$$M\left(\sum_1^{n_1} X_{1j}\right) = \sum_1^{n_1} M(X_{1j}) = \sum_1^{n_1} \frac{n_2}{2} = \frac{n_1 n_2}{2}$$

medie ce coincide cu a lui U .

Dispersia acestei sume este $n_1 n_2 / 12$, în timp ce dispersia exactă a statisticii U este $n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1) / 12$.

Pentru $n_1 \geq 4$ repartiția sumei este foarte bine aproximată de o repartiție normală. Pentru n_1 și n_2 mici trebuie să folosim repartiția exactă.

Dacă considerăm raportul $U/n_1 n_2$, atunci

$$M\left(\frac{U}{n_1 n_2}\right) = \frac{1}{2}, \quad D^2\left(\frac{U}{n_1 n_2}\right) = \frac{n_1 + n_2 + 1}{n_1 n_2}.$$

Inegalitatea lui Cebîșev ne arată că pentru $n_1, n_2 \rightarrow \infty$, $U/n_1 n_2$ converge în probabilitate către $1/2$.

TEOREMA 12 (Lehmann (1951). *Statistica*

$$(56) \quad V = [U - M(U)]/D(U)$$

pentru $F_1(x) \neq F_2(x)$, în ipoteză că $0 < p < 1$ și $\frac{n_2}{n_1} \rightarrow s > 0$, pentru $n_1 \rightarrow \infty$, este repartizată $N(0, 1)$.

Tabelele date de Mann și Whitney precizează că dacă $F_1(x) = F_2(x)$, aproximația este suficient de bună pentru $n_1 = n_2 = 8$.

3.4. Statistica T și câteva din proprietățile sale

Wilcoxon, înainte de Mann și Whitney, consideră pentru $n_1 = n_2$ o statistică care este legată liniar de statistica U a lui Mann și Whitney și anume

$$(57) \quad T = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_1 + 1)}{2} - U,$$

fapt ce explică denumirea de testul Wilcoxon-Mann-Whitney.

Să vedem ce reprezintă statistica T și ce caracteristici posedă.

Statistica T a lui Wilcoxon adună indicii lui y_m pentru care $y_m = 1$.

Deci pentru șirul $\{y_m\}$ definit în § 3.1 valoarea t a statisticii T este

$$t = \sum_1^{n_1+n_2} m y_m.$$

Fie $i_1, \dots, i_{n_2}$ indicii celor n_2 de unu din $\{y_m\}$. Rezultă

$$t = \sum_{k=1}^{n_2} i_k,$$

$$u = \sum_{k=1}^{n_2} (n_1 + k - i_k)$$

(este așa deoarece dacă a k — a cifră unu se află pe locul i_k , numărul zerourilor care o preced este $(i_k - k)$, deci a celor ce urmează este $n_1 - (i_k - k) = n_1 + k - i_k$. Din ultima relație obținem

$$u = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2 + 1)}{2} - t.$$

Aceasta fiind valabilă pentru orice configurație de n_1 zero și n_2 unu, deci pentru toate valorile pe care le pot lua cele două statistici, pentru n_1 și n_2 fixați avem și egalitatea

$$U = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2 + 1)}{2} - T.$$

Să determinăm media și dispersia statisticii T .

Fie $F_1(x) = F_2(x)$ pentru orice x și n_1 și n_2 fixați. Se pot forma $C_{n_1+n_2}^{n_1+n_2}$ configurații egal probabile cu cele n_1 cifre de zero și n_2 de unu. Între configurațiile formate, numărul acelor care au unu pe locul m este $C_{n_1+n_2-1}^{n_1}$. Analog, numărul configurațiilor cu unu pe locurile m și k ($k \neq m$) este $C_{n_1+n_2-2}^{n_1}$.

Avem

$$M(T) = \frac{\sum t}{C_{n_1+n_2}^{n_1+n_2}}$$

suma extinzându-se asupra tuturor configurațiilor posibile.

Deci

$$\begin{aligned} M(T) &= \frac{\sum_{m=1}^{n_1+n_2} \sum_{m=1}^{n_1+n_2} m y_m}{C_{n_1+n_2}^{n_1+n_2}} = \frac{\sum_{m=1}^{n_1+n_2} m (\sum y_m)}{C_{n_1+n_2}^{n_1+n_2}} = \\ &= \frac{\sum_{m=1}^{n_1+n_2} m C_{n_1+n_2-1}^{n_1}}{C_{n_1+n_2}^{n_1+n_2}} = \frac{n_2(n_1 + n_2 + 1)}{2} \end{aligned}$$

unde $\sum y_m$ reprezintă suma cifrelor de pe locul m , sumă asupra tuturor configurațiilor posibile, adică este egal cu numărul cifrelor unu pe poziția m .

Momentul de ordinul doi este

$$\begin{aligned} M_2(T) &= \frac{\sum t^2}{C_{n_1+n_2}^{n_1}} = \frac{\sum \left(\sum_{m=1}^{n_1+n_2} m y_m \right)^2}{C_{n_1+n_2}^{n_1}} = \\ &= \frac{\sum_{m \neq k} m k (\sum y_m y_k) + \sum_{m=1}^{n_1+n_2} m^2 (\sum y_m)}{C_{n_1+n_2}^{n_1}} = \\ &= \frac{n_2(n_1 + n_2 + 1)(3n_1 n_2 + 3n_2^2 + 3n_2 + n_1)}{12}. \end{aligned}$$

Urmează că

$$D^2(T) = \frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{2}.$$

Ținând seama de legătura dintre statisticile T și U obținem (55).

Pentru comportarea asimptotică a statisticii T ne vom folosi de momentele centrate.

Momentele centrate de ordin impar sînt nule întrucît repartiția lui T este simetrică în raport cu valoarea sa medie. Într-adevăr dacă configurația care dă valoarea t are cifrele unu pe locurile $i_1, \dots, i_{n_2}$, configurația inversă (cea citită de la dreapta spre stînga) are valoarea

$$t' = \sum_{j=1}^{n_2} (n_1 + n_2 + 1 - i_j) = n_2(n_1 + n_2 + 1) - t.$$

Deci

$$t' - M(T) = M(T) - t.$$

Pentru momentele centrate de ordin par, are loc relația

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} M \left[\frac{T - M(T)}{D(T)} \right]^{2r} = 1 \cdot 3 \dots (2r - 1), \quad r \geq 1$$

ceea ce ne arată că variabila aleatoare $[T - M(T)]/D(T)$ tinde, pentru $n_1, n_2 \rightarrow \infty$, către o variabilă normală $N(0, 1)$.

3.5. Puterea testului Wilcoxon-Mann-Whitney

Fie $F_1(x)$ [$F_2(x)$] funcția de repartiție a variabilei aleatoare X_1 (X_2).

DEFINIȚIA 4. Vom spune că X_2 este stocastic mai mare ca X_1 dacă pentru orice x real astfel ca $0 < F_1(x) < 1$,

(58)

$$F_1(x) \geq F_2(x).$$



Considerăm două variabile aleatoare X_1 și X_2 și presupunem că dorim să verificăm ipoteza H_1 , conform căreia X_2 este stocastic mai mare ca X_1 . Ipoteza nulă este $H_0: F_1(x) = F_2(x)$ pentru fiecare x real.

Această ipoteză va fi verificată cu ajutorul statisticii U în felul următor: efectuăm n_i observații asupra populației i ($i = 1, 2$). Mai întâi presupunem că n_1 și n_2 nu depășesc pe 8. Din tabelele lui Mann-Whitney găsim valoarea u_α astfel că dacă ipoteza H_0 este adevărată atunci $P(U \leq u_\alpha) \leq \alpha$, unde α este pragul de semnificație. Din selecțiile obținute găsim valoarea u a statisticii U . Dacă $u \leq u_\alpha$, respingem ipoteza H_0 , deoarece faptul că numărul perechilor observate (x_{1i}, x_{2j}) pentru care $x_{2j} < x_{1i}$ este mic, ne arată că X_2 este stocastic mai mare ca X_1 .

În cazul în care n_1 și n_2 depășesc 8, calculăm valoarea v a statisticii V , dată de (56), respingînd ipoteza H_0 dacă $v \leq v_\alpha$, unde $\phi(v_\alpha) = \alpha$, iar α este pragul de semnificație. În expresia lui (56), $M(U)$ și $D^2(U)$ sînt date de (55).

Se observă că ipoteza

$$(59) \quad H_2: 0 < p < P(X_2 - X_1 < 0) < 1/2$$

este mai generală decît ipoteza H_1 , deoarece dacă inegalitatea (58) are loc pentru orice x , relația (59) este de asemenea satisfăcută.

Într-adevăr

$$p = \int_{\mathbb{R}} F_2(x) dF_1(x) < \int_{\mathbb{R}} F_1(x) dF_1(x) = \frac{1}{2}.$$

Pentru selecțiile $X_{1l} (l = 1, \dots, n_1)$, $X_{2j} (j = 1, \dots, n_2)$ asupra variabilelor X_1 și X_2 , calculăm valoarea u a statisticii U . Vom respinge ipoteza H_0 și vom accepta ipoteza alternativă H_2 dacă $u \leq u_\alpha$ satisface relația

$$(60) \quad P_{H_0}(U \leq u_\alpha) \leq \alpha.$$

În cazul selecțiilor de volum mare, vom respinge ipoteza H_0 (Lehmann) dacă valoarea observată $[u - M(U)]/D(U) \leq v_\alpha$, unde $\phi(v_\alpha) = \alpha$, iar $M(U)$ și $D^2(U)$ sînt date de (55). Dacă $u_\alpha = M(u) - c_\alpha D(u)$, atunci

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} P(U \leq u_\alpha | F_1(x) = F_2(x)) = \alpha, \quad \lim_{n_1 \rightarrow \infty} c_\alpha = -v_\alpha.$$

Astfel puterea testului considerat este dată de formula

$$(61) \quad \pi = P_{H_2} \left(\frac{U - M(U)}{D(U)} \leq v_\alpha \right).$$

Exemplul 1. Dacă $F_1(x)$ și $F_2(x)$ sînt două funcții de repartiție continue, ne propunem să verificăm ipoteza

$$H_0: F_1(x) = F_2(x)$$

față de alternativa

$$\mathcal{L}_1: F_2(x) = F_1^k(x)$$

unde k este un întreg oarecare mai mare ca unu.

Avem

$$p = \int_R F_2(x) dF_1(x) = \int_R F_1^k(x) dF_1(x) = 1/(k+1); \quad M(U) = n_1 n_2 / (k+1)$$

și

$$D^2(U) = \frac{n_1 n_2}{(k+1)^2} \left(\frac{n_1-1}{k+2} k + \frac{n_2-1}{2k+1} k^2 + 1 \right).$$

În particular dacă $k=3$, $n_1=n_2=20$, $\alpha=0,01$ obținem: $m_0 = M_{H_0}(U) = 200$, $\sigma_0^2 = D_{H_0}^2(U) = 1366,66$. Astfel respingem H_0 și acceptăm ipoteza alternativă H_1 , dacă valoarea observată u satisface inegalitatea

$$\frac{u-200}{\sqrt{1366,66}} \leq -2,33.$$

Dacă ipoteza alternativă este adevărată, atunci $M(U) = 100$, $D^2(U) = 920,7$. Din (61) găsim puterea testului.

TEOREMA 13. *Testul Wilcoxon-Mann-Whitney pentru verificarea ipotezei $H_0: F_1(x) = F_2(x)$ față de alternativa $H_1: 0 < p = P(X_2 - X_1 < 0) < 1/2$ este consistent.*

Demonstrație. Avem

$$0 \leq \gamma^2 = \int_R F_2^2(x) dF_1(x) - p^2 \leq \int_R F_2(x) dF_1(x) - p^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

$$0 \leq \delta^2 = \int_R [1 - F_1(x)]^2 dF_2(x) - p^2 \leq$$

$$\leq \int_R [1 - F_1(x)] dF_2(x) - p^2 = 1 - (1-p) - p^2 = p(1-p).$$

Urmează că

$$\begin{aligned} \frac{D^2(U)}{\sigma_0^2} &= 12 \frac{(n_1-1)\delta^2 + (n_2-1)\gamma^2 + p(1-p)}{n_1 + n_2 + 1} \leq \\ (62) \quad &\leq \frac{12p(1-p)(n_1 + n_2 - 1)}{n_1 + n_2 + 1} < 12p(1-p). \end{aligned}$$

Găsim puterea acestui test. Avem

$$\begin{aligned} 1 - \pi &= P_{H_1}(U > u_\alpha) = P_{H_1}(U > m_0 - c_\alpha \sigma_0) = \\ &= P_{H_1}\left(U > \frac{n_1 n_2}{2} - n_1 n_2 p + n_1 n_2 p - c_\alpha \sigma_0\right) = \\ (63) \quad &= P_{H_1}\left[U - n_1 n_2 p > \left(\frac{1}{2} - p\right) n_1 n_2 - c_\alpha \sigma_0\right]. \end{aligned}$$

Din (59) urmează că $\frac{1}{2} - p$ este pozitivă.

Deoarece c_α este mărginit și $n_2 = sn_1 (s > 0)$, pentru n_1 suficient de mare, avem

$$\left(\frac{1}{2} - p\right) n_1 n_2 - c_\alpha \sigma_0 = \left(\frac{1}{2} - p\right) s n_1^2 - \frac{c_\alpha}{12} n_1 \sqrt{s(2n_1 + 1)} > 0.$$

Aplicind inegalitatea lui Cebîșev la membrul drept al egalității (63) obținem

$$\begin{aligned} 1 - \pi &\leq \frac{D^2(U)}{\left[\left(\frac{1}{2} - p\right) n_1 n_2 - c_\alpha \sigma_0\right]^2} = \frac{D^2(U)}{\sigma_0^2} \left[\frac{n_1 n_2 \left(\frac{1}{2} - p\right)}{\sigma_0} - c_\alpha \right]^{-2} = \\ &= \frac{D^2(U)}{\sigma_0^2} \left[\frac{n_1 n_2 \left(\frac{1}{2} - p\right)}{\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}}} - c_\alpha \right]^{-2} = \\ &= \frac{D^2(U)}{\sigma_0^2} \left[\left(\frac{1}{2} - p\right) \sqrt{\frac{12 n_1 n_2}{n_1 + n_2 + 1}} - c_\alpha \right]^{-2}. \end{aligned}$$

Din (62) urmează expresia $D^2(U)/\sigma_0^2$ este mărginită. Avînd în vedere (59), relația $n_2 = sn_1$ și faptul că c_α este mărginit, urmează că expresia din paranteza pătrată din membrul drept al formulei anterioare tinde către infinit, cînd $n_1 \rightarrow \infty$. Deci

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} (1 - \pi) = 0.$$

Pentru $p < \frac{1}{2}$, $\lim_{n_1 \rightarrow \infty} P_{H_2}(U \leq u_\alpha) = 1$, ceea ce arată că testul Wil-

coxon-Mann-Whitney este consistent.

TEOREMA 14. (van Dantzig (1959)) *Testul Wilcoxon-Mann-Whitney, pentru verificarea ipotezei*

$$H_0 : F_1(x) = F_2(x)$$

față de alternativa

$$H' : F_1(x) \neq F_2(x), p \geq \frac{1}{2}$$

nu este consistent.

Demonstrație. Din (63) obținem

$$\pi = P_{H'}(U \leq u_\alpha) = P_{H'}\left(U - n_1 n_2 p < -\left[\left(p - \frac{1}{2}\right) n_1 n_2 + c_\alpha \sigma_0\right]\right).$$

Deoarece $p \geq \frac{1}{2}$ și c_α este pozitiv pentru $\alpha < \frac{1}{2}$ (exceptând valorile foarte mici ale lui n_1 și n_2) urmează că

$$-\left[\left(p - \frac{1}{2}\right)n_1n_2 + c_\alpha\sigma_0\right] < 0.$$

Cu observația anterioară și din inegalitatea lui Cebîșev, se obține

$$\begin{aligned}\pi &\leq \frac{D^2(U)}{\left[\left(p - \frac{1}{2}\right)n_1n_2 + c_\alpha\sigma_0\right]^2} = \\ &= \frac{D^2(U)}{\sigma_0^2} \left[\left(p - \frac{1}{2}\right)\sqrt{12n_1n_2/(n_1 + n_2 + 1)} + c_\alpha\right]^{-2}\end{aligned}$$

$D^2(U)/\sigma_0^2$ fiind mărginită iar expresia din paranteza pătrată tinzând la infinit când $n_1 \rightarrow \infty$ se obține

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} \pi = 0$$

ceea ce demonstrează teorema.

3.6. Compararea puterii testelor Wilcoxon și Student

Dacă $X_1[X_2] \sim N(\mu, 1)[N(0, 1)]$ cu $\mu > 0$, vom avea

$$F_1(t) = \Phi(t - \mu), \quad F_2(t) = \Phi(t),$$

de unde

$$\begin{aligned}p &= \int_R F_2(t) dF_1(t) = \int_R \Phi(t) d\Phi(t - \mu) = \int_R \Phi(x + \mu) d\Phi(x) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_R e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_{-\infty}^{x+\mu} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{2} \iint_{y < x+\mu} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy.\end{aligned}$$

Pentru a calcula integrala dublă facem o transformare ortogonală de coordonate

$$x + y = t\sqrt{2}$$

$$-x + y = u\sqrt{2}.$$

Obținem

$$p = \frac{1}{2} \iint_{u\sqrt{2} < \mu} e^{-\frac{1}{2}(t^2+u^2)} dt du = \Phi\left(\frac{\mu}{\sqrt{2}}\right).$$

În acest caz (48) și (49) devin

$$(64) \quad \gamma^2 = \int_R [\Phi(t + \mu) - p]^2 d\Phi(t),$$

$$(65) \quad \delta^2 = \int_R [\Phi(t - \mu) - (1 - p)]^2 d\Phi(t).$$

Prin substituția $t = -t'$, (64) poate trece în (65) și deci $\gamma^2 = \delta^2$. Înlocuind pe μ cu $-\mu$, p se înlocuiește cu $1 - p$, iar γ^2 cu δ^2 , adică rămâne el însuși, ceea ce ne arată că γ^2 este o funcție pară de μ .

Se observă că p , γ^2 și δ^2 sînt funcții mărginite în raport cu μ (γ^2 și δ^2 tind către zero cînd μ tinde către $\pm \infty$) și pentru valori mici ale lui μ , avem dezvoltările în serie de puteri

$$(66) \quad p = \frac{1}{2} + \frac{\mu}{2\sqrt{\pi}} + \dots$$

Într-adevăr

$$p = p \Big|_{\mu=0} + \frac{dp}{d\mu} \Big|_{\mu=0} \mu + \frac{d^2p}{2d\mu^2} \Big|_{\mu=0} \mu^2 + \dots$$

și cum

$$(67) \quad p = \Phi\left(\frac{\mu}{\sqrt{2}}\right), \quad p \Big|_{\mu=0} = \Phi(0) = \frac{1}{2}; \quad \frac{dp}{d\mu} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\mu^2}{4}} \Big|_{\mu=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\gamma^2 = \delta^2 = \frac{1}{12} + \dots$$

Calculăm puterea testului Wilcoxon unilateral ca funcție de μ , adică probabilitatea evenimentului $U > u_\alpha$. Notăm această funcție prin $\pi(\mu)$.

Vom compara puterea testului Wilcoxon cu cea a testului Student, testul Student fiind C.M.P. la pragul de semnificație α , în ipoteza că X_1 și X_2 au repartiții normale cu aceeași dispersie. Deoarece este vorba de un teste unilateral vom considera ipoteza $\mu > 0$. Fără a micșora generalitatea putem presupune că $n_2 \geq n_1$.

Vom distinge două cazuri:

- i) n_1 și n_2 sînt mari, de același ordin de mărime
- ii) n_2 este mare în raport cu n_1 .

În amîndouă cazurile prezintă importanță acele valori ale lui μ care sînt mici în raport cu ordinul de mărime $n_1^{-1/2}$. Dacă μ este mare în raport cu $n_1^{-1/2}$, atunci puterea atît pentru testul Wilcoxon cît și pentru testul Student sînt apropiate de unitate, ceea ce determină ca comparația să fie neinteresantă.

Acest lucru se demonstrează astfel:

Dacă $l = U - \frac{1}{2} n_1 n_2$ și $l_\alpha = U_\alpha - \frac{1}{2} n_1 n_2$, atunci media lui l este $\left(p - \frac{1}{2}\right) n_1 n_2$, deci după cum se vede din (66) de același ordin de

mărire ca $\mu n_1 n_2$. Dacă μ este mare în raport cu $n_1^{-1/2}$ atunci media lui l este mare în raport cu $n_2/\sqrt{n_1}$. Dispersia lui l este de același ordin de mărime ca $n_2/\sqrt{n_1}$ și l_α are de asemenea, ordinul de mărime $n_2/\sqrt{n_1}$. Prin urmare probabilitatea evenimentului $l > l_\alpha$ este apropiată de unu. Deci testul Student este cel puțin la fel de puternic ca testul Wilcoxon, deși puterea testului Student este de asemenea aproape unu.

Să presupunem că μ are cel mult ordinul de mărime $n_1^{-1/2}$. Prin urmare în (66) și (67) putem omite termenii având ordinul de mărime μ^2 sau n_1^{-1} , rezumându-ne la cei scriși. Obținem

$$(68) \quad M(U) \simeq \frac{1}{2} n_1 n_2 \left(1 + \frac{\mu}{2\sqrt{\pi}} \right)$$

$$(69) \quad D^2(U) \simeq \frac{1}{12} n_1 n_2 (n_1 + n_2).$$

i) Pentru a ne fixa ideile presupunem că n_1 și n_2 tind către infinit astfel încât raportul n_1/n_2 să rămână constant. Am văzut că în acest caz U este repartizată asimptotic normal cu media $n_1 n_2 p$ și dispersia dată de (54).

Asimptotic, avem

$$\begin{aligned} P(U > U_\alpha) &= 1 - P(U < U_\alpha) = \\ &= 1 - P\left(\frac{U - M(U)}{D(U)} < \frac{U_\alpha - n_1 n_2 p}{D(U)}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{U_\alpha - n_1 n_2 p}{D(U)}\right), \end{aligned}$$

de unde

$$(70) \quad \pi(\mu) \simeq \Phi\left(\frac{n_1 n_2 p - U_\alpha}{D(U)}\right).$$

Ținând seama în (70) de (68) și (69), obținem

$$\begin{aligned} \pi(\mu) &\simeq \Phi\left(\frac{\frac{1}{2} n_1 n_2 \left(1 + \frac{\mu}{\sqrt{\pi}}\right) - u_\alpha}{\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2)}{12}}}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{\frac{1}{2} n_1 n_2 \frac{\mu}{\sqrt{\pi}}}{\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2)}{12}}} - \frac{u_\alpha + \frac{1}{2} n_1 n_2}{\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2)}{12}}}\right) = \\ &= \Phi\left(\mu \sqrt{\frac{3 n_1 n_2}{\pi (n_1 + n_2)}} - \frac{2\sqrt{3} \left(u_\alpha + \frac{1}{2} n_1 n_2\right)}{\sqrt{n_1 n_2 (n_1 + n_2)}}\right) \end{aligned}$$

sau

$$(71) \quad \pi(\mu) \simeq \Phi(\tau\mu - c)$$

unde

$$(72) \quad \tau = \left(\frac{3}{\pi} \cdot \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} \right)^{1/2}$$

iar constanta depinde de U_α .

U_α a fost determinat astfel încît probabilitatea evenimentului $U > U_\alpha$ pentru $\mu = 0$ să fie cel mult α , iar asimptotic să fie chiar α .
Pentru $\mu = 0$, din (71) obținem

$$(73) \quad \Phi(-c) = \alpha.$$

Din (71), (72), (73) obținem funcția de putere asimptotică a testului. Testul Student folosește pentru compararea a două medii, statistica (XIII.18)
Avem

$$(74) \quad M(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \mu.$$

Pentru

$$(75) \quad S^2 = \frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \cdot \frac{\sum_1^{n_1} (X_{1i} - \bar{X}_1)^2 + \sum_1^{n_2} (X_{2j} - \bar{X}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$(76) \quad M(S^2) = \frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \sigma^2.$$

$\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ este repartizat normal în așa fel încît abaterea medie pătratică este de același ordin de mărime ca media μ . Vom obține asimptotic aceeași funcție de repartiție cînd înlocuim S prin media sa. Aceasta înseamnă că asimptotic repartiția lui t este aceeași cu a statisticii

$$t' = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{M(S^2)}$$

statistică repartizată $N(\mu, 1)$. Prin urmare

$$(77) \quad P(t' > c) = \Phi\left(\frac{\mu}{M(S^2)} - c\right).$$

Pentru $\mu = 0$ trebuie să avem $\Phi(-c) = \alpha$.

Dacă ținem seama în (77) de (76), obținem puterea testului Student

$$(78) \quad \pi'(\mu) \simeq \Phi(\tau'\mu - c),$$

unde

$$(79) \quad \tau' = \left(\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} \right)^{1/2}.$$

Comparația dintre (71) și (78) ne arată că puterile $\pi(\mu)$ și $\pi'(\mu)$ diferă asimptotic pentru n_1 și n_2 mari prin factorul $\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/2}$, altfel spus dacă comparăm testul Wilcoxon pentru numerele n_1 și n_2 cu testul Student pentru numerele n'_1 și n'_2 , unde $n'_1 \simeq \frac{3}{\pi} n_1$ și $n'_2 = \frac{3}{\pi} n_2$, atunci puterile lor devin asimptotic egale.

Deoarece $(3/\pi) \simeq (21/22)$ mai putem spune că testul Wilcoxon bazat pe 22 de observații este aproximativ de aceeași putere cu testul Student bazat pe 21 de observații. Deci trecând la testul Wilcoxon puterea testului se micșorează. Marele avantaj al testului Wilcoxon este acela că este utilizabil și la repartiții care nu sînt normale. În același timp, volumul de calcul este mai mic decît la testul Student. Aceste două avantaje compensează micșorarea puterii.

ii) Vom presupune că n_1 este fix. Pentru început să presupunem că $n_1 = 2$ și să fixăm pe x_{11} și x_{12} . Probabilitatea că $X_{2j} < x_{11}$ este $F_2(x_{11})$. Frecvența X_{2j} — urilor mai mici decît x_{11} este

$$v_1 = \frac{u_1}{n_2}.$$

Pentru n_2 mare, cu o probabilitate foarte mare, $v_1(v_2)$ este aproape de $F_2(x_{11})[F_2(x_{12})]$. Deci

$$v_1 + v_2 = \frac{u_1 + u_2}{n_2} = \frac{U}{n_2}$$

se apropie de

$$F_2(x_{11}) + F_2(x_{12}).$$

Urmează că asimptotic

$$P(U < u) = P\left(\frac{U}{n_2} < \frac{u}{n_2} = t\right) = P[F_2(x_{11}) + F_2(x_{12}) < t],$$

sau cu alte cuvinte funcția de repartiție a lui U/n_2 este asimptotic egală cu funcția de repartiție a unei sume de două (în general n_1) variabile independente fiecare repartizată ca și $F_2(x_{11})$, unde x_{11} este o variabilă aleatoare cu funcție de repartiție $F_1(t)$. Funcția de repartiție a lui $F_2(x_{11})$ este probabilitatea evenimentului $F_2(x_{11}) < t$, sau dacă F_2^{-1} este inversa funcției F_2 a evenimentului $x_{11} < F_2^{-1}(t)$. Deci $F_2(x_{11})$ are funcția de repartiție

$$K(t) = F_1[F_2^{-1}(t)].$$

Dacă $X_1(X_2) \sim N(\mu, 1)$ [$N(0,1)$], atunci

$$F_1(t) = \Phi(t - \mu), \quad F_2(t) = \Phi(t).$$

Fie ψ inversă funcției Φ . Atunci

$$K(t) = \Phi[\psi(t) - \mu].$$

Dacă $F_1(x) = F_2(x)$, adică dacă $\mu = 0$, atunci

$$K(t) = t,$$

ceea ce arată că $F_2(x_{11})$ va fi repartizată uniform pe intervalul $(0,1)$. Pentru μ mic, sau în general dacă F_1 nu diferă mult de F_2 , $K(t)$ nu diferă mult de o repartiție uniformă. În fiecare caz $F_2(x_{11})$ este cuprinsă între 0 și 1; prin urmare repartiția este mărginită, de asemenea și toate momentele.

Asimptotic $F_2(x_{11}) + F_2(x_{12}) + \dots + F_2(x_{1n_1})$ este repartizată normal.

Pentru n_1 convenabil ales apropierea de repartiția normală este mare. În cazul unei repartiții uniforme pentru $F_2(x_{11})$, apropierea este mare deja pentru $n_1 = 4$.

Prin urmare, repartiția variabilei

$$v_1 + v_2 + \dots + v_{n_1} = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_{n_1}}{n_2} = \frac{U}{n_2}$$

nu diferă mult de repartiția normală îndată ce $n_2 \geq 4$.

În practică, când μ nu este prea mare, este suficient să luăm $n_2 \geq 4$ și $n_1 + n_2 \geq 20$.

Testul Wilcoxon-Mann-Whitney considerat este unilateral, deoarece ipoteza alternativă este dată de

$$F_2(x) < F_1(x)$$

sau

$$0 < p = P(X_2 - X_1 < 0) < 1/2.$$

Putem considera de asemenea testul Wilcoxon-Mann-Whitney bilateral, ipoteza nulă fiind

$$H_0: F_1(x) = F_2(x)$$

iar alternativa

$$H_1: F_1(x) \neq F_2(x)$$

sau

$$H_1: p \neq \frac{1}{2}.$$

În acest caz procedăm în felul următor: pentru n_1 și n_2 mari, determinăm două numere u_1 și u_2 astfel că dacă ipoteza H_0 este adevărată, statistica U a lui Mann-Whitney satisface relația

$$P(U \leq u_1) \leq \frac{\alpha}{2}, \quad P(U \geq u_2) \leq \frac{\alpha}{2},$$

unde α este pragul de semnificație. Respingem ipoteza H_0 dacă valoarea observată u a statisticii U satisface una din relațiile $u \leq u_1$ sau $u \geq u_2$. Pentru n_1 și n_2 mari, folosim aproximația normală și respingem ipoteza H_0 dacă valoarea observată v a statisticii V dată de (56) satisface relația

$$|v| \geq v_{\alpha/2},$$

unde $v_{\alpha/2}$ este determinată din $\Phi(v_{\alpha/2}) = \alpha/2$.

§ 4. Testul χ^2

4.1. Definirea testului

Fie $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{2n_2}$ o selecție asupra variabilei aleatoare $X_1(X_2)$, fie u_1 numărul de valori x_{2j} mai mici decât x_{11} , u_2 numărul de valori x_{2j} mai mici decât x_{12} , v_1 frecvența evenimentului $x_{2j} < x_{11}$ și v_2 frecvența evenimentului $x_{2j} < x_{12}$, adică

$$v_1 = \frac{u_1}{l}, \quad v_2 = \frac{u_2}{l}.$$

Vom presupune că $X_2 \sim N(0,1)$. Dacă $X_1 \sim N(\mu, 1)$ atunci un test uniform mai puternic pentru verificarea ipotezei $H_0: \mu = 0$ constă în a respinge această ipoteză dacă

$$(80) \quad x_{11} + x_{12} > c.$$

Constanta c se alege astfel încât

$$(81) \quad P_{H_0}(X_{11} + X_{12} > c) = \alpha$$

(81) se mai poate scrie

$$P_{H_0}(X_{11} + X_{12} > c) = 1 - P_{H_0}(X_{11} + X_{12} < c) = \alpha.$$

Cum în ipoteza H_0 , $\mu = 0$, urmează că

$$M(X_{11}) = M(X_{12}) = 0$$

și ținând seama că $D^2(X_{11} + X_{12}) = 2$, putem scrie

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= P\left(\frac{X_{11} + X_{12} - M(X_{11} + X_{12})}{D(X_{11} + X_{12})} < \frac{c - M(X_{11} + X_{12})}{D(X_{11} + X_{12})}\right) = P\left(u < \frac{c}{\sqrt{2}}\right), \end{aligned}$$

sau

$$1 - \alpha = \Phi\left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right).$$

Urmează că

$$c = \sqrt{2}\psi(1 - \alpha).$$

Cu ajutorul statisticii $X_{11} + X_{12}$ se construiește testul X în felul următor :

Ținând seama că $v_i = \Phi(x_{1i})$, avem $x_{1i} = \psi(v_i)$ și regiunea critică $x_{11} + x_{12} < c$ capătă forma

$$\psi(v_1) + \psi(v_2) > c$$

sau

$$\psi\left(\frac{u_1}{l}\right) + \psi\left(\frac{u_2}{l}\right) > c.$$

În cazul în care considerăm un număr arbitrar k de valori x_{1i} , regiunea critică pentru verificarea ipotezei H_0 este dată de

$$S = \psi\left(\frac{u_1}{l}\right) + \psi\left(\frac{u_2}{l}\right) + \dots + \psi\left(\frac{u_k}{l}\right) > c.$$

Conceput sub această formă testul prezintă neajunsul că suma S poate deveni $-\infty (u_i = 0)$ sau $+\infty (u_i = l)$, în care cazuri suma S nu se poate calcula.

Pentru a înlătura acest neajuns vom modifica testul în felul următor : Scriem pe x_{1i} în ordinea mărimii lor și astfel u_i se transformă în

$$r_1 = u_1 + 1, r_2 = u_2 + 2, \dots, r_k = u_k + k$$

și, la fel l se înlocuiește cu $n + 1 = k + l + 1$. Sub această formă statistica X devine

$$X = \psi\left(\frac{r_1}{n+1}\right) + \dots + \psi\left(\frac{r_k}{n+1}\right)$$

și, deoarece numerele de ordine r_i nu pot lua decît valori între 1 și n statistica X nu poate fi niciodată $+\infty$ sau $-\infty$.

Considerăm variabilele aleatoare $x_{11}, \dots, x_{1k}$ și $x_{21}, \dots, x_{2l}$ cu $l + k = n$. Fie r_i numărul de ordine a variabilei x_{1i} și s_j a variabilei x_{2j} atunci cînd le presupunem pe acestea scrise în ordinea mărimii lor.

Fie

$$X = \sum_{r_i} \psi\left(\frac{r_i}{n+1}\right)$$

$$Y = \sum_{s_j} \psi\left(\frac{s_j}{n+1}\right).$$



Funcția $\psi(t)$ ia în intervalul $(0, 1)$ valori finite și verifică condiția

$$\psi(1-t) = -\psi(t).$$

În baza acestei condiții și ținând seama de definiția lui r_i și s_j avem întotdeauna

$$X + Y = \psi\left(\frac{1}{n+1}\right) + \psi\left(\frac{2}{n+1}\right) + \dots + \psi\left(\frac{n}{n+1}\right) = 0.$$

Schimbînd rolul lui x_1 cu x_2 variabila X trece în $-X = Y$.

Dacă schimbăm apoi și ordinea în sens descrescător, atunci $-X$ trece din nou în X .

Marginea X_α se definește astfel ca probabilitatea evenimentului

$$X > X_\alpha$$

(în ipoteza că toate cele $n!$ permutări efectuate cu $x_{11}, \dots, x_{1k}, x_{21}, \dots, x_{2l}, l+k=n$ sînt egal probabile) să fie mare și prin aceasta să fie cel mult α .

În ipoteza $H_0: x_{1i}$ și x_{2j} sînt independente și identic repartizate și deci cele spuse mai sus sînt verificate.

Testul X se aplică în cazul în care ne interesează ca x_1 să fie cel mult x_{2j} . Pragul de semnificație a acestui test nu depășește pe α .

Acceptăm ipoteza H_0 cînd suma X depășește pe X_α .

Se poate folosi și un test X bilateral. În acest caz dacă $X > X_\alpha$ se poate considera că x_1 este în general mai mare decît x_2 . La fel, dacă $Y > X_\alpha$ se poate spune că x_2 este în medie mai mare decît x_1 . Pragul de semnificație în acest test bilateral nu depășește 2α . Spunem că s-a realizat ipoteza nulă dacă X și Y depășesc pe X_α .

4.2. Valoarea medie și dispersia lui X

Dacă notăm valorile funcției ψ cu $a_1, \dots, a_n$, unde

$$a_i = \psi\left(\frac{i}{n+1}\right)$$

atunci

$$X = a_{r_1} + a_{r_2} + \dots + a_{r_k},$$

$r_1, \dots, r_k$ fiind o combinație oarecare cu k din indicii $1, 2, \dots, n$.

Am presupus că în ipoteza nulă toate aceste selecții sînt egal probabile.

Deoarece

$$P(a_r = a_1 \text{ sau } a_2 \dots \text{ sau } a_n) = 1$$

rezultă că $M(X) = 0$.

Avem

$$M(a_r^2) = \frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}$$

și

$$\begin{aligned} M(a_{r_1} a_{r_2}) &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq k} a_i a_k = \frac{1}{n(n-1)} [(\sum a_i)^2 - \sum a_i^2] = \\ &= -\frac{1}{n(n-1)} \sum a_i^2 = -\frac{M(a_r^2)}{n-1}. \end{aligned}$$

De aici urmează că

$$M(X^2) = kM(a_r^2) + k(k-1) M(a_{r_1} a_{r_2}) = \frac{k(n-k)}{n-1} M(a_r^2).$$

Din rezultatele anterioare se obține

$$\sigma^2(X) = \frac{kl}{(n-1)n} (a_1^2 + \dots + a_n^2) = \frac{kl}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \psi^2\left(\frac{i}{n+1}\right).$$

Valorile lui $M(a_r^2)$ se găsesc tabelate.

4.3. Repartiția limită a statisticii X

Fie $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1k}$ și $X_{21}, \dots, X_{2l}$ variabile aleatoare independente identic repartizate și l mare în comparație cu k .

În aceste condiții are loc

TEOREMA 15. Variabila aleatoare X urmează la limită o repartiție $N(0, \sigma(X))$.

Teorema rămâne adevărată și când $n = k + l$ tinde la infinit iar $\frac{k}{l}$ și $\frac{l}{k}$ rămân mărginite.

Pe baza acestei teoreme s-au putut construi tabele pentru testul X_α . Pentru valori mici ale lui n , X_α se determină calculând cazurile posibile.

Pentru valori mari ale lui n se folosește repartiția asimptotică.

4.4. Testul X în cazul în care anumiți x_{1i} și x_{2j} pot fi egali

În paragrafele precedente am presupus că variabilele X_1 și X_2 sînt caracterizate de funcții de repartiție continue, ceea ce a determinat în-lăturarea cazurilor $x_{1i} = x_{2j}$. În realitate însă, deoarece valorile x_{1i} și x_{2j} se consideră prin aproximație, ele au astfel o repartiție discretă.

Ce devine testul X în acest caz?

Să considerăm cazul în care au loc egalitățile $x_{11} = x_{12} = \dots = x_{1a}$ și $x_{21} = x_{22} = \dots = x_{2b}$, $a + b = c$ care ocupă locurile de ordine notate cu $r, r+1, \dots, r+c-1$.

Repartizăm $x_{11}, \dots, x_{1a}, x_{21}, \dots, x_{2b}$ în cele $c!$ moduri posibile, calculăm de fiecare dată valoarea statisticii X și apoi facem media aritmetică a valorilor obținute.

În practică însă metoda se aplică sub formă simplificată în sensul că nu se consideră cele $c!$ cazuri ci numai c cazuri. Se calculează suma

$$S_c = \psi\left(\frac{r}{n+1}\right) + \psi\left(\frac{r+1}{n+1}\right) + \dots + \psi\left(\frac{r+c-1}{n+1}\right)$$

și cu numele de ordine rămase se calculează X și Y cărora li se adaugă fracțiile

$$\frac{a}{a+b} S_c \text{ și } \frac{b}{a+b} S_c.$$

Dacă mai există și în alte locuri din șirul de valori $c' = a' + b'$ valori egale, atunci se calculează asemănător fracțiile $\frac{a}{a+b} S_{c'}$ și $\frac{b}{a+b} S_{c'}$.

Însumînd toate aceste expresii se obțin X și Y .

4.5. Comparația cu testul Student

Să presupunem că X_1 și X_2 sînt independente și $X_1[X_2] \sim N(\mu, 1)$ [$N(0, 1)$].

De asemenea presupunem k fix și $l \rightarrow \infty$. Van der Waerden studiază puterea asimptotică a testului X și compară puterea acestuia cu puterea testului Student.

Rezultatele sale se concentrează în

TEOREMA 16. Pentru k fixat și $l \rightarrow \infty$, testul X are aceeași putere cu testul Student.

Demonstrație. Probabilitatea evenimentului

$$(82) \quad \psi\left(\frac{r_1}{n+1}\right) + \psi\left(\frac{r_2}{n+1}\right) + \dots + \psi\left(\frac{r_k}{n+1}\right) > X_\alpha$$

ne dă funcția putere $\pi(\mu)$ a testului X .

Deoarece mărimile $x_{11}, \dots, x_{1k}$ sînt egal probabile, atunci putem considera $x_{11} < x_{12} < \dots < x_{1k}$ și inegalitatea devine

$$\psi\left(\frac{u_1+1}{n+1}\right) + \psi\left(\frac{u_2+2}{n+1}\right) + \dots + \psi\left(\frac{u_k+k}{n+1}\right) > X_\alpha.$$

Dacă, în această inegalitate punem

$$u_i = lv_i$$

și $n = k + l$ atunci

$$\psi\left(\frac{lv_1 + 1}{l + k + 1}\right) + \psi\left(\frac{lv_2 + 2}{l + k + 1}\right) + \dots + \psi\left(\frac{lv_k + k}{l + k + 1}\right) > X_\alpha.$$

Dacă considerăm frecvențele v_i apropiate ca valori de probabilități lor, rezultă

$$(82') \quad \sum_{i=1}^k \psi\left(\frac{l\Phi(x_{1i}) + i}{l + k + 1}\right) > X_\alpha.$$

Dacă la numărătorul și numitorul fracției neglijăm termenii care sînt mici în comparație cu l , atunci

$$\psi[\Phi(x_{1i})] = x_{1i}$$

și astfel (82) devine

$$x_{11} + \dots + x_{1k} > X_\alpha.$$

Pentru $l \rightarrow \infty$ avem

$$x_{11} + \dots + x_{1k} > \sqrt{k} \psi(1 - \alpha).$$

Aceasta generalizează (80) în cazul în care k este arbitrar.

Rezultă de aici că testul X are aceeași funcție de putere cu acest test pentru $l \rightarrow \infty$ a cărei regiune critică este determinată de

$$x_{11} + \dots + x_{1k} > \sqrt{k} \psi(1 - \alpha)$$

este

$$\pi'(\mu) = \Phi(b'\mu - c)$$

cu

$$b' = \sqrt{k}, \quad c = \psi(1 - \alpha)$$

care este aceeași cu funcția de putere a testului Student.

TESTE DE TIP KOLMOGOROV ȘI SMIRNOV

§1. Procese aleatoare

1.1. Funcții aleatoare separabile

DEFINIȚIA 1. Fie (Ω, K, P) un câmp borelian de probabilitate. Funcția de două variabile $g(\theta, \omega) = \xi(\theta)$, definită pentru orice $\theta \in \Theta$ și $\omega \in \Omega$ și cu valori în spațiul metric X , $(K, \mathfrak{B})$ măsurabilă pentru orice $\theta \in \Theta$ ($\mathfrak{B}$ este σ -algebra mulțimilor boreliene din X) se numește funcție aleatoare. Mulțimea Θ se numește domeniul de definiție al funcției aleatoare, iar X — mulțimea în care ia valori.

DEFINIȚIA 2. Două funcții aleatoare $g_1(\theta, \omega), g_2(\theta, \omega)$ ($\theta \in \Theta, \omega \in \Omega$) definite pe același câmp borelian de probabilitate (Ω, K, P) se numesc stocastic echivalente, dacă pentru orice $\theta \in \Theta$ avem

$$P\{g_1(\theta, \omega) \neq g_2(\theta, \omega)\} = 0.$$

În cele ce urmează vom presupune că Θ și X sînt spații metrice cu metricele $r(\theta_1, \theta_2)$ respectiv $\rho(x_1, x_2)$ iar Θ o mulțime separabilă.

DEFINIȚIA 3. Funcția aleatoare $g(\theta, \omega)$ se numește separabilă, dacă există o mulțime numărabilă de puncte din Θ , densă în Θ (fie ea $\{\theta_j\}$, $j = 1, 2, \dots$), iar în Ω există o mulțime N de probabilitate zero, astfel că pentru orice mulțime deschisă $G \subset \Theta$ și orice mulțime închisă $F \subset X$, mulțimile

$$A = \{\omega; g(\theta_j, \omega) \in F, \theta_j \in \Theta\} \text{ și } B = \{\omega; g(\theta, \omega) \in F, \theta \in \Theta\}$$

să difere una de alta numai pe submulțimea $N \subset \Omega$.

Observație. A este o intersecție numărabilă de mulțimi măsurabile, ea însăși fiind măsurabilă. Rezultă de aici că în cazul unui proces separabil și mulțimea B este măsurabilă.

DEFINIȚIA 4. Mulțimea numărabilă $\{\theta_j\}$ se numește mulțime de separabilitate.

TEOREMA 1. Fie X și Θ două spații metrice, X o mulțime compactă iar Θ separabilă.

Pentru orice funcție aleatoare $g(\theta, \omega)$ dată pe Θ cu valori în X , există o funcție aleatoare separabilă stocastic echivalentă cu ea.

Demonstrație. Fie $\tilde{g}(\theta, \omega)$ o funcție aleatoare separabilă și I mulțimea de separabilitate. Însemnăm cu V mulțimea sferelor deschise ale

spațiului cu raza rațională și cu centrul într-un punct din I . Mulțimea V este numărabilă. Pe de altă parte, orice mulțime deschisă $G \subset \Theta$ este reuniunea unei mulțimi cel mult numărabilă de sfere din V . Fie $A(G, \omega)$ închiderea mulțimii valorilor funcției $\tilde{g}(\theta, \omega)$ când parcurge mulțimea $I \cap G$, iar $A(\theta, \omega) = \bigcap A(S, \omega)$ unde intersecția se ia după toate sferele $S \in V$ pentru care $\theta \in S$. Familia de mulțimi închise $A(G, \omega)$ ($\theta \in G$) este cu intersecție nevidă (adică intersecția oricărui număr finit de mulțimi din această familie este nevidă) și deci, din faptul că X este compact, rezultă că și $A(\theta, \omega)$ este nevidă. În virtutea separabilității funcției $\tilde{g}(\theta, \omega)$ urmează că

$$(1) \quad \tilde{g}(\theta, \omega) \in A(\theta, \omega).$$

Invers, dacă (1) are loc pentru fiecare $\omega \notin N$, $P(N) = 0$, atunci $\tilde{g}(\theta, \omega)$ este o funcție aleatoare separabilă.

Într-adevăr, dacă $\tilde{g}(\theta, \omega) \in F$ pentru toți $\theta \in I \cap S$, unde F este o mulțime închisă din X și $S \in V$, atunci

$$A(\theta, \omega) \subset A(S, \omega) \subset F$$

pentru fiecare $\theta \in S$ și prin urmare $\tilde{g}(\theta, \omega) \in F$ pentru orice $\theta \in S$. Dacă G este mulțime deschisă din Θ , atunci este suficient să o scriem sub forma $G = \bigcup_k S_k$, $S_k \in V$ pentru a trage concluzia că din $\tilde{g}(\theta, \omega) \in F$ pentru orice $\theta \in I \cap G$, $\omega \notin N$ urmează $\tilde{g}(\theta, \omega) \in F$ pentru orice $\theta \in G$. Putem astfel enunța:

LEMA 1. Pentru ca funcția aleatoare $\tilde{g}(\theta, \omega)$ să fie separabilă este necesar și suficient ca să existe $N \subset \Omega$, $P(N) = 0$ astfel ca pentru orice $\omega \notin N$ să aibă loc relația (1).

LEMA 2. Fie B o mulțime boreliană arbitrară din X . Există o mulțime cel mult numărabilă $\theta_1, \theta_2, \dots$, de puncte din Θ astfel ca mulțimea

$$N(\theta, B) = \{\omega : g(\theta_k, \omega) \in B, k = 1, 2, \dots, g(\theta, \omega) \notin B\}$$

să aibă probabilitatea zero oricare ar fi $\theta \in \Theta$.

Demonstrație. Fie θ_1 oarecare. Dacă am găsit pe $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ vom pune

$$m_k = \sup_{\theta \in \Theta} P\{g(\theta_1, \omega) \in B, \dots, g(\theta_k, \omega) \in B; g(\theta, \omega) \notin B\}.$$

Șirul m_k este monoton crescător. Dacă $m_k = 0$, atunci lema este demonstrată. Dacă $m_k > 0$ atunci fie θ_{k+1} un punct astfel că

$$P\{g(\theta_1, \omega) \in B, \dots, g(\theta_k, \omega) \in B, g(\theta_{k+1}, \omega) \notin B\} \geq \frac{m_k}{2}.$$

Deoarece mulțimile

$$L_k = \{\omega : g(\theta_i, \omega) \in B, i=1, 2, \dots, k, g(\theta_{k+1}, \omega) \notin B\}$$

nu au puncte comune, atunci

$$1 \geq \sum P(L_k) \geq \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} m_k.$$

Prin urmare $m_k \rightarrow 0$ pentru $k \rightarrow \infty$. În acest fel pentru orice θ

$$P\{g(\theta_k, \omega) \in B, k = 1, 2, \dots, g(\theta, \omega) \notin B\} \leq \lim m_k = 0,$$

ceea ce demonstrează lema.

LEMA 3. Fie $\mathfrak{M}_0$ o familie numărabilă de mulțimi, iar $\mathfrak{M}$ familia care constă din toate intersecțiile posibile numărabile de mulțimi din $\mathfrak{M}_0$. Există o mulțime cel mult numărabilă $\theta_1, \theta_2, \dots$, și pentru orice θ o mulțime $N(\theta)$ astfel că $P\{N(\theta)\} = 0$ și

$$\{\omega : g(\theta_n, \omega) \in B, n = 1, 2, \dots, g(\theta, \omega) \notin B\} \subset N$$

pentru orice $B \in \mathfrak{M}$.

Demonstrație. Fie I reuniunea tuturor șirurilor $\{\theta_n, n = 1, 2, \dots\}$ construite pentru fiecare $N \in \mathfrak{M}_0$ în conformitate cu lema 2 și

$$N(\theta) = \bigcup_{B \in \mathfrak{M}_0} N(\theta, B).$$

Dacă $B' \in \mathfrak{M}$ și $B \supset B'$, $B \in \mathfrak{M}_0$ atunci

$$\{\omega : g(\theta_n, \omega) \in B', \theta_n \in I, g(\theta, \omega) \notin B\} \subset$$

$$\subset \{\omega : g(\theta_n, \omega) \in B, \theta_n \in I, g(\theta, \omega) \notin B\} \subset N(\theta, B) \subset N(\theta).$$

În afară de aceasta, dacă $B'' = \bigcap_1^{\infty} B_k$, $B_k \in \mathfrak{M}_0$ atunci

$$\{\omega : g(\theta_n, \omega) \in B', \theta_n \in I, g(\theta, \omega) \notin B'\} \subset$$

$$\subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\omega : g(\theta_n, \omega) \in B', \theta_n \in I, g(\theta, \omega) \notin B_k\} \subset \bigcup_1^{\infty} N(\theta, B_k) \subset N(\theta),$$

ceea ce demonstrează lema.

Demonstrația teoremei 1.

Considerăm o mulțime numărabilă L , densă în X . Notăm cu $\mathfrak{M}_0$ familia complementarelor sferelor cu rază rațională și cu centrele în puncte din L . Atunci $\mathfrak{M}$ — familia intersecțiilor de mulțimi din $\mathfrak{M}_0$ conține toate mulțimile închise. Pentru fiecare $S \in V$ considerăm funcția aleatoare $g(\theta, \omega)$ ca dată numai pentru $\theta \in S$ și construim șirul $I = I(S)$ și mulțimile $N(\theta) = N_*(\theta)$ în conformitate cu lema 3. Fie $J = \bigcup_{S \in V} I(S)$, $N_0 = \bigcup_{S \in V} N_*(\theta)$.

Punem $\tilde{g}(\theta, \omega) = g(\theta, \omega)$ dacă $\theta \in J$ sau $g(\theta, \omega) \notin N_\theta$, iar dacă $g(\theta, \omega) \in N_\theta$, $\theta \in J$, atunci definim $\tilde{g}(\theta, \omega)$ astfel ca $\tilde{g}(\theta, \omega) \in A(\theta, \omega)$. Deoarece pentru $\theta \in J$ valorile funcțiilor $\tilde{g}(\theta, \omega)$ și $g(\theta, \omega)$ coincid, rezultă că mulțimile $A(\theta, \omega)$, construite pentru funcțiile $\tilde{g}(\theta, \omega)$ și $g(\theta, \omega)$, de asemenea vor coincide. Din definiția lui $\tilde{g}(\theta, \omega)$ urmează că $\tilde{g}(\theta, \omega) \in A(\theta, \omega)$ pentru orice θ și ω . Deoarece

$$\{\omega : g(\theta, \omega) \neq \tilde{g}(\theta, \omega)\} \subset N_\theta$$

rezultă că

$$P\{\tilde{g}(\theta, \omega) = g(\theta, \omega)\} = 1$$

și după lema 1 teorema este demonstrată.

DEFINIȚIA 5. Funcția aleatoare $g(\theta, \omega)$ cu valori în X se numește stocastic continuă în punctul θ_0 , $\theta_0 \in \Theta$ dacă

$$P\{\rho(g(\theta_0, \omega), g(\theta, \omega)) > \varepsilon\} \rightarrow 0 \text{ cînd } r(\theta, \theta_0) \rightarrow 0$$

Dacă $g(\theta, \omega)$ este stocastic continuă în fiecare punct al unei mulțimi $B \subset \Theta$, atunci ea se numește stocastic continuă pe B .

TEOREMA 2. Fie Θ un spațiu separabil și $g(\theta, \omega)$ o funcție aleatoare separabilă, stocastic continuă. Atunci orice mulțime numărabilă de puncte din Θ , densă în Θ poate fi luată ca mulțime de separabilitate a funcției aleatoare $g(\theta, \omega)$.

Demonstrație. Fie $V = \{S\}$ mulțimea numărabilă de sfere din Θ considerată la demonstrația teoremei 1, $J = \{\theta_k, k = 1, 2, \dots, n, \dots\}$ mulțimea de separabilitate a funcției aleatoare $g(\theta, \omega)$ și Λ o mulțime numărabilă densă în Θ . Fie $B(S, \omega)$ închiderea mulțimii valorilor funcției $g(\gamma_k, \omega)$ cînd γ_k parcurge $\Lambda \cap S$, iar $N(S, k)$ — evenimentul care constă în aceea că $g(\theta_k, \omega) \notin B(S, \omega)$, dacă $\theta_k \in S$. Evenimentele $N(S, k)$ au probabilitatea zero. Într-adevăr, fie $\gamma_r, r = 1, 2, \dots$ un șir arbitrar de puncte din $\Lambda \cap S$, care tinde către θ_k . Atunci

$$P\{g(\theta_k, \omega) \notin B(S, \omega)\} \leq P\{\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(g(\theta, \omega), g(\gamma_r, \omega)) > 0\} \leq$$

$$\leq \lim_{r \rightarrow \infty} P\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(g(\theta_k, \omega), g(\gamma_r, \omega)) > \frac{1}{n}\right\} = 0.$$

Fie $N' = \bigcup_S \bigcap_{\theta_k \in S} N(S, k)$, atunci $P(N') = 0$. Dacă $\omega \notin N \cup N'$ și $g(\gamma, \omega) \in F$ pentru toți $\gamma \in \Lambda \cap G$, unde G este o mulțime deschisă oarecare, iar $F \subset X$ este închisă, atunci pentru fiecare $\theta_k \in G$ și S astfel ca $\theta_k \in S \subset G$, avem: $g(\theta_k, \omega) \in B(S, \omega) \subset F$. Din definiția mulțimii $\{\theta_k\}$ urmează că $g(\theta, \omega) \in F$ pentru toți $\theta \in G$ și $\omega \notin N' \cup N$. În acest fel, mulțimea Λ îndeplinește condițiile din definiția mulțimii de separabilitate.

1.2. Funcții aleatoare continue

Fie $\xi(t), t \in L = [a, b]$ un proces aleator cu valori într-un spațiu metric complex X .

DEFINIȚIA 6. Dacă cu probabilitatea 1 funcția $\xi(t)$, pentru fiecare $t \in (a, b)$, are limite la stînga și la dreapta, iar în punctul $a(b)$ are limită la dreapta (stînga), atunci se zice că procesul nu are discontinuități de speța a doua.

Funcția $y = f(t)$, $y \in X$ are pe segmentul $[a, b]$ cel puțin m ε -oscilații ($\varepsilon > 0$), dacă există punctele $t_0, t_1, \dots, t_m$, $a \leq t_0 < t_1 < \dots < t_m \leq b$, astfel ca $\rho(f(t_{k-1}), f(t_k)) > \varepsilon$, $k = 1, 2, \dots, m$.

LEMA 4. Pentru ca funcția $y = f(t)$ să nu aibă pe $[a, b]$ discontinuități de speța a doua, este necesar și suficient ca pentru fiecare $\varepsilon > 0$ să aibă numai un număr finit de ε -oscilații pe $[a, b]$.

Demonstrație. Suficiența. Vom arăta existența limitei $f(t-0)$ pentru orice $t \in (a, b]$. Fie t_n un șir arbitrar astfel ca $t_n \nearrow t$. Pot exista numai un număr finit de puncte t_{n_k} ($n_k < n_{k+1}$) astfel ca $\rho(f(t_{n_k}), f(t_{n_{k+1}})) > \varepsilon$. Prin urmare începînd cu un oarecare m ,

$$\rho(f(t_n), f(t_{n+k})) \leq \varepsilon \quad \text{pentru toți } n \geq m, k > 0,$$

adică șirul $f(t_n)$ este convergent. Analog se demonstrează existența limitei $f(t+0)$ pe (a, b) .

Necesitatea. Presupunem că în t_0 nu avem una din limitele laterale (de exemplu limita la stînga). Atunci există un șir $t_n \nearrow t_0$ astfel ca pentru orice n ,

$$\sup_{m > n} \rho(f(t_m), f(t_n)) > \varepsilon,$$

adică numărul de ε -oscilații este infinit.

Observație. Să presupunem că $\xi(t)$ este un proces separabil și fie J mulțimea de separabilitate. Datorită faptului că mulțimile

$$\{\omega : \rho(\xi(t), \xi(t_0)) \leq \varepsilon, |t - t_0| < \eta\}$$

și

$$\{\omega : \rho(\xi(t), \xi(t_0)) \leq \varepsilon, |t - t_0| < \eta, l \in J\}$$

diferă una de alta numai pe o mulțime de probabilitate zero, rezultă că procesul va avea limite laterale în orice punct t , dacă și numai dacă va avea limite laterale în fiecare punct $t \in J$. Prin urmare pentru a arăta că un proces nu are discontinuitate de speța a doua, este suficient să arătăm că are numai un număr finit de ε -oscilații pe mulțimea J .

TEOREMA 3. Fie un proces aleator $\xi(t)$, $t \in [a, b]$ cu valori în X , îndeplinind condițiile :

a) există numerele p, q, r și C ($p \geq 0, q \geq 0, r \geq 0, C \geq 0$) astfel ca pentru orice t_1, t_2, t_3 , $a \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq b$ să aibă loc inegalitatea

$$(2) \quad M \rho^p[\xi(t_1), \xi(t_2)] \rho^q[\xi(t_2), \xi(t_3)] \leq C |t_3 - t_1|^{1+r}$$

b) procesul $\xi(t)$ este stocastic continuu pe $[a, b]$.

Atunci $\xi(t)$ nu are discontinuități de speța a doua.

Demonstrație. Din (2) și din inegalitatea lui Cebîșev urmează că

$$(3) \quad P\{\rho[\xi(t_1), \xi(t_2)] > \varepsilon_1\} \cap \{\rho[\xi(t_2), \xi(t_3)] > \varepsilon_2\} \leq \\ \leq M \frac{\rho^p[\xi(t_1), \xi(t_2)]}{\varepsilon_1^p} \cdot \frac{\rho^q[\xi(t_2), \xi(t_3)]}{\varepsilon_2^q} \leq \frac{C|t_3 - t_1|^{1+r}}{\varepsilon_1^p \varepsilon_2^q}.$$

În cursul demonstrației vom folosi numai inegalitatea (3) în locul inegalității (2). Din b) rezultă că în rolul mulțimii de separabilitate putem lua orice mulțime numărabilă densă în $[a, b]$. Vom considera deci că această mulțime este mulțimea J a numerelor raționale. Pentru simplificare vom considera $[a, b] = [0, 1]$. Demonstrația are mai multe etape.

1. Fie $A_{k,n}$ evenimentul $\left\{ \rho\left[\xi\left(\frac{k-1}{2^n}\right), \xi\left(\frac{k}{2^n}\right)\right] < \varepsilon_n \right\}$,

unde

$$\varepsilon_n = C^{\frac{1}{p+q}} \left(\frac{1}{2}\right)^{r(n-1)/2(p+q)} = L\alpha^n$$

$$L = (2^{r/2}C)^{\frac{1}{p+q}}, \quad \alpha = 2^{-r/2(p+q)} < 1$$

și

$$B_{k,n} = A_{k,n} \cup A_{k+1,n} = \left\{ \rho\left[\xi\left(\frac{k-1}{2^n}\right), \xi\left(\frac{k}{2^n}\right)\right] < \varepsilon_n \right\} \cup \\ \cup \left\{ \rho\left[\xi\left(\frac{k}{2^n}\right), \xi\left(\frac{k+1}{2^n}\right)\right] < \varepsilon_n \right\}.$$

Din inegalitatea (3) urmează că

$$P(\bar{B}_{k,n}) \leq 2^{-(1+\frac{r}{2})(n-1)}, \quad k = 1, 2, \dots, 2^n - 1.$$

Dacă punem $D_n = \bigcap_{m=n}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{2^m-1} \bar{B}_{k,m}$, atunci,

$$P(\bar{D}_n) \leq \sum_{m=n}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^m-1} P(\bar{B}_{k,m}) \leq \sum_{m=n}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^m-1} 2^{-(1+\frac{r}{2})(m-1)}$$

sau

$$P(\bar{D}_n) \leq 2 \sum_{m=n}^{\infty} 2^{-\frac{r}{2}(m-1)} = \frac{2\beta^{n-1}}{1-\beta}, \quad \beta = 2^{-\frac{r}{2}} < 1.$$

De aici urmează că dacă notăm $D = \bigcup_1^{\infty} D_n$ avem

$$P(D) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(D_n) = 1.$$

2. Fixăm pe k, m, n și punem

$$\rho_{i,m} = \rho \left[\xi \left(\frac{k}{2^n} \right), \xi \left(\frac{k}{2^n} + \frac{i}{2^{m+n}} \right) \right], \quad \omega_m = \max_{0 \leq i \leq 2^m} \rho_{i,m} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\rho'_{i,m} = \rho \left[\xi \left(\frac{k}{2^n} + \frac{i}{2^{m+n}} \right), \xi \left(\frac{k+1}{2^n} \right) \right], \quad \omega'_m = \max_{0 \leq i \leq 2^m} \rho'_{i,m}$$

Considerăm o funcție $\xi(t)$ pentru care se îndeplinește evenimentul $A_{k,n} \cap D_{n+1}$. Atunci

$$\rho'_{0,1} = \rho_{2,1} = \rho_{1,0} = \rho \left[\xi \left(\frac{k}{2^n} \right), \xi \left(\frac{k+1}{2^n} \right) \right] \leq L\alpha^n < L(\alpha^n + \alpha^{n+1}).$$

Din definiția evenimentului D_{n+1} , cel puțin una din valorile

$$\rho \left[\xi \left(\frac{k}{2^n} \right), \xi \left(\frac{k}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \right) \right], \quad \rho \left[\xi \left(\frac{k}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \right), \xi \left(\frac{k+1}{2^n} \right) \right]$$

va fi mai mică decât $L\alpha^{n+1}$. Dacă aceasta are loc pentru prima dintre ele, atunci $\rho_{1,1} \leq L\alpha^{n+1}$ și cu atât mai mult

$$\rho_{1,1} \leq L(\alpha^n + \alpha^{n+1}).$$

Pe de altă parte

$$\rho'_{1,1} = \rho \left[\xi \left(\frac{k}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \right), \xi \left(\frac{k+1}{2^n} \right) \right] \leq \rho'_{0,0} + \rho'_{1,1} \leq L(\alpha^n + \alpha^{n+1}).$$

În celălalt caz demonstrația se face la fel schimbînd rolul lui $\rho_{1,1}$ cu $\rho'_{1,1}$. În ambele cazuri

$$\omega_1 \leq L(\alpha^n + \alpha^{n+1}), \quad \omega'_1 \leq L(\alpha^n + \alpha^{n+1}).$$

Prin inducție se poate stabili că

$$\omega_m \leq L(\alpha^n + \alpha^{n+1} + \dots + \alpha^{n+m}) \leq \frac{L\alpha^n}{1 - \alpha},$$

$$\omega'_m \leq L(\alpha^n + \alpha^{n+1} + \dots + \alpha^{n+m}) \leq \frac{L\alpha^n}{1 - \alpha}.$$

3. Se arată că dacă pentru funcția $\xi(t)$ se realizează evenimentul D_n , atunci pentru orice m se poate găsi un număr $j_{m,n}$ astfel ca

$$\max_{0 < j < j_{m,n}} \rho \left[\xi \left(\frac{k-1}{2^n} \right), \xi \left(\frac{k-1}{2^n} + \frac{j}{2^{m+n}} \right) \right] \leq \frac{L\alpha^n}{(1 - \alpha)^2}$$

și

$$\max_{j_{m,n}+1 \leq j \leq 2^{m+n}} \rho \left[\xi \left(\frac{k-1}{2^n} + \frac{j}{2^{m+n}} \right), \xi \left(\frac{k+1}{2^n} \right) \right] \leq \frac{L\alpha^n}{(1 - \alpha)^2}.$$

4. Presupunem că se realizează evenimentul D . Atunci pentru orice funcție a procesului există n_0 astfel încât să se realizeze toate evenimentele D_n dacă $n \geq n_0$. Pentru orice $\varepsilon > 0$ alegem un n astfel ca

$$\frac{2L\alpha^n}{(1-\alpha)^2} < \varepsilon.$$

Pentru orice mulțime

$$J \cap \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right]$$

nu poate exista mai mult de o singură ε -oscilație. Într-adevăr, dacă ar exista trei puncte t_0, t_1, t_2 , $2^n t_0 = k-1 + \frac{j}{2^m}$,

$$2^n t_1 = k-1 + \frac{j_1}{2^m}, \quad 2^n t_2 = k-1 + \frac{j_2}{2^m}, \quad 0 \leq j_0 < j_1 < j_2 < 2^{m+1}$$

în care

$$\rho(\xi(t_1), \xi(t_0)) > \varepsilon, \quad \rho(\xi(t_2), \xi(t_1)) > \varepsilon,$$

atunci cel puțin două din numerele j_0, j_1, j_2 ar fi de aceeași parte a lui $J_{m,n}$ (conform cu punctul 3).

Fie, de exemplu, $t_1 \leq J_{m,n}$, atunci $\rho(\xi(t_1), \xi(t_0)) > \varepsilon$ contrazice inegalitatea

$$\rho(\xi(t_1), \xi(t_0)) \leq \rho\left(\xi(t_0), \xi\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right) + \rho\left(\xi\left(\frac{k-1}{2^n}\right), \xi(t_1)\right) \leq \frac{L\alpha}{(1-\alpha)^2} < \varepsilon.$$

Astfel pe mulțimea $J \cap \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right]$ nu există mai mult de o singură ε -oscilație. De aici rezultă că $\xi(t)$ pe J nu are mai mult de 2^n ε -oscilații. Lema este demonstrată.

Observație. Dacă procesul $\xi(t)$ este separabil, atunci cu probabilitatea 1, valorile funcției $\xi(t)$ vor fi limitele valorilor unui șir $\xi(t_i)$ cu $t_i \rightarrow t$ și t_i în mulțimea de separabilitate. Într-adevăr fie $\xi(t_0, \omega)$ o valoare a funcției $\xi(t_0)$ ($t_0 \notin J$, $\omega \in N$), $S\left(\frac{1}{n}\right)$ sfera deschisă de rază $\frac{1}{n}$ și centrul $\xi(t_0, \omega)$, η_n un șir ce tinde la zero.

Există $t_n \in J$ astfel ca

$$|t_n - t_0| > \eta_n \text{ și } \xi(t_n, \omega) \in S\left(\frac{1}{n}\right),$$

pentru că dacă n-ar exista ar însemna că

$$\xi(t, \omega) \in OS\left(\frac{1}{n}\right), \quad (\forall) t \in J, \quad |t - t_0| < \eta_n$$

și deci

$$\xi(t, \omega) \in CS \left(\frac{1}{n} \right), (\forall) t, |t - t_0| < \eta_n,$$

ceea ce contrazice faptul că $\xi(t_0, \omega) \in S \left(\frac{1}{n} \right)$. Urmează că $t_n \rightarrow t_0$ și

$$\xi(t_n, \omega) \rightarrow \xi(t_0, \omega).$$

Dacă $t_0 \in J$ atunci $\xi(t, \omega) \rightarrow \xi(t_0, \omega)$. Astfel afirmația este demonstrată pentru orice t_0 .

Dacă în plus procesul $\xi(t)$ este stocastic continuu, și folosind teorema 2 rezultă că pentru orice t și ω găsim un șir $t_i \rightarrow t$, $t_i \neq t$ astfel ca $\xi(t_i, \omega) \rightarrow \xi(t, \omega)$. Prin urmare în cazul unui proces separabil, stocastic continuu și fără discontinuități de speța a doua va rezulta că, în fiecare punct ω , $\xi(t)$ va fi egal cu $\xi(t-0)$ sau cu $\xi(t+0)$.

Procesul $\xi(t)$, $t \in [a, b]$ se numește continuu, dacă cu probabilitatea 1 funcțiile $\xi(t)$ sînt continue pentru orice $t \in [a, b]$.

TEOREMA 4. Fie $\{t_{n,k}\}$, $k = 0, 1, \dots, m_n$, $n = 1, 2, \dots$ un șir de diviziuni ale intervalului $[a, b]$,

$$a = t_{n,0} < t_{n,1} < \dots < t_{n,m_n} = b$$

și

$$\lambda_n = \max_{1 \leq k \leq m_n} (t_{n,k} - t_{n,k-1}) \rightarrow 0 \text{ pentru } n \rightarrow \infty.$$

Dacă procesul $\xi(t)$ este separabil și nu are discontinuități de speța a doua atunci condiția

$$\sum_{k=1}^{m_n} P\{\rho[\xi(t_{n,k}), \xi(t_{n,k-1})] > \varepsilon\} \rightarrow 0$$

pentru $n \rightarrow \infty$, pentru orice $\varepsilon > 0$ este suficientă pentru ca procesul $\xi(t)$ să fie continuu.

Demonstrație. Dacă procesul $\xi(t)$ îndeplinește condiția din teoremă, atunci el va fi stocastic continuu, și deoarece procesul nu are discontinuități de speța a doua va avea cel mult o mulțime numărabilă de discontinuități de speța întâi. Însemnăm cu $\nu_k (0 \leq \nu_k \leq \infty)$ numărul de valori t pentru care

$$\rho[\xi(t+0), \xi(t-0)] < \xi \varepsilon$$

și cu $\nu_\varepsilon^{(n)}$ numărul de indici k pentru care

$$\rho[\xi(t_{n,k}), \xi(t_{n,k-1})] > \varepsilon.$$

Avem $\nu_\varepsilon \leq \liminf \nu_\varepsilon^{(n)}$. Pe de altă parte

$$\nu_\varepsilon^{(n)} = \sum_{k=1}^{m_n} P\{\rho[\xi(t_{n,k}), \xi(t_{n,k-1})] > \varepsilon\}.$$

După lema lui Fatou

$$v_\varepsilon \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_\varepsilon^{(n)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_\varepsilon^{(n)}$$

și cum $v_\varepsilon^{(n)} \rightarrow 0$ rezultă că $v_\varepsilon = 0$ și deci, cu probabilitatea 1, $v_\varepsilon = 0$ pentru orice t , $\xi(t-0) = \xi(t+0)$. Ținând seama de observația de mai sus, rezultă că procesul este continuu.

TEOREMA 5. (Sluțki). Presupunem că există constantele C , r și β astfel că pentru orice $\varepsilon > 0$ și orice t_1, t_2 să avem

$$P\{\rho^\beta(\xi(t_1), \xi(t_2)) > \varepsilon\} \leq \frac{C |t_2 - t_1|^{1+r}}{\varepsilon^\beta}$$

Dacă procesul $\xi(t)$ este separabil, atunci el este continuu.

Demonstrație. Condiția din enunț este condiția (2) din teorema 3. ($q = 0$, $p = \beta$). În afară de aceasta condiția din enunț ne arată că procesul $\xi(t)$ este stocastic continuu. În virtutea teoremei 3 procesul nu va avea discontinuități de speța a doua. Dacă $\{t_{n,k}\}$, $k = 0, 1, \dots, m_n$; $n = 1, 2, \dots$ este un șir de diviziuni ale segmentului $[a, b]$ atunci

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m_n} P\{\rho[\xi(t_{n,k}), \xi(t_{n,k-1})] > \varepsilon\} &\leq \sum_{k=1}^{m_n} \frac{C |t_{n,k} - t_{n,k-1}|}{\varepsilon^\beta} \leq \\ &\leq \frac{C(b-a)}{\varepsilon^\beta} \max_{1 \leq k \leq m_n} |t_{n,k} - t_{n,k-1}|^r \rightarrow 0, \end{aligned}$$

pentru $\lambda_n = \max_{1 \leq k \leq m_n} |t_{n,k} - t_{n,k-1}| \rightarrow 0$. Din teorema 4 va rezulta că procesul este continuu.

1.3. Procese browniene

În acest paragraf vom presupune că procesele $\xi(t)$ sînt definite pe un segment $[a, b]$ și cu valori reale.

DEFINIȚIA 7. Vom spune că procesul $\xi(t)$ este cu creșteri independente dacă pentru orice $t_0 < t_1 < \dots < t_k$ din $[a, b]$, procesele $\xi(t_0)$, $\xi(t_1) - \xi(t_0)$, $\dots$, $\xi(t_k) - \xi(t_{k-1})$ sînt independente.

DEFINIȚIA 8. Vom spune că procesul $\xi(t)$ este un proces gaussian dacă pentru orice $t_1, t_2, \dots, t_r$ și orice r , repartiția r -dimensională a vectorului $(\xi(t_1), \dots, \xi(t_r))$ este o repartiție normală r -dimensională.

DEFINIȚIA 9. Vom spune că procesul $w(t)$ este un proces brownian dacă $w(t)$ este un proces gaussian, cu creșteri independente și separabil pentru care $Mw(t) = 0$, $D^2 w(t) = t$.

În cele ce urmează vom presupune că $w(t)$ este definit pe segmentul $[0, T]$. Se observă că pentru un astfel de proces variabila $w(t+h) - w(t)$ va avea o repartiție $N(0, h)$, $h = \sigma^2$.

Observație. Dacă $w(t)$ este un proces brownian, atunci variabilele $w(t_1)$ și $w(t_2) - w(t_1)$ sînt independente pentru $t_1 < t_2$. Deci pentru $t_1 \leq t_2$ avem

$$Mw(t_1) [w(t_2) - w(t_1)] = 0$$

și deci $Mw(t_1)w(t_2) = Mw^2(t_1)$. Va rezulta că $M(w(t_2) - w(t_1))^2 = Mw^2(t_1)$ și prin urmare

$$M(w(t_2) - w(t_1))^4 = 3(t_2 - t_1)$$

și dacă folosim teorema 5 va rezulta că procesul $w(t)$ este continuu.

Fie $a \neq 0$ un număr oarecare și τ_a acel moment de timp pentru care $w(t)/a \leq 1$ când $t \leq \tau_a$ și pentru $\delta > 0$, $\sup_{\tau_a \leq t \leq \tau_a + \delta} w(t)/a > 1$. Dacă $w(t)/a \leq 1$ pentru toți t , atunci $\tau_a = \infty$. τ_a se va numi momentul primei treceri a procesului $w(t)$ la nivelul a .

Fie acum τ'_a acel moment de timp pentru care $w(t)/a < 1$ dacă $t < \tau'_a$, $w(\tau'_a) = a$. τ'_a va fi numit momentul primei realizări a nivelului a pentru procesul $w(t)$. Avem $\tau'_a \leq \tau_a$.

LEMA 5. $P\{\tau_a = \tau'_a\} = 1$.

Demonstrație. Datorită simetriei procesului $w(t)$ ($-w(t)$ are aceeași repartiție) presupunem $a > 0$. Evenimentul $\{\tau'_a < \tau_a\}$ implică cel puțin unul din evenimentele $\{\max_{0 \leq s \leq \frac{r}{m}} w(s) = a\}$, $r = 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots$. Deci

pentru demonstrația lemei este suficient să arătăm că pentru $a > 0$

$$P\{\max_{0 \leq s \leq t} w(s) = a\} = 0$$

oricare ar fi t ; este ușor de văzut că

$$\begin{aligned} P\{\max_{0 \leq s \leq t} w(s) = a\} &\leq P\{\max_{0 \leq s \leq t_1} w(s) = a\} + \\ &+ \int_{-\infty}^a P\{w(t_1) \in dx\} P\{\sup_{t_1 \leq s \leq t} w(s) - w(t_1) = a - x\}. \end{aligned}$$

Dar $P\{\sup_{t_1 \leq s \leq t} w(s) - w(t_1) = z\}$ poate fi diferită de zero numai pe o mulțime cel mult numărabilă de diferiți z (deoarece orice funcție de repartiție are o mulțime cel mult numărabilă de discontinuități). Rezultă că $P\{\sup_{t_1 \leq s \leq t} w(t_1) = a - x\} = 0$ a.p.t. (în raport cu măsura Lebesgue). Înseamnă că

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^a P\{w(t_1) \in dx\} P\{\sup_{t_1 \leq s \leq t} w(s) - w(t_1) = a - x\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}} \int_{-\infty}^a P\{\sup_{t_1 \leq s \leq t} w(s) - w(t_1) = a - x\} e^{-\frac{x^2}{2t_1}} dx = 0. \end{aligned}$$

În acest fel

$$P\{\max_{0 \leq s \leq t} w(s) = a\} \leq P\{\max_{0 \leq s \leq t_1} w(s) = a\},$$

adică $P\{\max_{0 \leq s \leq t} w(s) = a\}$ nu descrește când $t \searrow 0$ și pe de altă parte, datorită continuității lui $w(t)$, $P\{\max_{0 \leq s \leq t} w(s) > \varepsilon\} \rightarrow 0$ pentru $\varepsilon > 0$, $t \rightarrow 0$.

Prin urmare

$$P\{\max_{0 \leq s \leq t} w(s) = a\} \leq \lim_{t \searrow 0} P\left\{\max_{0 \leq s \leq t} w(s) > \frac{a}{2}\right\} = 0.$$

Lema este demonstrată.

Această leamnă ne arată că între τ_a și τ'_a putem să nu facem nici o deosebire și deci de aici înainte le vom nota pe amândoua cu τ_a .

LEMA 6. Fie $w(t)$ un proces brownian, $a \neq 0$ și τ_a momentul primei treceri la nivelul a . Definim procesul $w_1(t)$ prin relațiile $w_1(t) = w(t)$ pentru $t < \tau_a$, $w_1(t) = 2a - w(t)$ pentru $t \geq \tau_a$. Atunci procesul $w(t)$ este de asemenea un proces brownian.

Demonstrație. Punem

$$w_{nk} = w\left(\frac{k}{n}\right) - w\left(\frac{k-1}{n}\right), \quad w^{(n)}(t) = \sum_{k \leq nt} w_{nk}, \quad w_1^{(n)}(t) = \sum_{k \leq nt} (-1)^{\varepsilon_{nk}} w_{nk},$$

unde

$$\varepsilon_{nk} = \begin{cases} 0, & \sup_{j \leq k-1} \frac{w^{(n)}(j/n)}{a} \leq 1, \\ 1, & \sup_{j \leq k-1} \frac{w^{(n)}(j/n)}{a} > 1. \end{cases}$$

Observăm că variabilele $(-1)^{\varepsilon_{nk}} w_{nk}$ sînt independente între ele și au aceeași repartiție (care coincide cu repartiția variabilelor w_{nk}). Aceasta rezultă din aceea că w_{nk} și $-w_{nk}$ au aceeași repartiție iar w_{nk} nu depinde de ε_{nk} , $w_{n1}, \dots, w_{n,k-1}$. Prin urmare $w_{nk}(-1)^{\varepsilon_{nk}}$ are o repartiție normală cu media 0 și dispersia $1/n$. Așadar, repartițiile finit-dimensionale ale proceselor $w^{(n)}(t)$ și $w_1^{(n)}(t)$ coincid. Demonstrația lemei este terminată dacă observăm că $w^{(n)}(t) \rightarrow w(t)$, $w_1^{(n)}(t) \rightarrow w_1(t)$ cu probabilitatea 1 în virtutea continuității procesului brownian.

TEOREMA 6. Pentru $a > 0$

$$P\{\max_{0 \leq t \leq T} w(t) > a, w(T) \in [c, d]\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{\max[c, a]}^{\max[d, a]} \exp\left(-\frac{x^2}{2T}\right) dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{\max[2a-d, a]}^{\max[2a-c, a]} \exp\left(-\frac{x^2}{2T}\right) dx.$$

Demonstrație. Folosim relația

$$P\{\max_{0 \leq t \leq T} w(t) > a, w(T) \in [c, d]\} =$$

$$= P\{w(T) \in [c, d] \cap [a, \infty)\} + P\{\max_{0 \leq t \leq T} w(t) > a, w(T) \in [c, d] \cap (-\infty, a]\};$$

pentru demonstrație se va ține seama și de faptul că

$$\{w(T) \in [c, d] \cap [a, \infty)\} \Rightarrow \{\max_{0 \leq t \leq T} w(t) > a\}.$$

Calculăm probabilitatea evenimentului

$$\{\max_{0 \leq t \leq T} w(t) > a, w(T) \in [c, d] \cap (-\infty, a]\}.$$

Fie $w(t)$ procesul definit ca în lema 6. Atunci

$$\begin{aligned} & \{\max_{0 \leq t \leq T} w(t) > a, w(T) \in [c, d] \cap (-\infty, a]\} \equiv \\ & \equiv \{\max_{0 \leq t \leq T} w(t) \geq a, w_1(T) \in [2a - d, 2a - c] \cap [a, \infty)\}, \\ & \{w_1(T) \in [2a - d, 2a - c] \cap [a, \infty)\} \Rightarrow \{\max_{0 \leq t \leq T} w(t) \geq a\} \end{aligned}$$

și deci

$$\begin{aligned} & \{\max_{0 \leq t \leq T} w_1(t) \geq a, w_1(t) \in [2a - d, 2a - c] \cap [a, \infty)\} = \\ & = \{w_1(T) \in [2a - d, 2a - c] \cap [a, \infty)\} \end{aligned}$$

Din lema 6

$$P\{\max_{0 \leq t \leq T} w(t) > a, w(t) \in [c, d] \cap (-\infty, a]\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{\max[2a-d, a]}^{\max[2a-c, a]} \exp\left(-\frac{x^2}{2T}\right) dx.$$

În afară de aceasta

$$P\{w(T) \in [c, d] \cap [a, \infty)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{\max[c, a]}^{\max[d, a]} \exp\left(-\frac{x^2}{2T}\right) dx.$$

Din ultimele două relații rezultă demonstrația lemei.

DEFINIȚIA 10. Funcția $x(t)$ traversează de k ori segmentul $[a_1, a_2]$, dacă funcția $\text{sgn}(x(t) - a_1) + \text{sgn}(x(t) - a_2)$ își schimbă semnul de k ori și $w(T) \in [c, d]$.

TEOREMA 7. Fie $a_1 < 0 < a_2$ și $[c, d] \subset [a_1, a_2]$. Atunci

$$\begin{aligned} & P\{\min_{0 \leq t \leq T} w(t) > a_1, \max_{0 \leq t \leq T} w(t) < a_2, w(t) \in [c, d]\} = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_c^d \left\{ \exp\left[-\frac{1}{2T} [x + 2k(a_2 - a_1)]^2\right] - \right. \\ & \quad \left. - \exp\left[-\frac{1}{2T} (x - 2a_2 + 2k(a_2 - a_1))^2\right] \right\} dx. \end{aligned}$$

Demonstrație. Însemnăm cu $U_k^{(i)}$ evenimentul care constă în aceea că procesul $w(t)$ pe segmentul $[0, T]$ trece la nivelul a_i mai devreme decât la nivelul a_j ($j = i, i, j = 1, 2$), iar apoi traversează segmentul $[a_1, a_2]$ de cel puțin k ori.

Probabilitatea căutată este egală cu

$$P\{w(T) \in [c, d]\} = P\{U_0^{(1)}\} = P\{U_0^{(2)}\}.$$

Pentru a calcula $P\{U_0^{(i)}\}$ vom calcula mai întâi

$$P\{U_k^{(i)}\} + P\{U_{k+1}^{(j)}\} = P\{U_k^{(i)} \cup U_{k+1}^{(j)}\}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2).$$

Evenimentul $U_k^{(i)} \cup U_{k+1}^{(j)}$ constă în aceea că procesul $w(t)$ trece la nivelul a_i (nu neapărat mai devreme decât nivelul a_j) apoi traversează segmentul $[a_i, a_j]$ de cel puțin k ori și pentru $t = T$ ajunge în segmentul $[c, d]$. Fie τ_1 — momentul primei treceri la nivelul a_i , τ_2 — primul moment, după τ_1 al trecerii la nivelul a_j , τ_3 — primul moment după τ_2 al trecerii la nivelul a_i ș.a.m.d.
Punem

$$w_1(t) = w(t) \text{ pentru } t < \tau_1$$

$$w_1(t) = 2w(\tau_1) - w(t) \text{ pentru } t \geq \tau_1$$

$$w_2(t) = w_1(t) \text{ pentru } t < \tau_2$$

$$w_2(t) = 2w_1(\tau_2) - w_1(t) \text{ pentru } t \geq \tau_2$$

$$w_3(t) = w_2(t) \text{ pentru } t < \tau_3,$$

$$w_3(t) = 2w_2(\tau_3) - w_2(t) \text{ pentru } t \geq \tau_3 \text{ ș.a.m.d.}$$

Procesul $w_i(t)$ va fi un proces brownian deoarece τ_i este momentul primei treceri a procesului $w_{i-1}(t)$ la nivelul $a_i + (i-1)(a_i - a_j)$. Dacă evenimentul $U_k^{(i)} \cap U_{k+1}^{(j)}$ are loc, atunci procesul $w_{k+1}(t)$ pentru $t < T$ traversează nivelurile

$$a_i, a_i + (a_i - a_j), \dots, a_i + k(a_i - a_j)$$

și la momentul T ajunge în segmentul $[c_k, d_k]$, unde

$$c_k = c + (k+1)(a_i - a_j),$$

dacă k este impar,

$$d_k = d + (k+1)(a_i - a_j),$$

$$c_k = 2a_i - d + k(a_i - a_j),$$

dacă k este par,

$$d_k = 2a_i - c + k(a_i - a_j)$$

Invers dacă $w_{k+1}(t)$ îndeplinește condițiile de mai sus, atunci se realizează evenimentul $U_k^{(i)} \cup U_{k+1}^{(j)}$. Deoarece procesul $w_{k+1}(t)$ este continuu și este nul pentru $t = 0$, atunci pentru ca să ajungă în segmentul $[c_k, d_k]$ el trebuie să treacă la nivelurile $a_i + l(a_i - a_j)$, $l = 0, \dots, k$.

Din acest motiv

$$P\{U_k^{(i)} \cup U_{k+1}^{(j)}\} = P\{w_{k+1}(T) \in [c_k, d_k]\} = P\{w(T) \in [c_k, d_k]\}.$$

Din continuitatea procesului $w(t)$ urmează că, cu probabilitatea 1, va traversa segmentul $[a_1, a_2]$ de un număr finit de ori și, prin urmare $P\{U_k^{(i)}\} \rightarrow 0$ pentru $k \rightarrow \infty$.

Avem

$$P\{U_0^{(1)}\} + P\{U_0^{(2)}\} = (-1)^{n+1}[P\{U_{n+1}^{(1)}\} + P\{U_{n+1}^{(2)}\}] + \\ + \sum_{k=0}^n (-1)^k (P\{U_k^{(1)}\} + P\{U_k^{(2)}\} + P\{U_{k+1}^{(1)}\} + P\{U_{k+1}^{(2)}\})$$

de unde trecînd la limită, pentru $n \rightarrow \infty$,

$$P\{U_0^{(1)}\} + P\{U_0^{(2)}\} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{l=1}^2 (P\{U_k^{(l)}\} + P\{U_{k+1}^{(l)}\}) = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_{2a_1-d-2k(a_2-a_1)}^{2a_1-c-2k(a_2-a_1)} \exp\left(-\frac{x^2}{2T}\right) dx + \int_{2a_2-d+2k(a_2-a_1)}^{2a_2-c+2k(a_2-a_1)} \exp\left(-\frac{x^2}{2T}\right) dx - \right. \\ \left. - \int_{c+2(k+1)(a_2-a_1)}^{d+2(k+1)(a_2-a_1)} \exp\left(-\frac{x^2}{2T}\right) dx - \int_{c-2(k+1)(a_2-a_1)}^{d-2(k+1)(a_2-a_1)} \exp\left(-\frac{x^2}{2T}\right) dx \right].$$

Deci probabilitatea căutată va fi egală cu

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\int_{c+2k(a_2-a_1)}^{d+2k(a_2-a_1)} \exp\left(-\frac{x^2}{2T}\right) dx - \int_{2a_2-c+2k(a_2-a_1)}^{2a_2-d+2k(a_2-a_1)} \exp\left(-\frac{x^2}{2T}\right) dx \right].$$

Făcînd în prima integrală schimbarea de variabilă $x - 2k(a_2 - a_1) = a$ și în a doua $2k(a_2 - a_1) + 2a_2 - x = u$ obținem formula din enunț.

CONSECINȚĂ. Pentru $a > 0$, $[c, d] \subset [-a, a]$

$$P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} |w(t)| < a, w(T) \in [c, d]\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_c^d \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \exp\left[-\frac{(x-2ka)^2}{2T}\right] dx.$$

§ 2. Teoreme de limită pentru procese aleatoare

2.1. Convergența slabă a repartițiilor într-un spațiu metric

Fie un proces aleator $\xi(\theta)$, $\theta \in \Theta$.

DEFINIȚIA 1.1. Vom numi repartiție finit-dimensională a procesului $\xi(\theta)$, repartiția oricărui vector aleator de forma $(\xi(\theta_1), \dots, \xi(\theta_r))$ $\theta_i \in \Theta$; $i = 1, 2, \dots, r$ unde r este arbitrar.

DEFINIȚIA 12. Șirul de funcții aleatoare $\xi_n(\theta)$, $\theta \in \Theta$, $n = 1, 2, \dots$ se numește slab convergent către $\xi(\theta)$, $\theta \in \Theta$ dacă vectorul aleator $(\xi_n(\theta_1), \dots, \xi_n(\theta_r))$, pentru orice r , $\theta_1, \dots, \theta_r \in \Theta$ converge în repartiție către vectorul aleator $(\xi(\theta_1), \dots, \xi(\theta_r))$. Vom spune uneori că repartiția finit-dimensională a procesului $\xi_n(\theta)$ converge către repartiția finit-dimensională a procesului $\xi(\theta)$.

În cele ce urmează vom presupune că procesele $\xi_n(t)$ și $\xi(t)$, ($t \in [a, b]$) aparțin, cu probabilitatea 1, unui anumit spațiu metric de funcții X cu metrica $\rho_x(x, y)$, $x, y \in X$. Vom considera funcționalele definite pe X , continue în metrica ρ_x . Dacă f este o astfel de funcțională, atunci pentru ca $f(\xi(t))$ să fie o variabilă aleatoare este suficient ca spațiul X să fie separabil, iar mulțimile de forma $\{\omega : \xi(t) \in S\}$, unde S este o sferă deschisă din X , să fie măsurabile (deoarece atunci vor fi măsurabile și mulțimile $\{\omega : \xi(t) \in A\}$ pentru orice mulțime boreliană A din X). În cele ce urmează vom presupune că X este separabil, iar $\xi_n(t)$ și $\xi(t)$ îndeplinesc condiția de mai sus. Procesului aleator $\xi(t)$ ($\xi_n(t)$) îi va corespunde măsura $\mu(\mu_n)$ definită pe σ — algebra $\mathfrak{B}$ a mulțimilor boreliene din X prin relația

$$\mu(A) = P\{\xi(t) \in A\}, \quad \mu_n(A) = P\{\xi_n(t) \in A\}.$$

Folosind o teoremă din teoria măsurii se poate arăta că dacă f este o funcțională $\mathfrak{B}$ -măsurabilă, avem

$$Mf(\xi(t)) = \int f d\mu.$$

TEOREMA 8. Pentru convergența în repartiție a șirului $f(\xi_n(t))$ către variabila $f(\xi(t))$ pentru orice funcțională continuă f , este necesar și suficient ca pentru toate funcționalele continue și mărginite f să avem

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int f d\mu_n = \int f d\mu.$$

Demonstrație. Să presupunem că $f_1(\xi_n(t))$ converge în repartiție către $f_1(\xi(t))$ pentru orice funcțională continuă f_1 . Se știe că dacă $g: R \rightarrow R$ este o funcție continuă și mărginită atunci

$$\int_R g(x) dF_n(x) \rightarrow \int_R g(x) dF(x) \quad \text{dacă} \quad F_n(x) \rightarrow F(x)$$

adică

$$Mg(f_1(\xi_n(t))) \rightarrow Mg(f_1(\xi(t))).$$

Fiind dată acum o funcțională continuă și mărginită f ea se poate pune sub forma $f = g \cdot f_1$, unde f_1 este o funcțională continuă iar g o funcție continuă și mărginită definită pe R și cu valori în R . După cele de mai sus

$$Mg(f_1(\xi_n(t))) \rightarrow Mg(f_1(\xi(t))) \Leftrightarrow Mf(\xi_n(t)) \rightarrow Mf(\xi(t))$$

și deci avem relația (4).

Pe de altă parte din (4) pentru orice funcțională continuă și mărginită, urmează că funcția caracteristică a variabilei $f(\xi_n(t))$ converge către funcția caracteristică a variabilei $f(\xi(t))$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M e^{i \lambda f(\xi_n(t))} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int e^{i \lambda f} d\mu_n = \int e^{i \lambda f} d\mu = M e^{i \lambda f(\xi(t))}.$$

DEFINIȚIA 13. Dacă pentru orice funcție continuă și mărginită $f(x)$ este îndeplinită relația (4) se spune că șirul de măsuri μ_n converge slab către măsura μ și se scrie $\mu_n \Rightarrow \mu$.

DEFINIȚIA 14. Șirul de măsuri μ_n se numește relativ compact dacă din fiecare subșir al său se poate extrage un șir slab convergent.

TEOREMA 9. Fie X un spațiu metric complet și separabil, iar $\mathfrak{B}$, σ — algebra mulțimilor boreliene. Pentru ca șirul de măsuri μ_n pe $\mathfrak{B}$ să fie relativ compact este necesar și suficient să avem :

a) $\sup_n \mu_n(X) < \infty,$

b) pentru fiecare $\varepsilon > 0$ există un compact K astfel ca

$$\sup_n \mu_n(X \setminus K) < \varepsilon.$$

Pentru demonstrația teoremei vom demonstra mai întâi

LEMA 7. Fie X un spațiu compact și $\sup_n \mu_n(X) = H < \infty$. Atunci șirul de măsuri μ_n este relativ compact.

Demonstrație. Fie $\mathcal{C}_x$ spațiul funcțiilor continue f , definite pe X cu $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. $\mathcal{C}_x$ este un spațiu liniar normat separabil. Însemnăm cu $\{f_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, o mulțime numărabilă densă în $\mathcal{C}_x$. Prin procedeul diagonal se poate găsi un șir μ_{n_k} astfel ca pentru toți i să existe limita

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_i d\mu_{n_k} = l[f_i].$$

Deoarece

$$|l[f_i] - l[f_j]| \leq H \|f_i - f_j\|$$

rezultă că $l[f_i]$ este o funcțională uniform continuă pe mulțimea $\{f_k\}$, $k = 1, 2, \dots$ și, prin urmare ea poate fi prelungită prin continuitate pe tot spațiul $\mathcal{C}_x$: $l[f] = \lim_{f_{n_i} \rightarrow f} l[f_{n_i}]$. Deci relația

$$l[f] = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f d\mu_{n_k}$$

rămâne adevărată pentru toți f . $l[f]$ va fi o funcțională liniară nenegativă definită pe $\mathcal{C}_x$.

Introducem funcția de mulțime $\lambda(A)$, definită pe $\mathfrak{B}(X)$ prin relația

$$\lambda(A) = \inf_{f \geq I_A} l[f].$$

Funcția $\lambda(A)$ are următoarele proprietăți :

- 1) $\lambda(A)$ este monotonă și pentru orice șir A_k , $\lambda(\bigcup_k A_k) \leq \sum_k \lambda(A_k)$,
- 2) dacă distanța între mulțimile A_1 și A_2 este strict pozitivă, adică

$$\rho(A_1, A_2) = \inf_{x \in A_1, y \in A_2} \rho(x, y) > 0$$

atunci

$$\lambda(A_1 \cup A_2) = \lambda(A_1) + \lambda(A_2).$$

Pentru demonstrația lui 1) este suficient să observăm că dacă

$$\varphi_k(x) \geq I_{A_k}(x), \text{ atunci } \sum_k \varphi_k(x) = I_{\bigcup_k A_k}(x).$$

Pentru a demonstra 2) alegem o constantă arbitrară $\alpha > 0$ și o funcție f astfel ca $\lambda(A_1 \cup A_2) \geq \mathcal{I}[f] - \alpha$ și $f \geq I_{A_1} + I_{A_2}$.
Fie

$$\varphi_{A_i}^{(\varepsilon)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in A_i; \\ 1 - \frac{1}{\varepsilon} \rho(x, A_i), & \text{dacă } 0 \leq \rho(x, A_i) < \varepsilon, \\ 0, & \text{dacă } \rho(x, A_i) \geq \varepsilon, \end{cases}$$

unde $\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y)$. Dacă $2\varepsilon \leq \rho(A_1, A_2)$ atunci

$$\varphi_{A_1}^{(\varepsilon)} + \varphi_{A_2}^{(\varepsilon)} \leq 1, \quad \varphi_{A_1}^{(\varepsilon)} \geq I_{A_1}$$

$$\lambda(A_1 \cup A_2) \leq \mathcal{I}[\varphi_{A_1}^{(\varepsilon)} f] + \mathcal{I}[\varphi_{A_2}^{(\varepsilon)} f] \geq \lambda(A_1) + \lambda(A_2).$$

Proprietățile 1) și 2) ne arată că λ este o măsură exterioară metrică. Conform unei teoreme cunoscute restricția lui λ la σ -algebra mulțimilor boreliene $\mathfrak{B}$ va fi o măsură (pe care o notăm cu μ).

Vom arăta acum că

$$(5) \quad \mathcal{I}[f] = \int f d\mu.$$

Fie f nenegativă. Alegem valorile

$$0 = C_0 < C_1 < \dots < C_N; C_N > \|f\|.$$

Dacă

$$A_k = \{x; C_{k-1} \leq f(x) \leq C_k\}$$

atunci A_k va fi o mulțime boreliană; deci $\lambda(A_k) = \mu(A_k)$.

Fie φ_k funcții continue, astfel încît

$$\mathcal{I}(\varphi_k) > \lambda(A_k) + \varepsilon, \quad \varphi_k \geq I_{A_k}.$$

Deoarece $f \leq \sum_{k=1}^N C_k \varphi_k$,

$$\begin{aligned} l[f] &\leq \sum C_k l[\varphi_k] \leq N\varepsilon + \sum_{k=1}^N C_k \lambda(A_k) = N\varepsilon + \sum_{k=1}^N C_k \mu(A_k) \leq \\ &\leq N\varepsilon + \max_k (C_k - C_{k-1}) \mu(X) + \int f d\mu. \end{aligned}$$

Din ultima relație urmează că

$$(6) \quad l[f] = \int f d\mu$$

pentru orice funcție nenegativă $f \in \mathcal{C}_x$. Mai departe

$$l\left[1 - \frac{f}{\|f\|}\right] \leq \int \left(1 - \frac{f}{\|f\|}\right) d\mu.$$

Deoarece $l(1) = \int d\mu = \mu(X)$, atunci

$$(7) \quad -l[f] \leq -\int f d\mu.$$

Din (6) și (7) obținem (5) pentru orice funcție nenegativă și prin urmare pentru toți $f \in \mathcal{C}_x$. În acest fel pentru orice $f \in \mathcal{C}_x$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f d\mu_{n_k} = \int f d\mu$$

Lema este demonstrată.

Trecem acum la demonstrația teoremei.

Alegem un șir $\varepsilon_m \rightarrow 0$ și mulțimile compacte $K^{(m)} \subset K^{(m+1)}$, pentru care $\sup_n \mu_n(X \setminus K^{(m)}) \leq \varepsilon_m$. Punem

$$\mu_n^{(m)}(A) = \mu_n(A \cap K^{(m)}).$$

Alegem șirul $n_k^{(1)}$, astfel ca șirul de măsuri $\mu_{n_k^{(1)}}^{(1)}$ să fie slab convergent către măsura $\mu^{(1)}$. Definim șirul $n_k^{(j)}$ astfel ca $n_k^{(j)}$ să fie subșir al șirului $n_k^{(j-1)}$ iar șirul $\mu_{n_k^{(j)}}^{(j)}$ să fie slab convergent către o măsură $\mu^{(j)}$. Se arată că pentru orice funcțională f continuă și mărginită există $\lim_{j \rightarrow \infty} \int f d\mu^{(j)}$ (aceasta rezultă din faptul că $\mu_{n_k^{(j)}}^{(j)}$ și $\mu_{n_k^{(j+p)}}^{(j+p)}$ coincid pe $K^{(j)}$).

La fel ca mai sus se arată că există o măsură μ astfel ca

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int f d\mu^{(j)} = \int f d\mu.$$

Să arătăm acum că $\mu_{n_k}^{(k)}$ converge slab către μ . Într-adevăr pentru orice funcțională continuă și mărginită

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \int f d\mu_{n_k}^{(k)} - \int f d\mu \right| &\leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left| \int_{K^{(m)}} f d\mu_{n_k}^{(k)} - \int_{K^{(m)}} f d\mu \right| + \\ &+ \|f\| \left(\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \mu_{n_k}^{(k)}(X \setminus K^{(m)}) + \mu(X \setminus K^{(m)}) \right) \leq 2 \|f\| \varepsilon_m. \end{aligned}$$

Astfel suficiența este demonstrată.

Necesitatea. Dacă μ_n este relativ compact atunci mulțimea $\int Id\mu_n$ este o mulțime numerică relativ compactă. Prin urmare șirul $\mu_n(X)$ este mărginit. Presupunem mai departe că șirul μ_n este relativ compact, dar condiția b) nu este îndeplinită. Condiția b) este echivalentă cu următoarea condiție:

b') pentru fiecare $\varepsilon > 0$ și $\delta > 0$ există un compact K , pentru care $\sup \mu_n(X \setminus K_\delta)$ unde K_δ este mulțimea punctelor pentru care distanța la K nu depășește pe δ . Într-adevăr b) $\Rightarrow$ b') este evident. Invers, fie $K^{(r)}$ un compact pentru care

$$\sup_n \mu_n(X \setminus K_{1/r}^{(r)}) \leq \varepsilon/2^r.$$

Atunci $\bigcap_r K_{1/r}^{(r)}$ va fi compact pentru care se îndeplinește condiția b).

Dacă presupunem că nu este îndeplinită condiția b') înseamnă că există $\varepsilon > 0$ și $\delta > 0$ astfel că pentru fiecare compact K să avem

$$\sup_n \mu_n(X \setminus K_\delta) > \varepsilon.$$

Însemnăm cu $K^{(0)}$ un compact pentru care $\mu_1(X \setminus K^{(0)}) < \varepsilon$. Deoarece

$$\sup_n \mu_n(X \setminus K_\delta^{(0)}) > \varepsilon,$$

se poate găsi un număr n_1 pentru care $\mu_{n_1}(X \setminus K_\delta^{(0)}) > \varepsilon$ și apoi putem găsi un compact $K^{(1)}$ pentru care $\mu_{n_1}(K^{(1)}) > \varepsilon$ și $K^{(1)} \subset X \setminus K_\delta^{(0)}$. Deoarece

$$\sup_n \mu_n(X \setminus K_\delta^{(0)} \setminus K_\delta^{(1)}) > \varepsilon$$

se poate găsi un număr n_2 și un compact $K^{(2)} \subset X \setminus K_\delta^{(0)} \setminus K_\delta^{(1)}$ astfel ca $\mu_{n_2}(K^{(2)}) > \varepsilon$.

Continuând așa găsim un șir n_j și compactele $K^{(j)}$ astfel ca

$$\mu_{n_j}(K^{(j)}) > \varepsilon \text{ și } K^{(j)} \subset X \setminus \bigcup_{i=0}^{j-1} K_i^{(j)} = X \setminus \left[\bigcup_{i=1}^{j-1} K_i^{(j)} \right]_\delta.$$

Notăm $I_i(x)$ o funcție continuă nenegativă, egală cu zero pe $X \setminus K_{\delta/2}^{(i)}$ și egală cu 1 pe $K^{(i)}$. (Existența se datorește teoremei lui Uryson*). Deoarece distanța între oricare două mulțimi ale șirului $K^{(i)}$ nu este mai mică decât δ funcțiile $I_i(x)$ pentru diferiți i nu pot fi în același timp diferite de zero. Din șirul μ_j alegem un subșir slab convergent μ'_k care converge către μ . Deoarece măsura μ este finită, iar $\sum_i I_i(x)$ mărginită avem

$$\int \sum_1^\infty I_i(x) d\mu = \sum_1^\infty \int I_i(x) d\mu < \infty$$

și deci $\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{i=p}^\infty \int I_i(x) d\mu = 0$. Pe de altă parte

$$\int \sum_{i=p}^\infty I_i(x) d\mu'_k \geq \mu_{n_p}(K^{(p)}) \geq \varepsilon \quad (k = n_p),$$

deci pentru toți p

$$\sum_{i=p}^\infty \int I_i(x) d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=p}^\infty \int I_i(x) d\mu'_k \geq \varepsilon$$

Contradicția la care am ajuns demonstrează suficiența condiției b).

TEOREMA 10. Pentru ca șirul de măsuri μ_n să convergă slab către măsura μ este necesar și suficient, ca șirul μ_n să fie relativ compact, și pentru o algebră $\mathfrak{B}_0$ pentru care $\sigma(\mathfrak{B}_0) = \mathfrak{B}_0$ să avem $\mu_n(A) \rightarrow \mu(A)$ oricare ar fi $A \in \mathfrak{B}_0$.

Demonstrație. Necesitatea. Orice șir slab convergent este relativ compact. Fie acum $A \in \mathfrak{B}$ și notăm $\bar{A}$ închiderea sa și cu $\bar{A}$ interiorul său. Dacă μ_n este slab convergent către μ , atunci alegem o funcție $f(x)$, astfel ca $f(x) = 1$ pentru $x \in \bar{A}$ și

$$\mu(\bar{A}) \geq \int f d\mu - \varepsilon$$

(existența acestei funcții se obține folosind teorema lui Uryson). Rezultă că

$$\mu(\bar{A}) \geq \int f d\mu - \varepsilon \geq \lim \int f d\mu_n - \varepsilon \geq \overline{\lim} \mu_n(A) - \varepsilon,$$

* Uryson, P. S. Über die Mächtigkeit der Zusammenhängenden Mengen. Math. Annalen. 94. 262–295. 1925.

de unde

$$\overline{\lim} \mu_n(A) \leq \mu(\bar{A}),$$

$$\lim \mu_n(X \setminus A) \leq \mu(\overline{X \setminus A}), -\underline{\lim} \mu_n(A) \leq -\mu(\overset{\circ}{A})$$

$$\mu(\overset{\circ}{A}) \leq \underline{\lim} \mu(A) \leq \overline{\lim} \mu(A) \leq \mu(\bar{A}).$$

În acest fel $\lim \mu_n(A) = \mu(A)$ pentru orice mulțime A pentru care $\mu(F_r A) = 0$. $\mathfrak{B}_0$ totalitatea mulțimilor pentru care $\mu(F_r(A)) = 0$ este o algebră de mulțimi. Să arătăm că $\sigma(\mathfrak{B}_0) = \mathfrak{B}$. Pentru aceasta introducem funcția $g(r) = \mu(S_r(x))$ unde $S_r(x)$ este sfera de centru x și rază r . g este o funcție crescătoare, deci mulțimea punctelor de discontinuitate va fi o mulțime D cel mult numărabilă. Deci pentru orice $r_0 \in D$ avem

$$\begin{aligned} \mu(F_r S_r(x)) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} [\mu(S_{r_0+\varepsilon}(x)) - \mu(S_{r_0-\varepsilon}(x))] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} [g(r_0 + \varepsilon) - g(r_0 - \varepsilon)] = 0. \end{aligned}$$

Prin urmare orice sferă este o reuniune cel mult numărabilă de sfere cu frontiere de măsură nulă. Cum spațiul X este separabil va rezulta că $\sigma(\mathfrak{B}_0) = \mathfrak{B}$.

Suficiența. Alegem un subșir μ_{n_k} slab convergent. Însemnăm cu $\bar{\mu}$ limita acestui șir și vom arăta că μ și $\bar{\mu}$ coincid. Fie $A \in \mathfrak{B}_0$. Atunci după cum a fost stabilit la demonstrația necesității.

$$\bar{\mu}(\overset{\circ}{A}) \leq \underline{\lim} \mu_{n_k}(A) \leq \overline{\lim} \mu_{n_k}(A) \leq \mu(\bar{A})$$

și cum $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{n_k}(A) = \mu(A)$, atunci pentru orice $A \in \mathfrak{B}_0$

$$(8) \quad \mu(\overset{\circ}{A}) \leq \mu(A) \leq \bar{\mu}(\bar{A}).$$

Dacă A_n este un șir monoton de mulțimi pentru care este îndeplinită (8) atunci, ținînd seama de relațiile

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\bigcup A_n} &= \bigcup \overset{\circ}{A_n}, \quad \overset{\circ}{\bigcap A_n} \subset \bigcap \overset{\circ}{A_n}, \\ \overline{\bigcup A_n} &\supset \bigcup \bar{A_n} \cap \bar{A_n} = \bigcap \bar{A_n} \end{aligned}$$

va rezulta că (8) are loc și pentru $\lim A_n$. În acest fel, totalitatea mulțimilor pentru care este îndeplinită relația (8), $\mathfrak{B}_1$ va fi o clasă monotonă care conține algebra $\mathfrak{B}_0$ și deci $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}$.

Deci relația (8) este adevărată pentru orice mulțime $A \in \mathfrak{B}$. Însemnăm prin $\mathfrak{B}_2$ totalitatea mulțimilor pentru care $\bar{\mu}(F_r A) = 0$. Pentru toți $A \in \mathfrak{B}_2$, $\mu(A) = \bar{\mu}(A)$, deoarece $\bar{\mu}(\overset{\circ}{A}) = \bar{\mu}(\bar{A}) = \mu(A)$. Relația $\mu(A) = \bar{\mu}(A)$ va fi satisfăcută pentru orice $A \in \sigma(\mathfrak{B}_2)$. Dar după cum a fost stabilit mai sus $\sigma(\mathfrak{B}_2) = \mathfrak{B}$. În acest fel, măsurile $\bar{\mu}$ și μ coincid.

2.2. Spațiul funcțiilor fără discontinuități de speța a doua

Vom nota cu $D_{[0,1]}$, totalitatea funcțiilor $x(t)$, definită pe segmentul $[0,1]$ cu valori reale pentru care există în fiecare punct limite laterale. De asemenea vom presupune că pentru orice funcție $x \in D_{[0,1]}$,

$$x(t) = x(t+0), \quad x(0) = x(0+0), \quad x(1) = x(1-0).$$

Notăm cu Λ mulțimea funcțiilor continue strict crescătoare pe $[0, 1]$ pentru care $\lambda(0) = 0$, $\lambda(1) = 1$. Evident că

$$\lambda \in \Lambda \rightarrow \lambda^{-1} \in \Lambda \quad \text{și} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda \rightarrow \lambda_1 \circ \lambda_2 \in \Lambda.$$

Definim acum pentru orice $x(t), y(t) \in D_{[0,1]}$ valoarea

$$\rho_D(x, y) = \inf_{\lambda \in \Lambda} [\sup_t |x(t) - y(\lambda(t))| + \sup_t |t - \lambda(t)|].$$

LEMA 8. ρ_D definește o metrică în $D_{[0,1]}$.

Demonstrație. Trebuie arătat că ρ_D are următoarele proprietăți

- a) $\rho_D(x, y) \geq 0$ și $\rho_D(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$,
- b) $\rho_D(x, y) = \rho_D(y, x)$,
- c) $\rho_D(x, z) \leq \rho_D(x, y) + \rho_D(y, z)$, $(\forall) x(t), y(t), z(t) \in D_{[0,1]}$.

Proprietatea a) este evidentă, iar proprietatea b) rezultă din relația

$$\begin{aligned} \rho_D(y, x) &= \inf_{\lambda \in \Lambda} [\sup_t |y(t) - x(\lambda(t))| + \sup_t |t - \lambda(t)|] = \\ &= \inf_{\lambda^{-1} \in \Lambda} [\sup_t |y(\lambda^{-1}(t)) - x(t)| + \sup_t |\lambda^{-1}(t) - t|] = \rho_D(x, y). \end{aligned}$$

Fie acum $x(t), y(t), z(t) \in D_{[0,1]}$. Pentru fiecare $\varepsilon > 0$ se poate găsi $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ astfel ca

$$\begin{aligned} \rho_D(x, y) &\geq \sup_t |x(t) - y(\lambda_1(t))| + \sup_t |t - \lambda_1(t)| - \varepsilon \\ \rho_D(y, x) &\geq \sup_t |y(t) - z(\lambda_2(t))| + \sup_t |t - \lambda_2(t)| - \varepsilon \end{aligned} \quad (9)$$

Atunci

$$\begin{aligned} \rho_D(x, z) &\leq \sup_t |x(t) - z(\lambda_2(\lambda_1(t)))| + \sup_t |t - \lambda_2(\lambda_1(t))| \leq \\ &\leq \sup_t |x(t) - y(\lambda_1(t))| + \sup_t |t - \lambda_1(t)| + \sup_t |y(\lambda_1(t)) - z(\lambda_2(\lambda_1(t)))| + \\ &\quad + \sup_t |\lambda_1(t) - \lambda_2(\lambda_1(t))| = \sup_t |x(t) - y(\lambda_1(t))| + \sup_t |(t - \lambda_1(t))| + \\ &\quad + \sup_t |y(t) - z(\lambda_2(t))| + \sup_t |t - \lambda_2(t)|. \end{aligned}$$

Iar cind t parcurge segmentul $[0,1]$, $\lambda_1(t)$ de asemenea va parcurge segmentul $[0, 1]$. Folosind relația (9) găsim

$$\rho_D(x, z) \leq \rho_D(x, y) + \rho_D(y, z) + 2\varepsilon$$

pentru orice ε și lema este demonstrată.

LEMA 9. Pentru fiecare funcție $x(t) \in D_{[0,1]}$ punem

$$\Delta_c(x) = \sup_{t-c \leq t' \leq t \leq t'' \leq t+c} [\min \{|x(t') - x(t)|; |x(t'') - x(t)|\}] + \\ + \sup_{0 \leq t \leq c} |x(t) - x(0)| + \sup_{1-c \leq t \leq 1} |x(t) - x(1)|$$

atunci

$$\lim_{c \rightarrow 0} \Delta_c(x) = 0.$$

Demonstrație. Convergența către zero pentru $\sup_{0 \leq t \leq c} |x(t) - x(0)|$ și $\sup_{1-c \leq t \leq 1} |x(t) - x(1)|$ pentru $c \rightarrow 0$ rezultă din continuitatea lui $x(t)$ în punctele 0 și 1. Dacă ar exista $\varepsilon > 0$ astfel ca pentru orice

$$\sup_{t-c \leq t' \leq t \leq t'' \leq t+c} \min [|x(t') - x(t)|; |x(t'') - x(t)|] > \varepsilon$$

atunci se pot găsi șirurile $t'_n < t_n < t''_n$ cu $t'_n - t''_n \rightarrow 0$ și

$$(10) \quad |x(t'_n) - x(t_n)| > \varepsilon, \quad |x(t''_n) - x(t_n)| > \varepsilon.$$

Se poate presupune că $t_n \rightarrow t_0 \Rightarrow t'_n \rightarrow t_0, t''_n \rightarrow t_0$.

Prin urmare șirurile $x(t'_n), x(t''_n), x(t_n)$ vor converge către unul din numerele $x(t_0 - 0)$ sau $x(t_0) = x(t_0 + 0)$ (trecînd eventual la subșiruri). Dacă $x(t'_n), x(t''_n)$ au aceeași limită, atunci aceeași limită o va avea și $x(t_n)$. Dacă nu, cel puțin una din diferențele $x(t'_n) - x(t_n)$ sau $x(t''_n) - x(t_n)$ va tinde la zero, ceea ce contrazice (10). Lema este demonstrată.

LEMA 10. Fie $x(t) \in D_{[0,1]}$ și $[\alpha, \beta] \subset [0, 1]$. Dacă $x(t)$ nu are salturi mai mari decît ε în intervalul $[\alpha, \beta]$ atunci pentru $|t' - t''| \leq c, t', t'' \in [\alpha, \beta]$ avem $|x(t') - x(t'')| \leq 2\Delta_c(x) + \varepsilon$.

Demonstrație. Alegem $\delta \in (0, \varepsilon)$ și $\tau \in [t', t'']$ astfel ca pentru

$$t \in [t', \tau], |x(t') - x(t)| > \Delta_c(x) + \delta,$$

iar $|x(t') - x(\tau)| \geq \Delta_c(x) + \delta$. Dacă un astfel de punct nu există, atunci $|x(t') - x(t'')| \leq \Delta_c(x) + \delta$ și demonstrația este terminată. Dacă τ există atunci, deoarece

$$\min [|x(\tau) - x(t')|; |x(\tau) - x(t'')|] \leq \Delta_c(x), \text{ iar}$$

$$|x(\tau) - x(t')| \geq \Delta_c(x) + \delta$$

avem

$$|x(\tau) - x(t'')| \leq \Delta_\epsilon(x).$$

Urmează că

$$\begin{aligned} |x(t'') - x(t')| &\leq |x(t'') - x(\tau)| + |x(\tau) - x(\tau - 0)| + \\ &+ |x(\tau - 0) - x(t')| \leq 2\Delta_\epsilon(x) + \delta + \epsilon. \end{aligned}$$

Trecînd la limită pentru $\delta \rightarrow 0$ obținem demonstrația lemei.

Vom nota cu $H_{m,n}$ mulțimea funcțiilor $x(t) \in D_{[0,1]}$ constante pe intervalele $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ și luînd valori multiplu de $\frac{1}{m}$.

LEMA 11. Pentru fiecare funcție $x(t) \in D_{[0,1]}$ există o funcție $x^*(t) \in H_{m,n}$ astfel că

$$\rho_D(x, x^*) \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + 4\Delta_{\frac{2}{n}}(x).$$

Demonstrație. În fiecare segment $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ se poate găsi cel mult un singur punct în care saltul să depășească valoarea $2\Delta_{\frac{2}{n}}(x)$. Într-adevăr, dacă τ este un astfel de punct, atunci

$$|x(s) - x(\tau - 0)| = \min(|x(s) - x(\tau - 0)|; |x(\tau) - x(\tau - 0)|) \leq \Delta_{\frac{1}{n}}(x)$$

$$\text{pentru } s \in \left[\frac{k}{n}, \tau\right],$$

$$|x(s) - x(\tau)| \leq \Delta_{\frac{1}{n}}(x) \text{ pentru } s \in \left(\tau, \frac{k+1}{n}\right)$$

și

$$|x(s) - x(s - 0)| \leq 2\Delta_{\frac{1}{n}}(x) \leq 2\Delta_{\frac{2}{n}}(x).$$

Să presupunem că există $\tau_k \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, astfel încît

$$|x(\tau_k) - x(\tau_k - 0)| \geq 2\Delta_{\frac{2}{n}}(x).$$

Notăm cu $\lambda(t)$ o funcție din Λ , pentru care

$$\lambda\left(\frac{k+1}{n}\right) = \tau_k, \quad t - \frac{1}{n} \leq \lambda(t) \leq t.$$

Punem $\bar{x}(t) = x(\lambda(t))$. Funcția $\bar{x}(t)$ va avea salturi depășind $2\Delta_{\frac{2}{n}}$ numai în punctele de forma $\frac{k}{n}$ și

$$\rho(x, \bar{x}) \leq \sup_t |\bar{x}(t) - x(\lambda(t))| + \sup_t |t - \lambda(t)| \leq \frac{1}{n}.$$

Fie mai departe $\bar{x}^*(t)$ funcția egală cu $\bar{x}\left(\frac{k}{n}\right)$ pentru $t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, $k \leq n-1$, $\bar{x}^*(1) = \bar{x}\left(\frac{n-1}{n}\right)$. Atunci

$$\rho_D(\bar{x}, \bar{x}^*) \leq \sup_t |\bar{x}(t) - \bar{x}^*(t)| \leq \sup_k \sup_{\frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n}} \left| \bar{x}(t) - \bar{x}\left(\frac{k}{n}\right) \right|.$$

Deoarece salturile lui $\bar{x}(t)$, depășind pe $2\Delta_{\frac{2}{n}}(x)$, se găsesc numai printre punctele de forma $\frac{k}{n}$, atunci în intervalul $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ nu vor exista astfel de salturi și după lema 9.

$$\left| \bar{x}\left(\frac{k}{n}\right) - \bar{x}(t) \right| \leq 2\Delta_{\frac{1}{n}}(\bar{x}) + 2\Delta_{\frac{2}{n}}(x) \text{ pentru } t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right].$$

Să majorăm pe $\Delta_{\frac{1}{n}}(x)$,

$$\begin{aligned} \Delta_{\frac{1}{n}}(\bar{x}) &= \sup_{t - \frac{1}{n} \leq t' \leq t' + \frac{1}{n}} [\min\{|\bar{x}(t') - \bar{x}(t)|; |x(t) - \bar{x}(t')|\}] + \\ &\quad + \sup_{0 \leq t \leq \frac{1}{n}} |\bar{x}(t) - x(0)| + \sup_{1 - \frac{1}{n} \leq t \leq 1} |\bar{x}(t) - \bar{x}(1)| = \\ &= \sup_{t - \frac{1}{n} \leq t' \leq t' + \frac{1}{n}} [\min\{|\bar{x}(\lambda(t')) - x(\lambda(t))|; |x(\lambda(t)) - x(\lambda(t'))|\}] + \\ &\quad + \sup_{0 \leq t \leq \frac{1}{n}} |x(\lambda(t)) - x(0)| + \sup_{1 - \frac{1}{n} \leq t \leq 1} |x(\lambda(t)) - x(1)|. \end{aligned}$$

Observăm că pentru $t_1 < t_2 < t_1 + \frac{1}{n}$, avem

$$t_1 - \frac{1}{n} < \lambda(t_1) < \lambda(t_2) \leq t_2 < t_1 + \frac{1}{n},$$

deoarece

$$0 < \lambda(t_2) - \lambda(t_1) \leq \frac{2}{n}.$$

Prin urmare $\Delta_{\frac{1}{n}}(\bar{x}) \leq \Delta_{\frac{2}{n}}(\bar{x})$

și deci

$$\rho_D(\bar{x}, \bar{x}^*) \leq 4\Delta_{\frac{2}{n}}(x).$$

Fie $x^*(t) = \frac{1}{m} E(m\bar{x}^*)(t)$, unde $E(x)$ este partea întreagă a lui x .

Deoarece $|x^*(t) - \bar{x}^*(t)| \leq \frac{1}{m}$ atunci

$$\begin{aligned} \rho_D(x, x^*) &\leq \rho_D(x, \bar{x}) + \rho_D(\bar{x}, \bar{x}^*) + \rho_D(\bar{x}^*, x^*) \leq \\ &\leq \frac{1}{n} + 4\Delta_{\frac{2}{n}}(x) + \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Lema este demonstrată.

CONSECINȚĂ. Spațiul $D_{[0,1]}$ cu metrica ρ_D este separabil. Aceasta rezultă din faptul că mulțimea $\bigcup_{m,n} H_{m,n}$ este numărabilă și densă în $D_{[0,1]}$.

Observație. σ -algebra evenimentelor spațiului Ω coincide cu σ -algebra generată de mulțimile de forma $\{\omega : \xi(t) \in C\}$ unde C este o mulțime cilindrică.

Din convergența repartiției finit-dimensionale a lui $\xi_n(t)$ către repartiția finit-dimensionale a lui $\xi(t)$ urmează că șirul μ_n converge către μ pe toate mulțimile cilindrice. σ -algebra generată de mulțimile cilindrice, din $D_{[0,1]}$ conține mulțimile boreliene. Într-adevăr vom arăta că σ -algebra generată de cilindri conține sferele deschise. Pentru aceasta este suficient să considerăm relația

$$\{x : \rho_D(x(t), \alpha(t)) < r\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x : \rho_D(x(t_k), \alpha(t_k)) < r\},$$

unde $\alpha(t)$ este o funcție arbitrară din $D_{[0,1]}$ iar t_k o mulțime numărabilă densă în $[0, 1]$.

TEOREMA 11. Fie L o constantă pozitivă, iar $\omega(\delta)$ o funcție continuă și monotonă pentru care $\lim_{\delta \downarrow 0} \omega(\delta) = 0$. Însemnăm cu $K(L, \omega)$ mulțimea funcțiilor din D care îndeplinesc condițiile

$$|x(t)| \leq L, \quad \Delta_c(x) \leq \omega(c).$$

Atunci $K(L, \omega)$ este un compact în metrica ρ_D .

Demonstrație. Se poate arăta ținând seama de uniform mărginirea mulțimii $K(L, \omega)$ și de demonstrația lemei 11 că $K(L, \omega)$ este o mulțime total mărginită. Apoi $K(L, \omega)$ este închisă. Într-adevăr $\Delta_c(x) \leq \Delta_{c+\rho_D(x,y)}(y)$.

Fie acum $x_n \in K(L, \omega)$ cu $\rho_D(x, \bar{x}) \rightarrow 0$, atunci pentru fiecare $\alpha > 0$

$$\Delta_c(\bar{x}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\Delta_{c+\alpha}(x_n)} \leq \omega(c + \alpha).$$

Din continuitatea lui ω , $\Delta_c(\bar{x}) \leq \omega(c)$. Avem

$$\sup_t |x(t)| \leq \sup_t |y(t)| + \rho_D(x, y)$$

de unde

$$\sup_t |\bar{x}(t)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_t |x_n(t)| \leq L.$$

Prin urmare $\bar{x}(t)$ (limita șirului x_n) aparține lui $K(L, \omega)$. Dacă vom arăta că $K(L, \omega)$ este complet, atunci, el fiind total mărginit, va rezulta că este compact. Prin urmare să arătăm că $K(L, \omega)$ este complet.

Fie $x_n(t)$ un șir de funcții din $K(L, \omega)$ pentru care $\rho_D(x_n, x_m) \rightarrow 0$ pentru $m, n \rightarrow \infty$ (adică $x_n(t)$ este șir fundamental). Este suficient să arătăm că există un subșir $x_{n_k}(t)$ care are limită. Prin urmare putem presupune că

$$\rho_D(x_n, x_{n+1}) < 1/2^{n+1}.$$

Atunci există un șir de funcții $\lambda_n(t)$, din Λ astfel că

$$\sup_t |x(t) - x_{n+1}(\lambda_{n+1}(t))| \leq 1/2^{n+1}, \quad \sup_t |t - \lambda_{n+1}(t)| \leq 1/2^{n+1}.$$

Punem $\mu(t) = \lambda_1(t)$, $\mu_n(t) = \lambda(\mu_{n-1}(t))$.

Deoarece

$$\sup_t |\mu_n(t) - \mu_{n-1}(t)| \leq \sup_t |\lambda_n(t) - t| \leq 1/2^n$$

rezultă că $\mu_n(t)$ converge către o funcție continuă și nedescrescătoare $\mu(t)$, care îndeplinește condițiile $\mu(0) = 0$, $\mu(1) = 1$. Mai departe

$$\sup_t |x_n(\mu_n(t)) - x_{n-1}(\mu_{n-1}(t))| = \sup_t |x_n(\lambda_n(t)) - x_{n-1}(t)| \leq 1/2^n$$

Prin urmare $x_n(\mu_n(t))$ este uniform convergent către o funcție $x^*(t) \in D_{[0,1]}$. Să vedem care este legătura între $x^*(t)$ și $\mu(t)$. Presupunem că $\mu(t)$ este constantă pe intervalul $[\alpha, \beta]$. Dacă $x^*(\alpha) = x^*(\beta)$ atunci $x^*(t)$ este constantă pe $[\alpha, \beta]$. Dacă $x^*(\alpha) \neq x^*(\beta)$ atunci există $\gamma \in [\alpha, \beta]$ astfel că $x^*(t) = x^*(\alpha)$ pentru $t \in [\alpha, \gamma]$ și $x^*(t) = x^*(\beta)$ pentru $t \in [\gamma, \beta]$. Într-adevăr, în caz contrar ar exista $t' < t'' < t'''$ în $[\alpha, \beta]$ astfel că dacă

$$x^*(t') \neq x^*(t''), \quad x^*(t'') \neq x^*(t'''),$$

atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min [|x_n(\mu_n(t')) - x_n(\mu_n(t''))| ; |x_n(\mu_n(t'')) - x_n(\mu_n(t'''))|] =$$

$$= \min [|x^*(t') - x^*(t'')| ; |x^*(t'') - x^*(t''')|] > 0.$$

Avem :

$$\mu_n(t') < \mu_n(t'') < \mu_n(t''') \text{ și } \mu_n(t'), \mu_n(t''), \mu_n(t''') \rightarrow \mu(\alpha).$$

Aceasta contrazice faptul că $x(t) \in K(L, \omega)$. Tot după același model putem arăta că $x(\alpha - 0) = x(\alpha)$. Notăm cu $\bar{x}(t)$ funcția din $D_{[0,1]}$ definită prin relația

$$x^*(t) = \bar{x}(\mu(t))$$

valabilă pentru toate punctele t în care $\mu(s) > \mu(t)$ pentru toți $s \in (t, 1)$. Deci această relație definește în mod unic funcția $\bar{x}(t)$. Vom arăta că $\bar{x}(t)$ este limita șirului $x_n(t)$. Pentru aceasta construim funcțiile ajutătoare $\varphi_n(t)$, din Λ . Fie $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ toate punctele din $[0, 1]$ în care $x(t)$ are salturi mai mari ca $\frac{1}{n}$. Însemnăm cu $[\alpha_i, \beta_i]$ intervalul maxim pe care $\mu(t)$ ia valoarea τ_i (acest interval poate fi redus la un singur punct). Fie $\gamma_i \in [\alpha_i, \beta_i]$, astfel ca $x^*(t) = \bar{x}(\tau_i - 0)$ pentru $t \in [\alpha_i, \gamma_i]$ și $x^*(t) = \bar{x}(\tau_i)$ pentru $t \in [\gamma_i, \beta_i]$ (în particular, dacă $\alpha_i = \gamma_i$ atunci $x^*(t)$ pe $[\alpha_i, \beta_i]$ ia o valoare unică $\bar{x}(\tau_i)$). Alegem ε_n (nedepășind pe $\frac{1}{n}$) așa că

$$\Delta_{\varepsilon_n}(\bar{x}) < \frac{1}{n}. \text{ Fie } \varphi_n(t) \text{ o funcție îndeplinind condițiile}$$

$$\varphi_n(\gamma_i) = \tau_i, \quad |\varphi_n(t) - \mu(t)| \leq \varepsilon_n.$$

Dacă t nu aparține nici unui interval $[\alpha_i, \beta_i]$ din lema 9 (deoarece $\bar{x}(t)$ nu are salturi mai mari ca $1/n$ între $\mu(t)$ și $\varphi_n(t)$ avem

$$|x^*(t) - \bar{x}(\varphi_n(t))| = |\bar{x}(\mu(t)) - \bar{x}(\varphi_n(t))| \leq 2\Delta_{\varepsilon_n}(\bar{x}) + (1/n).$$

Dacă $t \in [\alpha_i, \gamma_i]$, deoarece $|\bar{x}(\tau_i - 0) - \bar{x}(\tau_i)| \geq 1/n$, obținem

$$|x^*(t) - \bar{x}(\varphi_n(t))| \leq \sup_{s \in [\tau_i - \varepsilon_n, \tau_i]} |\bar{x}(\tau_i - 0) - \bar{x}(s)| \leq \Delta_{\varepsilon_n}(x).$$

Dacă $t \in [\gamma_i, \beta_i]$ atunci

$$|x^*(t) - \bar{x}(\varphi_n(t))| \leq \Delta_{\varepsilon_n}(x).$$

Urmează că

$$\sup_t |x^*(t) - \bar{x}(\varphi_n(t))| \leq 2\Delta_{\varepsilon_n}(\bar{x}) + (1/n) \leq 3/n$$

Acum putem majora pe $\rho_D(x_n, \bar{x})$. Avem

$$\begin{aligned} \rho_D(x_n, \bar{x}) &\leq \rho_D(x_n(t), x^*(\mu_n^{-1}(t))) + \rho_D(x^*(\mu_n^{-1}(t)), \bar{x}(\varphi_n(\mu_n^{-1}(t)))) + \\ &+ \rho_D(\bar{x}(t), \bar{x}(\varphi_n(\mu_n^{-1}(t)))) \leq \sup_t |x_n(\mu_n(t)) - x^*(t)| + \\ &+ \sup_t |x^*(t) - \bar{x}(\varphi_n(t))| + \sup_t |t - \varphi_n(\mu_n^{-1}(t))| \leq \\ &\leq (1/2^n) + (3/n) + \sup_t |\mu_n(t) - \varphi_n(t)| \leq (1/2^n) + (3/n) + \varepsilon_n. \end{aligned}$$

În acest fel $\rho_D(x_n, \bar{x}) \rightarrow 0$ și teorema este demonstrată.

TEOREMA 12. Dacă repartiția finit-dimensională a procesului $\xi_n(t)$ ($\xi_n(t) \in D_{[0,1]}$) converge către repartiția finit-dimensională a procesului $\xi(t)$, ($\xi(t) \in D_{[0,1]}$) și pentru orice $\varepsilon > 0$ avem

$$(11) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} P\{\Delta_\varepsilon(\xi_n(t)) > \varepsilon\} = 0$$

atunci pentru orice funcțională f definită pe $D_{[0,1]}$ și continuă în metrica ρ_D , $f(\xi_n(t))$ converge în repartiție către $f(\xi(t))$.

Demonstrație. Vom arăta mai întâi că egalitatea (11) este echivalentă cu

$$(12) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_n P\{\Delta_\varepsilon(\xi_n(t)) > \varepsilon\} = 0$$

(12) $\Rightarrow$ (11) este evident. Pe de altă parte din (11) rezultă că pentru fiecare $\eta > 0$ există $\delta > 0$ și N , astfel ca, pentru $n > N$, $\varepsilon > \delta$

$$(13) \quad P\{\Delta_\varepsilon(\xi_n(t)) > \varepsilon\} \leq \eta.$$

Dar cum $\Delta_\varepsilon(\xi_n(t)) \rightarrow 0$ putem alege pe δ așa ca relația (13) să fie adevărată pentru toți n și deci

$$P\{\Delta_\varepsilon(\xi_n(t)) > \varepsilon\} \leq \eta \text{ pentru orice } n$$

și de aici se deduce și relația (12).

Acum, ținând seama de observația făcută în acest paragraf va rezulta că μ_n converge către μ (μ_n și μ sînt măsurile corespunzătoare lui $\xi_n(t)$ și respectiv $\xi(t)$ pe o algebră de mulțimi din $D_{[0,1]}$ care generează mulțimile boreliene din $D_{[0,1]}$). Prin urmare va trebui să arătăm că șirul μ_n este relativ compact, ceea ce este echivalent (după teorema 2) cu a arăta că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un compact K astfel ca $\sup_n \mu_n(X \setminus K) < \varepsilon$. În locul acestor compacte vom alege compacte de tipul $K(L, \omega)$. Avem

$$\sup_n (D_{[0,1]} \setminus K(L, \omega)) = \sup_n P\{\xi_n(t) \in K(L, \omega)\} \leq$$

$$\leq P\{\sup_t |\xi_n(t)| > L\} + P\{\bigcup_c \Delta_c(\xi_n(t)) > \omega(c)\}.$$

Luăm o funcție continuă $\omega(c)$ monotonă astfel ca $\omega(c) \searrow 0$ cînd $c \searrow 0$ și astfel ca $\omega(c) \geq \varepsilon_r$, cînd $c \in (c_{r+1}, c_r)$, unde $\varepsilon_r \searrow 0$ și c_r este astfel ca $c_r \searrow 0$ cînd $c_r < c_{r-1}$.

Conform ipotezei

$$\sup_n P\{\Delta_{c_r}(\xi_n(t)) > \varepsilon_r\} < \eta/2^r.$$

Atunci

$$P\{\xi_n(t) \notin K(L, \omega)\} \leq P\{\sup_t |\xi_n(t)| > L\} + \sum_r P\{\Delta_{c_r}(\xi_n(t)) \geq \varepsilon_r\}.$$

Urmează că

$$\sup_t P \{ \xi_n(t) \notin K(L, \omega) \} \leq \sup_n P \{ \sup_t |\xi_n(t)| > L \}$$

Prin urmare demonstrația revine la a arăta că

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \sup_n P \{ \sup_t |\xi_n(t)| > L \} = 0$$

Pentru fiecare funcție $x(t)$ din $D_{[0,1]}$

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t)| \leq \sup_{0 \leq k \leq m} \left| x\left(\frac{k}{m}\right) \right| + \Delta_{\frac{1}{m}}(x),$$

deoarece, pentru $t \in \left[\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m} \right]$,

$$\left| x(t) - x\left(\frac{k}{m}\right) \right| < \Delta_{\frac{1}{m}}(x),$$

sau

$$\left| x(t) - x\left(\frac{k+1}{m}\right) \right| < \Delta_{\frac{1}{m}}(x).$$

Rezultă că

$$\begin{aligned} P \{ \sup_t |\xi_n(t)| > L \} &\leq P \left\{ \sup_{0 \leq k \leq m} \left| \xi_n\left(\frac{k}{m}\right) \right| > L - \varepsilon \right\} + P \{ \Delta_{\frac{1}{m}}(\xi(t)) > \varepsilon \} = \\ &= 1 - P \left\{ \left| \xi_n\left(\frac{k}{m}\right) \right| \leq L - \varepsilon, 0 \leq k \leq m \right\} + P \{ \Delta_{\frac{1}{m}}(\xi_n(t)) > \varepsilon \} \end{aligned}$$

Cum

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \xi_n\left(\frac{k}{m}\right) \right| \leq L - \varepsilon, 0 \leq k \leq m \right\} &= \\ &= P \left\{ \left| \xi\left(\frac{k}{m}\right) \right| \leq L - \varepsilon, 0 \leq k \leq m \right\} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 1. \end{aligned}$$

Obținem

$$\overline{\lim}_{L \rightarrow \infty} \sup_n P \{ \sup_t |\xi_n(t)| > L \} \leq \sup_n P \{ \Delta_{\frac{1}{m}}(\xi_n(t)) > \varepsilon \},$$

ceea ce demonstrează teorema.

§ 3. Teoreme de tip Kolmogorov-Smirnov

Introducem procesul $\eta_n(x) = \sqrt{n} (F_n(x) - F(x))$.

LEMA 12. Șirul de procese $\eta_n(x)$ este convergent către un progres gaussian $\eta(x)$, pentru care $M\eta(x) = 0$, $M(\eta(x)\eta(y)) = F(x)[1 - F(y)]$ pentru $-\infty < x \leq y < \infty$.

Demonstrație. Observăm că

$$\eta_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n [\varepsilon(\xi_k - x) - F(x)],$$

unde $\varepsilon(z) = 0$ pentru $z \leq 0$ și $\varepsilon(z) = 1$ pentru $z > 0$.
Deoarece

$$M\varepsilon(\xi_k - x) = F(x),$$

$$M[\varepsilon(\xi_k - x)\varepsilon(\xi_k - y)] = F(x)$$

pentru $x < y$,

$$M\eta_n(x)\eta_n(y) = F(x)[1 - F(y)];$$

demonstrația rezultă mai departe din teorema lui Moivre.

CONSECINȚĂ. Fie $F^{-1}(y)$ funcția inversă a lui $F(x)$ [$F(x)$ este presupusă continuă]. Punem $\xi_n(t) = \eta_n(F^{-1}(t))$, $\xi(t) = \eta(F^{-1}(t))$, $0 \leq t \leq 1$. Atunci șirul de procese $\xi_n(t)$ este slab convergent către un proces gaussian $\xi(t)$, definit pentru $t \in [0, 1]$ pentru care $M\xi(t) = 0$, $M\xi(t)\xi(s) = t(1 - s)$ pentru $t \leq s$.

Observația 1. Procesul $\xi_n(t)$ se poate pune sub forma

$$\xi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n [\varepsilon(\eta_k - t) - t],$$

unde $\eta_k = F^{-1}(\xi_k)$ (variabile aleatoare independente uniform repartizate pe $[0, 1]$).

Observația 2. Repartiția finit-dimensională a procesului $\xi(t)$ coincide cu repartiția finit-dimensională a unui proces brownian $w(t)$, $0 \leq t \leq 1$ condiționat de $w(1) = 0$. Într-adevăr, deoarece repartiția procesului $w(t)/w(1) = 0$ va fi tot o repartiție normală, este suficient să arătăm că

$$M(w(t)/w(1) = 0) = M\xi(t), \quad M(w(t)w(s)/w(1) = 0) = M\xi(t)\xi(s).$$

Variabila $\bar{\xi}(t) = w(t) - tw(1)$ este necorelată cu $w(1)$ (adică corelația lor este nulă). Deoarece $\bar{\xi}(t)$, $w(1)$ au împreună repartiția normală, procesul $\bar{\xi}(t)$ va fi independent de $w(1)$. Prin urmare

$$M(\bar{\xi}(t)/w(1)) = M(\bar{\xi}(t)) = 0,$$

$$M(\bar{\xi}(t)\bar{\xi}(s)/w(1)) = M(\bar{\xi}(t)\bar{\xi}(s)).$$

Folosind relația $w(t) = \bar{\xi}(t) + tw(1)$ și ultimele relații găsim

$$M(w(t)/w(1)) = tw(1),$$

$$\begin{aligned} M(w(t)w(s)/w(1)) &= M(\bar{\xi}(t)\bar{\xi}(s)) + ts[w(1)]^2 = \\ &= \min[t, s] - ts + ts[w(1)]^2. \end{aligned}$$

Ținând seama de condiționarea $w(1) = 0$, afirmația este demonstrată.

LEMA 13. Pentru fiecare funcțională f , continuă pe $D_{[0,1]}$ variabila aleatoare $f(\xi_n(t))$ converge în repartiție către variabila $f(\xi(t))$.

Demonstrație. Conform teoremei 1 putem presupune că procesul $\xi(t)$ este separabil. Pe de altă parte pentru $h > 0$, $\xi(t+h) - \xi(t)$ va avea o repartiție normală cu

$$M(\xi(t+h) - \xi(t)) = 0,$$

$$\begin{aligned} M(\xi(t+h) - \xi(t))^2 &= (t+h)(1-t-h) + t(1-t) - 2t(1-t-h) \\ &= h - h^2 \end{aligned}$$

astfel că

$$M(\xi(t+h) - \xi(t))^4 = 3h^2(1-h)^2 \leq 3h^2$$

și $\xi(t)$ va fi continuă.

Convergența finit-dimensională a procesului $\xi(t)$ către repartiția finit-dimensională a procesului $\xi(t)$ a fost stabilită.

În virtutea teoremei 4 mai trebuie să arătăm că

$$\lim_{c \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} P\{\Delta_c(\xi_n(t)) > \varepsilon\} = 0.$$

Dar cum

$$\Delta_c(x(t)) \leq \sup_{t'-t'' \leq c} |x(t') - x(t'')|$$

lema va fi demonstrată dacă vom arăta că pentru orice $\varepsilon > 0$,

$$(14) \quad \lim_{c \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\sup_{t'-t'' \leq c} |\xi_n(t') - \xi_n(t'')| > \varepsilon\right\} = 0.$$

Procesul $\xi_n(t) + \sqrt{n}t$ este monoton crescător și deci pentru

$$t_1 < t_2 < t_3 < t_4,$$

$$-\sqrt{n}(t_4 - t_1) \leq \xi_n(t_3) - \xi_n(t_2) \leq \xi_n(t_4) - \xi_n(t_1) + \sqrt{n}(t_4 - t_1).$$

Așadar

$$\sup_{|t'-t''| \leq c} |\xi_n(t') - \xi_n(t'')| \leq \left[\sup_{|k_1 - k_2| \leq c2^{m+2}} \left| \xi_n\left(\frac{k_1}{2^m}\right) - \xi_n\left(\frac{k_2}{2^m}\right) \right| + \frac{2\sqrt{n}}{2^m} \right].$$

Fie m_n ales astfel ca $(\sqrt{n}/2^{m_n}) \rightarrow 0$ pentru $n \rightarrow \infty$ și $(2^{n/m_n}) \geq 1$. Pentru demonstrația lui (14) este suficient să arătăm că pentru orice $\varepsilon > 0$

$$\lim_{c \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \sup_{|2^{k_1/m_n} - 2^{k_2/m_n}| \leq c} \left| \xi_n \left(\frac{k_1}{2^{m_n}} \right) - \xi_n \left(\frac{k_2}{2^{m_n}} \right) \right| > \varepsilon \right\} = 0.$$

Fie acum $m^{(c)}$ cel mai mic număr pentru care $c2^{m^{(c)}} \geq 1$. Atunci $c < 1/2^{m^{(c)}-1}$ și prin urmare

$$\sup_{|2^{k_1/m_n} - 2^{k_2/m_n}| \leq c} \left| \xi_n \left(\frac{k_1}{2^{m_n}} \right) - \xi_n \left(\frac{k_2}{2^{m_n}} \right) \right| \leq 2 \sup_j \frac{j}{2^{m^{(c)}-1}} \leq \frac{\sup_l \frac{l}{2^k} \frac{j+1}{2^{m^{(c)}-1}}}{2^k} \left| \xi_n \left(\frac{l}{2^k} \right) - \xi_n \left(\frac{j}{2^k} \right) \right|$$

$$- \xi_n \left(\frac{j}{2^{m^{(c)}-1}} \right) \leq 2 \sum_{r=m^{(c)}}^{m_n} \sup_i \left| \xi_n \left(\frac{i+1}{2^r} \right) - \xi_n \left(\frac{i}{2^r} \right) \right|.$$

Ultima inegalitate o deducem observind că

$$\frac{l}{2^k} - \frac{j}{2^{m^{(c)}-1}} = \sum_{r=1}^s (1/2^{k_r}) \text{ unde } m^{(c)} - 1 < k_1 < k_2 \dots < k_s \leq k$$

și deci

$$\xi_n \left(\frac{l}{2^k} \right) - \xi_n \left(\frac{j}{2^{m^{(c)}-1}} \right) = \sum_{i=1}^s \left[\xi_n \left(\frac{j}{2^{m^{(c)}-1}} + \sum_{r=1}^i \frac{1}{2^{k_r}} \right) - \xi_n \left(\frac{j}{2^{m^{(c)}-1}} + \sum_{r=1}^{i-1} \frac{1}{2^{k_r}} \right) \right].$$

Alegem $a < 1$ astfel ca $2a^4 > 1$. Atunci, folosind (15)

$$\begin{aligned} P \left\{ \sup_{|2^{k_1/m_n} - 2^{k_2/m_n}| \leq c} \left| \xi_n \left(\frac{k_1}{2^{m_n}} \right) - \xi_n \left(\frac{k_2}{2^{m_n}} \right) \right| > \varepsilon \right\} &\leq \\ \sum_{r=m^{(c)}}^{m_n} P \left\{ \sup_i \left| \xi_n \left(\frac{i+1}{2^r} \right) - \xi_n \left(\frac{i}{2^r} \right) \right| > \frac{\varepsilon a^{r-m^{(c)}}}{2(1-a)} \right\} &\leq \\ \leq \sum_{r=m^{(c)}}^{m_n} \sum_{i=0}^{2^r-1} M \left| \xi_n \left(\frac{i+1}{2^r} \right) - \xi_n \left(\frac{i}{2^r} \right) \right|^4 \cdot \frac{2^4(1-a)^4}{\varepsilon^4 a^{4(r-m^{(c)})}}. \end{aligned}$$

Fie μ_n — numărul de valori η_i care cad în segmentul $[t, t+h]$. Atunci

$$P\{\mu_n = k\} = C_n^k h^k (1-h)^{n-k},$$

$$\xi_n(t+h) - \xi_n(t) = \sqrt{n} \left(\frac{\mu_n}{n} - h \right).$$

Găsim

$$M(\xi_n(t+h) - \xi(t))^4 = 3h^2 - 6h^3 + 3h^4 + \frac{h}{n} (1 - 7h + 12h^2 - 6h^3) \leq \\ \leq 3h^2 + \frac{h}{n} \leq 3h^2 + (h/2^{m_n}).$$

Înseamnă că pentru $h \geq (1/2^{m_n})$ avem

$$M(\xi(t+h) - \xi(t))^4 \leq 4h^2.$$

Prin urmare

$$P \left\{ \sup_{\substack{k_1 \\ |2^{m_n} - 2^{m_n}| \leq c}} \left| \xi_n \left(\frac{k_1}{2^{m_n}} \right) - \xi_n \left(\frac{k_2}{2^{m_n}} \right) \right| > \varepsilon \right\} \leq \\ \leq \sum_{r=m(c)}^{m_n} \frac{2^4(1-a)^4}{\varepsilon^4 a^{4(r-m(c))}} 4 \cdot \frac{1}{2^r} \leq \frac{2^6(1-a)^4}{4} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2a^4)^r} \leq L_\varepsilon \frac{1}{2^{m(c)}}$$

unde

$$L_\varepsilon = \frac{2^6(1-a)^4}{\varepsilon^4} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2a^4)^r}.$$

Lema este demonstrată.

Teoremele care urmează ne dau evaluarea asimptotică a distanței între funcțiile $F_n(x)$ și $F(x)$ (între funcția empirică de repartiție și funcția teoretică de repartiție).

TEOREMA 13. (Kolmogorov (1933)). Pentru fiecare $\alpha > 0$ avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \{ \sqrt{n} D_n < \alpha \} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 \alpha^2},$$

unde

$$D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)|.$$

Demonstrație. Mai întâi vom observa că funcționala

$$f_1(x(t)) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|$$

este o funcțională continuă pe $D_{[0,1]}$.

Acum, ținând seama de consecința lemei 12 avem

$$\sqrt{n} \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - F(x)| = f_1(\xi_n(t)).$$

În virtutea lemei 13 este suficient să demonstrăm că

$$(16) \quad P\{f_1(\xi(t)) < \alpha\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2\alpha^2}.$$

Pentru demonstrația formulei (16) vom ține seama de observația 2 și de consecința teoremei 7 după care găsim că, pentru $|x| < \alpha$,

$$P\left\{\sup_{0 \leq t \leq 1} |w(t)| < \alpha, w(1) < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-x}^x (-1)^k e^{-\frac{(u-2k\alpha)^2}{2}} du \right].$$

Din ultima formulă găsim că repartiția variabilei $\sup_{0 \leq t \leq 1} |w(t)|$, condiționată de $w(1) = 0$, este chiar membrul drept din (16).

DEFINIȚIA 15. Statistica D_n poartă numele de statistica lui Kolmogorov-Smirnov pentru o selecție. Statisticile

$$D_n^+ = \sup_x [F_n(x) - F(x)], \quad D_n^- = \sup_x [F(x) - F_n(x)]$$

poartă numele de statisticile unilaterale ale lui Kolmogorov-Smirnov.

TEOREMA 14. Statisticile D_n , D_n^+ și D_n^- au repartiții care sînt independente de forma particulară a funcției $F(x)$.

Demonstrație. Avem :

$$D_n = \max_x (D_n^+, D_n^-).$$

Definind statisticile de ordine

$$X_{(0)} = -\infty \text{ și } X_{(n+1)} = \infty,$$

putem să scriem

$$F_n(x) = \frac{i}{n} \text{ pentru } X_{(i)} \leq x < X_{(i+1)}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Prin urmare, avem

$$\begin{aligned} D_n^+ &= \sup_x [F_n(x) - F(x)] = \max_{0 \leq i \leq n} \sup_{X_{(i)} \leq x < X_{(i+1)}} [F_n(x) - F(x)] = \\ &= \max_{0 \leq i \leq n} \sup_{X_{(i)} \leq x < X_{(i+1)}} \left[\frac{i}{n} - F(x) \right] = \\ &= \max_{0 \leq i \leq n} \left[\frac{i}{n} - \inf_{X_{(i)} \leq x < X_{(i+1)}} F(x) \right] = \\ &= \max_{0 \leq i \leq n} \left[\frac{i}{n} - F(X_{(i)}) \right] = \\ &= \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \left[\frac{i}{n} - F(X_{(i)}) \right], 0 \right\}. \end{aligned}$$

Asemănător, găsim

$$D_n^- = \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \left[F(X_{(i)}) - \frac{i-1}{n} \right], 0 \right\}$$

$$D_n = \max \left\{ 0, \max_{1 \leq i \leq n} \left[\frac{i}{n} - F(X_{(i)}) \right], \max_{1 \leq i \leq n} \left[F(X_{(i)}) - \frac{i-1}{n} \right] \right\}.$$

Prin urmare repartițiile statisticilor D_n , D_n^+ și D_n^- depind numai de variabilele aleatoare $F(X_{(i)})$, $i = 1, 2, \dots, n$, care sînt statisticile de ordine corespunzătoare unei selecții efectuate asupra unei variabile repartizate uniform pe $(0,1)$, indiferent de funcția F .

Are loc

TEOREMA 15. Pentru $D_n^+ = \sup_x [F_n(x) - F(x)]$, unde F este orice funcție de repartitie continuă, avem

$$P(D_n^+ < c) = \begin{cases} 0, & c \leq 0 \\ \int_{1-c}^1 \int_{(n-1)/n-c}^{u_1} \dots \int_{2/n-c}^{u_2} \int_{1/n-c}^{u_3} f(u_1, \dots, u_n) \prod_{i=1}^n du_i, & 0 < c < 1 \\ 1, & c \geq 1 \end{cases}$$

unde

$$f(u_1, u_2, \dots, u_n) = \begin{cases} n!, & 0 < u_1 < u_2 < \dots < u_n < 1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Demonstrație. Fără a micșora generalitatea putem presupune că F este repartizată uniform pe $(0,1)$. Atunci putem să scriem

$$D_n^+ = \max \left[\max_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{i}{n} - X_{(i)} \right), 0 \right].$$

Pentru toți c , $0 < c < 1$, avem

$$\begin{aligned} P(D_n^+ < c) &= P \left[\max_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{i}{n} - X_{(i)} \right) < c \right] = \\ &= P \left(\frac{i}{n} - X_{(i)} < c \text{ pentru toți } i = 1, 2, \dots, n \right) = \\ &= P \left(X_{(i)} > \frac{i}{n} - c \text{ pentru toți } i = 1, 2, \dots, n \right) = \end{aligned}$$

$$= \int_{1-c}^{\infty} \int_{(n-1)/n-c}^{\infty} \dots \int_{2/n-c}^{\infty} \int_{1/n-c}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n dx_i$$

unde

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} n!, & 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1 \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Teorema este demonstrată.

TEOREMA 16 (Birnbau și Tingey (1951)). *Avem*

$$P(D_n^+ > c) = (1 - c)^n + c \sum_{j=1}^{[n(1-c)]} C_n^j \left(1 - c - \frac{j}{n}\right)^{n-j} \left(c + \frac{j}{n}\right)^{j-1}.$$

Echivalența formelor pentru $P(D_n^+ > c)$ dată de teoremele 15 și 16 se arată prin inducție.

TEOREMA 17 (Smirnov). *Pentru toți $\alpha > 0$, avem*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\sqrt{n} D_n^+ < \alpha\} = 1 - e^{-2\alpha^2}.$$

Demonstrație. Pentru demonstrație vom observa că funcționala

$$f_2(x(t)) = \sup_{0 \leq t \leq 1} x(t)$$

este continuă pe $D_{[0,1]}$.

Deci ținând seama de lema 13 este suficient să arătăm că

$$P\{f_2(\xi(t)) < \alpha\} = 1 - e^{-2\alpha^2}.$$

Raționînd la fel ca în teorema 13 și folosind teorema 6 găsim că pentru $|x| < \alpha$

$$P\left\{\sup_{0 \leq t \leq 1} w(t) < \alpha, w(1) < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du - \int_x^\alpha e^{-\frac{u^2}{2}} du - \int_{2\alpha-x}^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du \right],$$

de unde rezultă că repartiția variabilei $\sup_{0 \leq t \leq 1} w(t)$, condiționată de $w(1) = 0$ este egală cu $1 - e^{-2\alpha^2}$. Teorema este demonstrată.

COROLAR. *Dacă F este orice funcție de repartiție continuă, atunci pentru fiecare $\alpha > 0$, repartiția limită a statisticii*

$$V = 4n D_n^{+2}$$

cînd $n \rightarrow \infty$, este $\chi^2(2)$.

Demonstrație. Avem

$$\sqrt{n} D_n^+ < \alpha$$

dacă și numai dacă

$$4n D_n^{+2} < 4\alpha^2 \text{ sau } V < 4\alpha^2.$$

Prin urmare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(V < 4\alpha^2) = 1 - e^{-2\alpha^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(V < a) = 1 - e^{-a/2} \text{ pentru toți } a \geq 0,$$

care este funcția de repartiție a unei variabile $\chi^2(2)$.

Acest corolar permite folosirea tabelor cu funcția de repartiție a unei variabile χ^2 pentru obținerea funcției de repartiție a statisticii D_n^+ .

Vom presupune acum că am făcut două grupe de selecții de volume n și m , independente între ele

$$X_1^{(1)}, \dots, X_n^{(1)}; X_1^{(2)}, \dots, X_m^{(2)}.$$

Fie $F_n^{(1)}(x)$ și $F_m^{(2)}(x)$ funcțiile empirice de repartiție pentru cele două grupe.

La fel ca mai sus, vom introduce variabilele $\xi_n^{(1)}(t)$, $\xi_m^{(2)}(t)$ corespunzătoare celor două grupe de selecții. Vom nota

$$\xi_{m,n}(t) = \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \left(\frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon(\eta_i^{(1)} - t)}{n} - \frac{\sum_{j=1}^m \varepsilon(\eta_j^{(2)} - t)}{m} \right)$$

unde

$$\eta_k^{(1)} = F(\xi_k^{(1)}), \quad \eta_k^{(2)} = F(\xi_k^{(2)}).$$

TEOREMA 18 (Doob (1949), Donsker (1952)). Variabilele $\sup_{0 \leq t \leq 1} |\xi_{m,n}(t)|$ și $\sup_{0 \leq t \leq 1} \xi_{m,n}(t)$ tind în repartiție către aceeași limită care tind variabilele

$\sup_{0 \leq t \leq 1} |\xi_n^{(1)}(t)|$ și respectiv $\sup_{0 \leq t \leq 1} \xi_n^{(1)}(t)$ când $\frac{m}{n} \rightarrow \rho$, $m, n \rightarrow \infty$.

Demonstrație. După cum am arătat, variabila $\sup_{0 \leq t \leq 1} |\xi_n^{(1)}(t)|$ tinde în repartiție către variabila $\sup_{0 \leq t \leq 1} u^{(1)}(t)$, unde $u^{(1)}(t)$ este un proces gaussian.

Fie $u^{(2)}(t)$ procesul corespunzător pentru $\xi_m^{(2)}(t)$. $u^{(1)}(t)$ și $u^{(2)}(t)$ sînt două procese independente între ele, avînd aceeași repartiție finit-dimensională. Pe de altă parte

$$\xi_{m,n}(t) = \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \left(\frac{\xi_n^{(1)}(t)}{n} - \frac{\xi_m^{(2)}(t)}{m} \right) = \sqrt{\frac{n}{m+n}} \left(\xi_m^{(2)}(t) - \sqrt{\frac{m}{n}} \xi_n^{(1)}(t) \right).$$

Prin urmare, ținînd seama de consecința lemei 12 și observația 2, $\xi_{m,n}(t)$ va tinde în repartiție către

$$\sqrt{\frac{\rho}{1+\rho}} (u^{(1)}(t) - u^{(2)}(t) / \sqrt{\rho}).$$

Dar procesul $\frac{\sqrt{\rho} u^{(1)}(t) - u^{(2)}(t)}{\sqrt{1+\rho}}$ este un proces gaussian, avind aceeași medie și dispersie ca și procesele $u^{(1)}(t)$, $u^{(2)}(t)$.

Aplicînd lema 13 găsim că $\sup_{0 \leq t \leq 1} |\xi_{m,n}(t)|$ și $\sup_{0 \leq t \leq 1} \xi_{m,n}(t)$ tind în repartiție respectiv către

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{|\sqrt{\rho} u^{(1)}(t) - u^{(2)}(t)|}{\sqrt{1+\rho}},$$

și

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{\sqrt{\rho} u^{(1)}(t) - u^{(2)}(t)}{\sqrt{1+\rho}},$$

adică către $\sup_{0 \leq t \leq 1} |u^{(1)}(t)|$ și $\sup_{0 \leq t \leq 1} u^{(1)}(t)$ și teorema este demonstrată.

TEOREMA 19 (Smirnov (1939)). Pentru orice $\alpha > 0$, avem

$$(17) \quad \lim_{\substack{m, n \rightarrow \infty \\ \frac{m}{n} \rightarrow \rho}} P \left\{ \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n^{(1)}(x) - F_m^{(2)}(x)| < \alpha \right\} = \\ = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 x^2}.$$

Demonstrație. Este suficient să ținem seama de teoremele 18 și 13.

TEOREMA 20 (Smirnov 1939). Pentru orice $\alpha > 0$, avem

$$(18) \quad \lim_{\substack{m, n \rightarrow \infty \\ \frac{m}{n} \rightarrow \rho}} P \left\{ \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \sup_{-\infty < x < \infty} (F_n^{(1)}(x) - F_m^{(2)}(x)) < \alpha \right\} = 1 - 2^{-2x^2}.$$

Demonstrație. Este suficient să ținem seama de teoremele 18 și 17.

TEOREMA 21. Pentru toți $\alpha > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ n \int \left[F_n(x) - F(x) \right]^2 dF(x) < \alpha \right\} = G(\alpha),$$

unde $G(\alpha)$ este o funcție de repartiție căreia îi corespunde o funcție caracteristică egală cu

$$\left(\prod_{k=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{2i\alpha}{k^2 \pi^2} \right| \right)^{-1}.$$

Demonstrație. Observăm că funcționala

$$f_3(x(t)) = \int_0^1 [x(t)]^2 dt$$

este continuă pe $D_{[0,1]}$. Prin urmare, după lema 12 este suficient să arătăm că

$$M e^{i\alpha f_3(\xi(t))} = \left(\prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 - \frac{2i\alpha}{k^2\pi^2}} \right)^{-1}.$$

După cum se știe, procesul $\xi(t)$ poate fi dezvoltat în serie sub forma

$$\xi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \frac{\sin k\pi t}{k\pi}$$

unde ξ_k sînt variabile aleatoare independente cu repartiția $N(0,1)$. Prin urmare

$$\int_0^1 \xi^2(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k^2}{k^2\pi^2}.$$

Deci

$$\begin{aligned} M \left\{ \exp i\alpha \int \xi^2(t) dt \right\} &= \prod_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \cdot \frac{k^2\pi^2 - 2i\alpha}{k^2\pi^2} \right) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{k^2\pi^2}{k^2\pi^2 - 2i\alpha}} \end{aligned}$$

și teorema este demonstrată.

§ 4. Teste de tip Kolmogorov și Smirnov

4.1. Definirea testului

Teorema lui Kolmogorov poate servi ca bază pentru un test ne-parametric, la verificarea ipotezei H_0 care specifică o funcție de repartiție $F(x)$ continuă, necunoscută.

Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ o selecție asupra variabilei aleatoare X care, în ipoteza H_0 , are funcția de repartiție $F(x)$ continuă. Calculăm funcția de repartiție empirică $F_n(x)$ și statistica D_n .

Pentru verificarea ipotezei la un prag de semnificație α , din tabele găsim o valoarea λ_0 astfel încît

$$P(D_n < \lambda_0) = 1 - \alpha.$$

Dacă valoarea observată a statisticii D_n este cel puțin egală cu λ_0 , atunci respingem ipoteza H_0 , în caz contrar testul nu trebuie să conducă la respingerea ipotezei H_0 .

Observație. Din

$$P(D_n < \lambda_0) = 1 - \alpha,$$

obținem

$$P \left(F_n(x) - \frac{\lambda_0}{\sqrt{n}} \leq F(x) \leq F_n(x) + \frac{\lambda_0}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \alpha,$$

ceea ce arată că funcția de repartiție adevărată $F(x)$, variază în banda $\left(F_n(x) - \frac{\lambda_0}{\sqrt{n}}, F_n(x) + \frac{\lambda_0}{\sqrt{n}}\right)$ cu probabilitatea $1 - \alpha$. Aceasta este o metodă directă de estimare a funcției de repartiție.

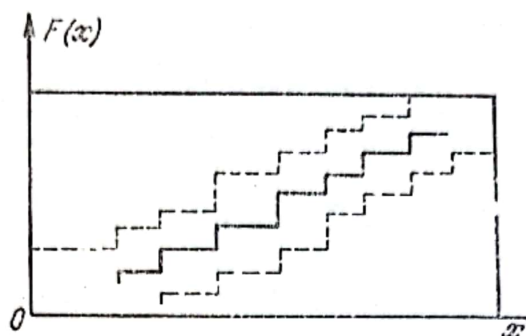


Fig. 9

În figura 9 linia centrală continuă reprezintă funcția $F_n(x)$, fiecare treaptă reprezentînd o observație. Prin urmare volumul selecției este 7. Liniile întrerupte reprezintă marginile bandei de încredere pentru $F(x)$. Acestea sînt la distanța $\lambda_0/\sqrt{n}$ de o parte și de alta a lui $F_n(x)$, făcînd excepție acelea ce dau limite mai mari sau mai mici ca zero.

Teorema lui Smirnov servește ca bază pentru verificarea ipotezei H_0 conform căreia două selecții au fost efectuate asupra unor variabile aleatoare cu aceeași funcție de repartiție continuă. Remarcăm faptul că ipoteza nu trebuie să specifice funcția de repartiție a acestor populații. Dacă $F_n^{(1)}(x)$ și $F_m^{(2)}(x)$ sînt funcțiile de repartiție empirice ale selecțiilor de volum n și respectiv m , efectuate asupra variabilelor considerate, atunci are loc teorema 19.

Fie $X_1^{(1)}, \dots, X_n^{(1)}$ ($X_1^{(2)}, \dots, X_m^{(2)}$) o selecție asupra unei variabile aleatoare $X^{(1)}$ ($X^{(2)}$) cu funcția de repartiție $F^{(1)}$ ($F^{(2)}$). Ne propunem să verificăm ipoteza

$$F^{(1)}(x) = F^{(2)}(x)$$

Dacă valoarea observată a statisticii

$$\sqrt{\frac{mn}{m+n}} \sup_x |F_n^{(1)} - F_m^{(2)}|$$

este cel puțin egală cu λ_0 , unde λ_0 este astfel încît

$$P\left(\sqrt{\frac{mn}{m+n}} \sup_x |F_n^{(1)} - F_m^{(2)}| < \lambda_0\right) = 1 - \alpha$$

respingem ipoteza H .

Aceste teste vor fi aplicate numai atunci cînd nu cunoaștem forma funcțională a funcției de repartiție.

4.2. Puterea testului Kolmogorov

Fie $F(x)$ funcția de repartiție a variabilei aleatoare X continuă și strict crescătoare aproape peste tot, a cărei formă este necunoscută. Dorim să verificăm ipoteza

$$H_0 : F(x) \equiv F_0(x),$$

față de alternativa

$$H_1 : F(x) \equiv G(x),$$

unde $F_0(x)$ și $G(x)$ sînt funcții date. Vom folosi testul bazat pe repartiția statisticii

$$(19) \quad D_n^* = \sup_x \sqrt{n}(F_0(x) - F_n(x)).$$

Respingem ipoteza H_0 la pragul de semnificație α și acceptăm ipoteza alternativă H_1 dacă valoarea observată d_n^* a lui D_n^* satisface inegalitatea

$$d_n^* \geq \lambda_{n,\alpha},$$

unde $\lambda_{n,\alpha}$ este ales astfel că, dacă ipoteza H_0 este adevărată, avem

$$P_{F_0}(D_n^* \geq \lambda_{n,\alpha}) = \alpha.$$

Cu alte cuvinte, respingem ipoteza H_0 și acceptăm ipoteza H_1 dacă pentru o valoarea a lui x are loc inegalitatea

$$\sqrt{n}(F_0(x) - F_n(x)) \geq \lambda_{n,\alpha}.$$

Valorile lui $\lambda_{n,\alpha}$ pentru diferite valori ale lui n și α sînt tabelate. Pentru $n > 50$ putem folosi repartiția limită a statisticii D_n^* .

Determinăm puterea acestui test. Găsim probabilitatea

$$(20) \quad \pi = P_G(D_n^* \geq \lambda_{n,\alpha}).$$

Evenimentul $(D_n^* < \lambda_{n,\alpha})$ se realizează dacă și numai dacă pentru $1 \leq k \leq n$ au loc inegalitățile

$$(21) \quad F_0(y_k) - \frac{k-1}{n} \leq \frac{\lambda_{n,\alpha}}{\sqrt{n}}$$

unde $y_1 < y_2 < \dots < y_n$ sînt valorile observate $x_1, x_2, \dots, x_n$ ordonate. Se observă că relația $d_n^* < \lambda_{n,\alpha}$ implică inegalitatea (21). Pe de altă parte, deoarece $F_0(x)$ este o funcție crescătoare și $F_n(x)$ este o funcție în scară

nedescreșcătoare, observăm că dacă (21) este satisfăcută pentru $1 \leq k \leq n$, atunci $d_n^* < \lambda_{n,\alpha}$. Din (20) obținem

$$(22) \quad 1 - \pi = P_G \left(F_0(y_k) - \frac{k-1}{n} < \frac{\lambda_{n,\alpha}}{\sqrt{n}}, 1 \leq k \leq n \right) =$$

$$= P_G \left[y_k < F_0^{-1} \left(\frac{k-1}{n} + \frac{\lambda_{n,\alpha}}{\sqrt{n}} \right); 1 \leq k \leq n \right] =$$

$$(22') \quad = P_G \left\{ G(y_k) < G \left[F_0^{-1} \left(\frac{k-1}{n} + \frac{\lambda_{n,\alpha}}{\sqrt{n}} \right) \right]; 1 \leq k \leq n \right\},$$

unde F_0^{-1} este funcția inversă corespunzătoare funcției $F_0(x)$. Se știe că dacă $G(y)$ este funcția de repartiție continuă a variabilei aleatoare y , atunci variabila aleatoare $z = G(y)$ are o repartiție uniformă în intervalul $[0, 1]$. Prin urmare $z_k = G(y_k)$ ($1 \leq k \leq n$) este o statistică a ordinii. Densitatea de repartiție a variabilei aleatoare z_k este $f(z_k) = 1$, iar probabilitatea elementară a vectorului $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ este

$$n! dz_1 \dots dz_n.$$

Ținând seama de acest fapt (22') devine (Birnbaum (1953))

$$(23) \quad 1 - \pi = n! \int_0^R \left(\frac{\lambda_{n,\alpha}}{\sqrt{n}} \right) \int_{z_1}^R \left(\frac{1}{n} + \frac{\lambda_{n,\alpha}}{\sqrt{n}} \right) \dots \int_{z_{n-1}}^R \left(\frac{n-1}{n} + \frac{\lambda_{n,\alpha}}{\sqrt{n}} \right) dz_n dz_{n-1} \dots dz_2 dz_1,$$

unde

$$(24) \quad R(v) = \begin{cases} \lim_{0 < v \rightarrow 0} G[F_0^{-1}(v)], & v \leq 0 \\ G[F_0^{-1}(v)], & 0 < v < 1 \\ \lim_{1 > v \rightarrow 1} G[F_0^{-1}(v)], & v \geq 1 \end{cases}$$

Dacă $G(x) \equiv F_0(x)$ atunci $G(F_0^{-1}(v)) = v$, formula (23) devenind mai simplă; formula (23) are loc chiar fără presupunerea că $F_0(x)$ este strict crescătoare.

Cînd nu se poate obține valoarea exactă a integralei ce apare în expresia puterii, vom folosi metode numerice aproximative.

Ne propunem că verificăm ipoteza

$$H_0 : F(x) \equiv F_0(x)$$

față de alternativa

$$H_2 : F(x) \equiv G(x)$$

unde

$$(25) \quad \sup_{x \in R} (F_0(x) - G(x)) = \delta > 0$$

și $G(x_0)$ dată, satisface relația

$$(26) \quad F_0(x) - G(x_0) = \delta.$$

Prin urmare ipoteza H_2 nu specifică funcția de repartiție $G(x)$, arătând numai că $G(x)$ aparține la mulțimea funcțiilor de repartiție continue, ce satisfac (25) și (26). În acest caz nu putem calcula valoarea integralei din (23).

Să considerăm funcția

$$(27) \quad G^*(x) = \begin{cases} F_0(x_0) - \delta, & x \leq x_0, \\ 1, & x > x_0 \end{cases}$$

și să introducem următoarele notații

$$(28) \quad \mu_0 = G(x_0), \quad v_0 = F_0(x_0), \quad j = E \left[n \left(v_0 - \frac{\lambda_{n,\alpha}}{\sqrt{n}} \right) \right].$$

Din (24), (26), (27) și (28) obținem

$$(29) \quad R^*(v) = \begin{cases} \mu_0, & 0 < v \leq v_0 \\ 1, & v_0 < v < 1 \end{cases}$$

Pentru o funcție de repartiție $G(x)$ arbitrară, avem

$$(30) \quad R(v_0) = \mu_0.$$

Din (28) pentru $k-1 \leq j$, obținem

$$(31) \quad \frac{k-1}{n} + \frac{\lambda_{n,\alpha}}{\sqrt{n}} \leq \frac{j}{n} + \frac{\lambda_{n,\alpha}}{\sqrt{n}} \leq v_0.$$

Deoarece $R(v)$ este o funcție nedescrescătoare, din (30) și (31) pentru $k-1 \leq j$, rezultă

$$(32) \quad R \left(\frac{k-1}{n} + \frac{\lambda_{n,\alpha}}{\sqrt{n}} \right) \leq R(v_0) = \mu_0.$$

Dacă în integrala (23) înlocuim limita superioară de integrare $R(v)$ prin $R^*(v)$ dată de (29) atunci valoarea acestei integrale nu descrește. Prin urmare

$$(33) \quad 1 - \pi \leq n! \int_0^{u_0} \dots \int_{z_j}^{u_0} \int_{z_{j+1}}^1 \dots \int_{z_{n-1}}^1 dz_n \dots dz_j dz_{j+1} \dots dz_1.$$

Calculind integrala din membrul drept al inegalității (33) obținem

$$(34) \quad \pi \geq \sum_{k=1}^{j+1} C_n^{k-1} \mu_0^{k-1} (1 - \mu_0)^{n-k+1} = \\ = \sum_{t=1}^j C_n^t \mu_0^t (1 - \mu_0)^{n-t} = 1 - B_{\mu_0}(j+1, n-j),$$

unde $B_{\mu_0}(j+1, n-j)$ este funcția beta incompletă.

(34) dă cea mai mare margine inferioară a puterii acestui test (a fost găsită de Z. W. Birnbaum (1953)).

Din formula (34) poate să se obțină o expresie asimptotică pentru cea mai mare margine inferioară a puterii testului.

Utilizînd metoda lui Massey (1950)), găsim cea mai mare margine inferioară pentru testul bazat pe statistica D_n , aceeași metodă putînd fi aplicată și la testul bazat pe statistica D_n^* .

Fie $F(x)$ funcția de repartiție continuă necunoscută, ipoteza nulă $H_0: F(x) \equiv F_0(x)$ și alternativa $H_3: F(x) \equiv G(x)$, unde $F_0(x)$ este o funcție dată. $G(x)$ satisface relația.

$$(35) \quad \sup_{x \in R} |F_0(x) - G(x)| = \delta > 0,$$

iar $G(x_0)$ dată, satisface relația

$$(36) \quad |F_0(x) - G(x_0)| = \delta$$

Aplicăm testul lui Kolmogorov. Astfel respingem ipoteza H_0 și acceptăm alternativa dacă valoarea observată $d_n > \lambda_\alpha$, unde λ_α satisface relația

$$(37) \quad P(D_n > \lambda_\alpha) = \alpha$$

Numărul λ_α poate fi găsit din tabele. Puterea acestui test este dată de expresia

$$\pi = P_G(D_n \geq \lambda_\alpha)$$

Avem

$$\pi \geq P_G(\sqrt{n} |F_n(x_0) - F_0(x_0)| \geq \lambda_\alpha) = \\ = 1 - P_G\left(F_0(x_0) - \frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{n}} < F_n(x_0) < F_0(x_0) + \frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{n}}\right)$$

Punînd

$$F_0(x_0) = G(x) \pm \delta$$

obținem

$$(38) \quad \pi \geq 1 - P\left(\frac{-\lambda_\alpha \pm \delta \sqrt{n}}{\sqrt{G(x_0)(1-G(x_0))}} < \frac{(F_n(x_0) - G(x_0))\sqrt{n}}{\sqrt{G(x_0)(1-G(x_0))}} < \right. \\ \left. < \frac{\lambda_\alpha \pm \delta \sqrt{n}}{\sqrt{G(x_0)(1-G(x_0))}}\right).$$

Observăm că dacă H_3 este adevărată, atunci, conform teoremei Moivre-Laplace, $F_n(x_0)$ este asimptotic repartizată

$$N(G(x_0); \sqrt{G(x_0)(1-G(x_0))/n}).$$

Din (38) obținem

$$(39) \quad \pi \geq 1 - \int_a^b \varphi(t) dt,$$

unde

$$(40) \quad a = \frac{-\lambda_\alpha \pm \delta \sqrt{n}}{\sqrt{G(x_0)(1-G(x_0))}}, \quad b = \frac{\lambda_\alpha \pm \delta \sqrt{n}}{\sqrt{G(x_0)(1-G(x_0))}}$$

Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ statisticile de ordine corespunzătoare unei selecții asupra unei variabile X cu funcția de repartiție $F(x)$ continuă. Ne propunem să verificăm ipotezele

$$H_0: F(x) = F(x)$$

$$H_1: F(x) = G^{(n)}(x)$$

astfel încît

$$\sup_x |H(x) - G^{(n)}(x)| = \delta_n = \delta n^{-1/2} + o(n^{-1/2}), \quad \delta > 0$$

și sup este luat într-un punct ζ_n , adică

$$\delta_n = |H(\zeta_n) - G^{(n)}(\zeta_n)|.$$

Dacă pentru verificarea acestor ipoteze folosim statistica Kolmogorov-Smirnov

$$K_n = \sup_x n^{1/2} |F_n(x) - H(x)|,$$

atunci pentru valori mari ale lui n , puterea testului Kolmogorov-Smirnov este mărginită (Quade (1965)) de

$$(41) \quad \begin{cases} 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \exp[-2k^2(d_n(\alpha) - n^{1/2} \delta_n)^2], & n^{1/2} \delta_n < d_n(\alpha) \\ 1, & n^{1/2} \delta_n \geq d_n(\alpha) \end{cases}$$

unde $d_n(\alpha)$ este determinată din relația

$$(42) \quad P_{H(x)}\{K_n \geq d_n(\alpha)\} = \alpha$$

Găsim margini asimptotice pentru puterea testului Kolmogorov-Smirnov.

Fie $X_1, X_2, \dots, X_m(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ statisticile de ordine corespunzătoare unei selecții de volum $m(n)$ asupra unei variabile aleatoare

$X(Y)$ cu funcția de repartiție $F(G)$, variabilele X și Y fiind independente. Presupunem că $m/n = \tau > 0$, τ o constantă și considerăm verificarea ipotezei

$$H_0: F(x) = G(x)$$

față de

$$H_{1n}: F(x) = F^{(1)}(x), G(x) = G_{(n)}^{(1)}(x)$$

astfel cu

$$\sup_x |F^{(1)}(x) - G_{(n)}^{(1)}(x)| = \delta_n = \delta^{-\frac{1}{2}} + o(n^{-\frac{1}{2}}), \delta > 0$$

și sup este luat în niște puncte η_n , adică

$$|F^{(1)}(\eta_n) - G_{(n)}^{(1)}(\eta_n)| = \delta_n$$

Vom respinge ipoteza H_0 dacă

$$K_{m,n} = \sup_x \left(\frac{mn}{m+n} \right)^{1/2} |F_m(x) - G_n(x)| \geq d_n(\alpha)$$

unde: — $F_m(G_n)$ este funcția de repartiție empirică corespunzătoare selecției asupra variabilei $X(Y)$,
— $d_n(\alpha)$ este determinată din relația:

$$P_F\{(K_{m,n} \geq d_n(\alpha))\} = \alpha$$

Massey (1950) arată că pentru valori mari ale lui n , marginea inferioară pentru puterea acestui test este dată de

$$(43) \quad 1 - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varphi(t) dt,$$

cu

$$(44) \quad \lambda_1 = (A - B)/C, \quad \lambda_2 = (A + B)/C$$

unde

$$(45) \quad A = \delta_n, \quad B = \left(\frac{mn}{m+n} \right)^{-1/2} d_n(\alpha),$$

$$C = \left\{ \frac{F^{(1)}(\eta_n)[1 - F^{(1)}(\eta_n)]}{m} + \frac{G_{(n)}^{(1)}(\eta_n)[1 - G_{(n)}^{(1)}(\eta_n)]}{n} \right\}^{1/2}$$

Capon (1965) observă că deoarece

$$\lambda_1 \geq \lambda'_1 = 2 \left[\delta_n \left(\frac{mn}{m+n} \right)^{1/2} - d_n(\alpha) \right], \text{ pentru } \delta_n \left(\frac{mn}{m+n} \right)^{1/2} - d_n(\alpha) > 0,$$

puterea testului Kolmogorov-Smirnov, pentru valori mari ale lui n , este mărginită inferior de

$$(46) \quad 1 - \int_{\lambda_1'}^{\infty} \varphi(t) dt.$$

Pentru a obține o margine superioară pentru puterea testului bazat pe statistica $K_{m,n}$ pentru verificarea ipotezei H_0 folosim (41). Putem să scriem :

$$\sup_x |F_m(x) - G_n(x)| \leq \sup_x |F^{(1)}(x) - G_n(x)| + \sup_x |F_m(x) - F^{(1)}(x)|$$

Pentru $0 < \gamma < 1$, fie

$$\left(\frac{mn}{m+n} \right)^{1/2} \sup_x |F^{(1)}(x) - G_n(x)| < (1 - \gamma) d_n(\alpha)$$

și

$$\left(\frac{mn}{m+n} \right)^{1/2} \sup_x |F_m(x) - F^{(1)}(x)| < \gamma d_n(\alpha)$$

Aceste două inegalități implică

$$\left(\frac{mn}{m+n} \right)^{1/2} \sup_x |F_m(x) - G_n(x)| < d_n(\alpha)$$

Deci, din independența variabilelor aleatoare X și Y , avem

$$(47) \quad \begin{aligned} & P_{F^{(1)}, G^{(1)}} \left\{ \left(\frac{mn}{m+n} \right)^{1/2} \sup_x |F_m(x) - G_n(x)| < d_n(\alpha) \right\} \geq \\ & \geq P_{G^{(1)}} \left\{ n^{1/2} \sup_x |F^{(1)}(x) - G_n(x)| < (1 - \gamma) \left(\frac{m+n}{m} \right)^{1/2} d_n(\alpha) \right\} \times \\ & \times P_{F^{(1)}} \left\{ m^{1/2} \sup_x |F_m(x) - F^{(1)}(x)| < \gamma \left(\frac{m+n}{n} \right)^{1/2} d_n(\alpha) \right\}. \end{aligned}$$

Luînd $\gamma = (n/(n+m))^{1/2}$, obținem

$$P\{m^{1/2} \sup_x |F_m(x) - F^{(1)}(x)| < d_n(\alpha)\} = 1 - \alpha$$

și

$$\begin{aligned} & P_{G^{(1)}} \left\{ n^{1/2} \sup_x |F^{(1)} - G_n(x)| < \frac{(\tau + 1)^{1/2} - 1}{\tau^{1/2}} d_n(\alpha) \right\} \geq \\ & \geq 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} e^{-2k^2} \left(\frac{(\tau + 1)^{1/2} - 1}{\tau^{1/2}} d_n(\alpha) - n^{1/2} \delta_n \right)^2 \end{aligned}$$

Pentru valori mari ale lui n , $d_n(\alpha)$ poate fi aproximată (Hodges (1957)) prin $\left[\frac{1}{2} \ln(2/\alpha)\right]^{1/2}$. Avem

$$(48) \quad P_{F^{(1)}, G^{(1)}} \left\{ \left(\frac{mn}{m+n} \right)^{1/2} \sup_x |F_m(x) - G_n(x)| < d_n(\alpha) \right\} \geq \\ \geq (1-\alpha) \left(1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} e^{-2k^2} \left(\frac{(\tau+1)^{1/2} - 1}{\tau^{1/2}} \left[\frac{1}{2} \ln(2/\alpha) \right]^{1/2} - n^{1/2} \delta_n \right)^2 \right)$$

Observăm că membrul stâng al inegalității (48) este unu minus puterea testului bazat pe $K_{m,n}$; deci puterea testului bazat pe $K_{m,n}$ este mărginită superior (Yu (1971)) de

$$(49) \quad \alpha + 2(1-\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} e^{-2k^2} \left(\frac{(\tau+1)^{1/2} - 1}{\tau^{1/2}} \left[\frac{1}{2} \ln(2/\alpha) \right]^{1/2} - n^{1/2} \delta_n \right)^2 < \\ < \alpha + 2(1-\alpha) e^{-2} \left(\frac{(\tau+1)^{1/2} - 1}{\tau^{1/2}} \left[\frac{1}{2} \ln(2/\alpha) \right]^{1/2} - n^{1/2} \delta_n \right)^2$$

4.3. Consistența testului Kolmogorov

Are loc

TEOREMA 22. *Testul Kolmogorov este consistent în raport cu mulțimea funcțiilor de repartiție continue, satisfăcând (35).*

Demonstrație. Fie $G(x)$ satisfăcând această relație și fie această adevărată funcție de repartiție.

Atunci

$$\delta = \sup_{x \in R} |G(x) - F_0(x)| = \sup_{x \in R} |G(x) - F_n(x) + F_n(x) - F_0(x)| \leq \\ \leq \sup_{x \in R} |G(x) - F_n(x)| + \sup_{x \in R} |F_n(x) - F_0(x)|$$

sau

$$\sup_{x \in R} |F_n(x) - F_0(x)| \geq \delta - \sup_{x \in R} |G(x) - F_n(x)|.$$

După teorema lui Glivenko și ținând seama că $G(x)$ este funcția de repartiție adevărată, obținem

$$(50) \quad P(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in R} |F_n(x) - F_0(x)| \geq \delta) = 1.$$

Notăm prin $\lambda_{n,\alpha}$ numărul ce satisface egalitatea

$$P(D_n \geq \lambda_{n,\alpha}) = \alpha$$

Astfel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi = \lim_{n \rightarrow \infty} P_G \left[\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F_0(x)| \geq \frac{\lambda_{n,\alpha}}{\sqrt{n}} \right]$$

Din teorema lui Kolmogorov, urmează că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n,\alpha} = \lambda_\alpha$$

Prin urmare pentru n suficient de mare, avem $(\lambda_{n,\alpha}/\sqrt{n}) < \delta$ și din relația (50) obținem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi = 1$$

astfel că testul Kolmogorov este consistent în raport cu mulțimea funcțiilor de repartiție alternative considerate aici.

BIBLIOGRAFIE

1. ANDERSON, T. W., *An introduction to multivariate statistical analysis*. John Wiley, New York, 1958.
2. ANDERSON, T. W., *A test for equality of means when covariance matrices are unequal*. Ann. Math. Statist., **34**, 2 (1963).
3. ANDERSON, T. W., DAS GUPTA, S., *A monotonicity property of the power functions of some tests of the equality of two covariance matrices*. Ann. Math. Statist., **35**, 1059–1063 (1964).
4. ARMITAGE, P., *Tests for linear trends in proportions and frequencies*. Biometrics **11**, 375 (1955).
5. ARMSSEN, P., *Tables for significance tests of 2×2 contingency tables*. Biometrika, **42**, 494 (1955).
6. BAHADUR, R. R., *Stochastic comparison of tests*. Ann. Math. Statist. **31**, 276–295 (1960).
7. BAHADUR, R. R., *On asymptotic efficiency of tests and estimates* Sankhya **22**, 229–252 (1960 b).
8. BAHADUR, R. R., *On Fisher's bound for asymptotic variances*. Ann. Math. Statist. **35**, 1545–1552 (1964).
9. BAHADUR, R. R., *A note on quantiles in large samples*. Ann. Math. Statist. **37**, 577–580 (1966).
10. BAHADUR, R. R., *Rates of convergence of estimates and test statistics*. Ann. Math. Statist., **38**, 303–327 (1967).
11. BARNARD, G. A., *Significance tests for 2×2 tables*. Biometrika, **34**, 123 (1947).
12. BARNARD, G. A., *2×2 tables. A note on E. S. Pearson's paper*. Biometrika, **34**, 168 (1947).
13. BARTLETT, M. S., *Properties of sufficiency and statistical tests*. Proc. Roy. Soc. London A. **160**, 268–282 (1937).
14. BARTLETT, M. S., *A note on the multiplying factors for various chi-squared approximations*. J. R. Statist. Soc. B. **16**, 296–298 (1954).
15. BASU, D., *On statistics independent of a complete sufficient statistic*. Sankhya, **15**, 377–380 (1955).
16. BASU, D., *On the concept of asymptotic efficiency*. Sankhya, **17**, 193–196 (1956).
17. BAUMANN, V., *Eine parameterfreie Theorie der ungünstigsten Verteilungen für das Testen von Hypothesen*. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete, **11**, 41–60 (1968).
18. BENNETT, B. M., UNDERWOOD, E. E., *On Mc Nemar's test for the 2×2 table and its power function*. Biometrics, **26**, 339–343 (1970).
19. BENNETT, B. M., HSU, P., *On the power function of the exact test for the 2×2 contingency table*. Biometrika, **47**, 393 (1960).
20. BERGER, A., *On uniformly consistent tests*. Ann. Math. Statist., **22**, 289–293 (1951).
21. BIRNBAUM, Z. W., *Numerical Tabulation of the Distribution of Kolmogorov's Statistic for Finite Sample Size*. J. Amer. Statist. Assoc., **47**, 425–441 (1952).
22. BIRNBAUM, Z. W., *On the power of a one sided test of fit for continuous probability functions*. Ann. Math. Statist., **24**, 484 (1953).
23. BIRNBAUM, Z. W., *Combining independent tests of significance*. J. Amer. Statist. Ass., **49**, 559–574 (1954).
24. BIRNBAUM, Z. W., *On a use of the Mann-Whitney statistic*. Proc. Third. Berkeley Symp., **1**, 13 (1955).
25. BIRNBAUM, Z. W., *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*. Harper Brothers Publishers, New York, 1962.
26. BIRNBAUM, Z. W., TINGEY, F. H., *One-sided confidence contours for Probability Distribution Functions*. Ann. Math. Statist., **22**, 592–596. (1951).
27. BISHOP, Y. M. M., *Full contingency tables, logits, and split contingency tables*. Biometrics, **25**, 383–400 (1969).
28. BORTKIEWICZ, L., *Die Iterationen, Ein Beitrag zur Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Springer, Berlin, 1917.

29. BOX, G. E. P., *A general distribution theory for a class of likelihood criteria*. Biometrika, **36**, 317–346 (1948).
30. BOX, G. E. P., *Some theorems on quadratic forms applied in the study of analysis of variance problems. I. Effect of inequality of variance in one way classification*. Ann. Math. Statist., **25**, 290–302 (1954).
31. BRENY, H., *L'état actuel du problème de Behrens-Fisher*. Trabajos de Estadísticas, vol. 6, Cuaderno II, 111–131 (1955).
32. BROSS, I. D. J., KASTEN, E. L., *Rapid analysis of 2×2 tables*. J. Amer. Statist. Ass., **52**, 18 (1957).
33. BROWN, D. T., *A note on approximations to discrete probability distributions*. Information and Control, **2**, 386–392 (1959).
34. BROWN, G. W., *On the power of the L_1 test for equality of several variances*. Ann. Math. Statist., **10**, 119–128 (1939).
35. CAPON, J., *On the asymptotic efficiency of the Kolmogorov-Smirnov test*. J. Amer. Statist. Ass., **60**, 843–853 (1965).
36. CENȚOV, H. H., *Stabilitatea chodimosti sluciatinthe profesor s traektoritami bez razrivov vlorovo roda*. Teoria verosiatnostei i ee primeneniye **1**, 154–161 (1956).
37. CHAND, UTTAM, *Distribution related to comparison of two means and two regression coefficients*. Ann. Math. Statist., **21**, 507–522 (1950).
38. CHERNOFF, H., LEHMANN, E. L., *The use of maximum likelihood estimates in χ^2 test for goodness of fit*. Ann. Math. Statist., **25**, 579 (1954).
39. CHERNOFF, H., SCHEFFÉ, H., *A generalization of the Neyman-Pearson fundamental lemma*. Ann. Math. Stat., **23**, 213–225 (1952).
40. CIUCU, G., CRAIU, V., *Introducere în teoria probabilităților și statistică matematică*. Edit. didactică și pedagogică, București, 1971.
41. CIUCU, G., CRAIU, V., *Teoria estimărilor și verificarea ipotezelor statistice*. Edit. didactică și pedagogică, București, 1968.
42. CIUCU, G., CRAIU, V., *Inferență statistică*. Edit. didactică și pedagogică, București, 1974.
43. COCHRAN, W. G., *The χ^2 -test of goodness of fit*. Ann. Math. Statist., **23**, 315 (1952).
44. COHEN, A., STRAWDERMAN, W. E., *Unbiasedness of tests for homogeneity of variances*. Ann. Math. Statist., **42**, 355–360 (1971).
45. COLOMBO, B., *Contributo statistico ad un tentativo di discriminazione biometrica di popolazioni o razze geografiche di teleostei del genere Bregmaceros*. Rendic. Ac. Naz. Lincei., **14**, fasc. 1–2 (1955).
46. CONSUL, P. C., *The exact distribution of likelihood ratio criteria for different hypothesis*. Multivariate Analysis. II. Ed. P. R. Krishnaiah. Academic Press, New York, 1969.
47. COX, D. R., *The continuity correction*. Biometrika, **57**, 217–219 (1970).
48. CRAIU, MARIANA, *Un test privind egalitatea mediilor a 2 populații log-normale în cazul coeficienților de dispersie omogeni*. St. cerc. mat., **24**, 1, 3–6 (1972).
49. CRAIU, V., *Verificarea ipotezelor statistice*. Edit. didactică și pedagogică, București, 1972.
50. CUSIMANO, G., *La metodologia statistica condizionata dall'analisi di piu variabili*. Delf. Palermo, 1955.
51. DALL'AGLIO, G., *Analisi delle medie, delle varianze e della covarianza*. Inst. Stat. Roma, 1960.
52. VAN DANTZIG, D., *On the consistency and the power of Wilcoxon two-sample test*. Kon-Nederl. Akad. Wetensch. Proc. A, **54**, 1–9 (1951).
53. DANTZIG, G. B., WALD, A., *On the fundamental lemma of Neyman and Pearson*. Ann. Math. Statist., **22**, 87–93 (1951).
54. DARROCH, J. N., *Interactions in Multi-factor Contingency Tables*. J. R. Statist. Soc., B, **24**, 251–263 (1962).
55. DIXON, W. J., *Power functions of the sign test and power efficiency for normal alternative*. Ann. Math. Statist., **24**, 467–473 (1953).
56. DIXON, W. J., *Power under normality of several nonparametric tests*. Ann. Math. Statist., **25**, 610–614 (1954).
57. DOOB, J. L., *Heuristic approach to the Kolmogorov-Smirnov theorems*. Ann. Math. Statist., **20** (1949).
58. DOOB, J. L., *Stochastic Processes*. Wiley, New York, 1953.
59. DONSKER, M., *Justification and extension of Doob's heuristic approach to the Kolmogorov-Smirnov theorems*. Ann. Math. Statist., **23** 277–281 (1952).
60. EEDEN, CONSTANCE, VAN., *The relation between Pitman's asymptotic relative efficiency of two tests and the correlation coefficient between their test statistics*. Ann. Math. Statist., **34**, 1442–1452 (1963).
61. ERDELYI, A(Editor), *Higher Transcendental Functions I*. Mc. Graw Hill, New York, 1953.
62. FELLER, W., *An Introduction to Probability Theory and its Applications*. 1. Ed. a 2-a Wiley. New York, 1957.

63. FINNEY, D. J., *The Fisher-Yates test of significance in 2×2 contingency tables*. Biometrika, **35**, 145 (1941 a).
64. FINNEY, D. J., *On the distribution of a variate whose logarithm is normally distributed* J. R. Statist. Soc. Suppl., **7**, 155–161 (1941 b).
65. FISHER, R. A., *On the interpretation of chi-square from contingency tables, and the conclusion of P. J. R. Statist. Soc.* **58**, 87. 1922.
66. FISHER, R. A., *On a property connecting the χ^2 measure of discrepancy with the method of maximum likelihood*. Atti Congr. Int. Mat. Bologna, **6**, 94 (1928).
67. FISHER, R. A., *Statistical Methods for Research Workers*. Ed. 5-a Oliver & Boyd, Edinburgh, 1934.
68. FISZ, M., *Probability Theory and Mathematical Statistics*. Wiley New York, 1963.
69. FREEMAN, H., *Introduction to statistical inference*. Addison Wesley. Publishing. Reading, Massachusetts, 1963.
70. GIBBONS, J. D., *Nonparametric Statistical Inference*. Mc. Graw-Hill Book Company, New-York, 1971.
71. GIKMAN, I. I., SCORODOD, A. V. *V Vedenie v teoriiu sluchainykh professov*. Izd. Nauka Moskva, 1965.
72. GLEESER, L. J., *On a measure of test efficiency proposed by R. R. Bahadur*. Ann. Math. Statist., **35**, 1537–1544 (1964).
73. GLEESER, LEON, J., *A note on the sphericity test*. Ann. Math. Statist., **37**, 464–467 (1966).
74. GLEESER, LEON J., *Correction to „A note on the sphericity test”*. Ann. Math. Statist., **39**, 684 (1968).
75. GNANADESIKAN, R., *Equality of more than two variances and of more than two dispersion matrices against certain alternatives*. Ann. Math. Statist., **30**, 1 (1959).
76. GOOD, I. J., *Maximum entropy for hypothesis formulation, especially for multidimensional contingency tables*. Ann. Math. Statist., **28**, 861–881 (1963).
77. GOODMAN, L. A., *Simple methods for analyzing three-factor interactions in contingency tables*. J. Amer. Statist. Ass., **59**, 319–352 (1964).
78. GOODMAN, L. A., *The analysis of cross-classified data: independence quasi-independence, and interaction in contingency tables with or without missing cells*. J. Amer. Statist. Ass. **63**, 1091–1132 (1968).
79. GOODMAN, L. A., *On partitioning χ^2 and detecting partial association in three-way contingency tables*. J. R. Statist. Soc., **B**, 31, 486–498 (1969).
80. GOODMAN, L. A., *The multivariate analysis of qualitative data: interactions among multiple classifications*. J. Amer. Statist. Ass., **65**, 226–256 (1970).
81. GOODMAN, L. A., *Partitioning of chi-square, analysis of marginal contingency tables, and estimation of expected frequencies in multidimensional contingency tables*. J. Amer. Statist. Ass., **66**, 639–644 (1971).
82. GRIZZLE, J. E., *Continuity correction in the X^2 -test for 2×2 tables*. The American Statistician **21**, 28–32 (1967).
83. GUMBEL, E. J., *On the reliability of the classical chi-square test*. Ann. Math. Statist., **14**, 253–294 (1943).
84. HARTLEY, H. O., *The maximum F-ratio as a short cut test for heterogeneity of variance*. Biometrika **37**, 308–312 (1950).
85. HODGES, J. L. Jr., *The significance probability of the Smirnov two-sample test*. Ark. Mat., **43**, 469–486 (1957).
86. HODGES, J. L. Jr., LEHMANN, E. L., *The efficiency of some nonparametric competitors of the t-test*. Ann. Math. Statist., **27**, 324–335 (1956).
87. HOEFFDING, W., ROSENBLATT, J. R., *The efficiency of tests*. Ann. Math. Statist., **26**, 52–63 (1955).
88. HOEL, P. G., *On the chi-square distribution for small samples*. Ann. Math. Statist., **9**, 158–165 (1938).
89. HOGG, R. V., *On the distribution of the likelihood ratio*. Ann. Math. Statist., **27**, 529 (1956).
90. HOGG, ROBERT, V., *On the resolution of statistical hypotheses*. J. Amer. Statist. Ass., **296**, (1961).
91. HOGG, ROBERT V., CRAIG, ALLEN, T., *Sufficient statistics in elementary distribution theory*. Sankhya., **17** (1956).
92. HOGG, R. V., CRAIG, A. T., *On the decomposition of certain χ^2 variables*. Ann. Math. Statist., **29**, 608–610 (1958).
93. IRWIN, J. O., *Tests of significance for differences between percentages based on small numbers*. Metron., **12**, 83–94 (1935).
94. IRWIN, J. O., *A note on the sub-division of χ^2 into components*. Biometrika, **36**, 130 (1949).
95. ISAACSON, St. L., *On the theory of unbiased tests of simple statistical hypotheses specifying the values of two or more parameters*. Ann. Math. Statist., **22**, 217–234 (1951).
96. JAMES, A. T., *Distribution of matrix variates and latent roots derived from normal samples*. Ann. Math. Statist., **35**, 475–501 (1964).

97. JOHN, S., *Some optimal multivariate test*. Biometrika, **58**, 123—127 (1971).
98. JOHNSON, N. L., TETLEY, H., *Statistics: An intermediate Text Book* vol. II. Cambridge University Press, London, 1950.
99. KAGAN, A. M., SALAEVSKY, O. V., *Problema Berensa-Fišera — sušestvovanie podobnix zon v algebre dostatočnix statistič. Dokladi Akademii Nauk. S.S.S.R.*, **6**, 1 250—1 252 (1955).
100. KAKUTANI, S., *On equivalence of infinite product measures*. Ann. of Math., **2**, 49, 214—224 (1948).
101. KARLIN, Samuel, *Pólya type distribution II*. Ann. Math. Statist., **28**, 281—308 (1957).
102. KARLIN, S., *Mathematical methods and theory of games*. Programming and economics. II. Pergamon Press-Addison. Oxford, London, 1959.
103. KENDALL, M. G., STUART, A., *The Advanced theory of Statistics. Inference and Relationship*. Vol. II. Charles Griffin & Company Limited London, 1961.
104. KHATRI, C. G., SRIVASTAVA, M. S., *On exact non-null distributions of likelihood ratio criteria for sphericity test and equality of two covariance matrices Sankhya. A.*, **33**, 2, 201—207 (1971).
105. KHATRI, C. G., SRIVASTAVA, M. S., *Asymptotic expansions of the non-null distributions of likelihood ratio criteria for covariance matrices*. Ann. Statist., **2**, 109—118 (1974).
106. KOLMOGOROV, A., *Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione*. Giorn. Inst. Ital. Attuari., **4**, 83—91 (1933).
107. KOLMOGOROV, A., *Confidence Limits for an Unknown Distribution Function*. Ann. Math. Statist., **12**, 461—463 (1941).
108. KRAFFT, O., WITTING, H., *Optimale Tests und ungünstige Verteilungen*. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete, **7**, 289—302 (1967).
109. KRAFT, CH., *Some conditions for consistency and uniform consistency of statistical procedures*. Univ. California Publ. Statist., **2**, 125—141 (1955).
110. LANCASTER, H. O., *The derivation and partition of χ^2 in certain discrete distributions*. Biometrika, **36**, 117 (1949).
111. LANCASTER, H. O., *The exact partition of χ^2 and its application to the problem of the pooling of small expectations*. Biometrika, **37**, 287 (1950).
112. LANDENNA, G., *I tests non parametrici basati sulle frequenze*. Inst. Stat. Roma, 1960.
113. LAPLACE, P. S., *Théorie Analytique des Probabilités*. Ed. 3-a Courcier, Paris, 1820.
114. LATSCHA, R., *Tests of significance in a 2×2 contingency table: extension of Finney's tables*. Biometrika, **40**, 74 (1953).
115. LEHMANN, E. L., *On families of admissible tests*. Ann. Math. Statist., **18**, 97—104 (1947).
116. LEHMANN, E. L., *Some principles of the theory of testing hypotheses*. Ann. Math. Statist., **21**, 1—26 (1950).
117. LEHMANN, E. L., *Consistency and unbiasedness of certain non parametric tests*. Ann. Math. Statist., **22**, 165—179 (1951).
118. LEHMANN, E. L., *Testing multiparameter hypotheses*. Ann. Math. Statist., **23**, 541—552 (1952).
119. LEHMANN, E. L., *The power of rank tests*. Ann. Math. Statist., **24**, 23—43 (1953).
120. LEHMANN, E. L., *Ordered families of distributions*. Ann. Math. Statist., **26**, 399—419 (1955).
121. LEHMANN, E. L., *Testing statistical hypotheses*. John Wiley, New York, 1959.
122. LEHMANN, E. L., SCHEFFÉ, HENRY, *Completeness, similar regions, and unbiased estimation*. Sankhya, **10**, 305—340 (1950); **15**, 219—236 (1955).
123. LINNIK, YU. V., *O randomizovannix odnorodnix testax dlja problema Berensa-Fišera*. Usvectia Akademii Nauk. S.S.S.R. Seria matematičeskaja, **23**, 2, 249—260 (1964).
124. LINNIK, Y. V., *Leçons sur les problèmes de statistique analytique*. Gauthier-Villars, Paris, 1967.
125. LINNIK, YU. V., ROMANOVSKY, I. V., SUDAKOV, V. N., *Nerandomizovannii adnorodnii test v probleme Berensa-Fišera*. Dokladi Akademii Nauk. S. S. S. R., **153**, 6, 1262—1264 (1964).
126. LOHRDING, R. K., *A test of equality of two normal population means assuming, homogeneous coefficients of variation*. Ann. Math. Stat., **40**, 1 374—1 385 (1969).
127. MANN, H. B., WALD, A., *On the choice of the number of intervals in the application of chi-square test*. Ann. Math. Statist., **13**, 306 (1942).
128. MANN, H. B., WHITNEY, D. R., *On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other*. Ann. Math. Statist., **18**, 50—60 (1947).
129. MANTEL, N., GREENHOUSE, S. M., *What is the continuity correction? The American Statistician*, **22**, 27—30 (1968).
130. MASSEY, F. J. Jr., *A note on the power of a non-parametric procedures in the two sample case*. Ann. Math. Statist., **20**, 440—443 (1950).
131. MASSEY, F. J., *The Kolmogorov-Smirnov Test for Goodness of Fit*. J. Amer. Statist. Ass., **46**, 68—78 (1951).
132. MASSEY, F. J., *The Distribution of the Maximum Deviation between Two Sample Cumulative Step Functions*. Ann. Math. Statist., **22**, 125—128 (1951).
133. MASSEY, F. J., *Distribution Table for the Derivation between Two Sample Cumulative*. Ann. Math. Statist., **23**, 434—441 (1952).

134. MC. CULLOUGH, R. S., GURLAND, J., ROSENBERG, L., *Small sample behaviour of certain test of the hypothesis of equal means under variance heterogeneity*. Biometrika, **47**, 3 și 4, 345–353 (1960).
135. MC. NEMAR, Q., *Note on the sampling error of the differences between correlated proportions of percentages*. Psychometrika, **12**, 153–157 (1947).
136. MEHTA, J. S., SRINIVASAN, R., *On the Behrens-Fisher problem*. Biometrika, **57**, 649–655 (1970).
137. MEHRA, K. L., SARANGI, *Asymptotic efficiency of certain rank tests, for comparative experiments*. Ann. Math. Statist., **38**, 90–108 (1967).
138. MIHOC, GH., FIRESCU, D., *Statistică matematică*. Edit. didactică și pedagogică, București, 1966.
139. MOOD, A. M., *The Distribution Theory of Runs*. Ann. Math. Statist., **11**, 367–392 (1942).
140. MOOD, A. M., *Introduction to the Theory of Statistics*. Mc. Graw-Hill. New York, 1950.
141. MOOD, A. M., *On the Asymptotic Efficiency of Certain Nonparametric Two-sample Tests*. Ann. Math. Statist., **25**, 514–522 (1954).
142. MORRISON, DONALD, F., *Multivariate statistical Methods*. Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1967.
143. MOSTELLER, F., *Note on a Application of Runs to Quality Control Charts*. Ann. Math. Statist., **12**, 228–232.
144. MOSTELLER, F., *Association and estimation in contingency tables*. J. Amer. Statist. Ass., **63**, 1–28 (1968).
145. MUDEOLKAR, G. S., *The integral of an invariant unimodal function over an invariant convex set-an inequality and applications*. Proc. Amer. Math. Soc., **17**, 1 327–1 333 (1966).
146. NAGAO, H., *On some test criteria for covariance matrix*. Ann. Statist., **1**, 700–710 (1973).
147. NAIK, U. D., *On a generalization of the Behrens-Fisher problem*. Biometrika, **61**, 636–640 (1974 a).
148. NAIK, U. D., *On some procedures for testing a linear relation among variances*. J. R. Statist. Soc. B., **36**, 243–258 (1947 b).
149. NANDI, H. K., *On type B_1 and type B regions*. Sankhya **11**, 13–22 (1951).
150. NEYMAN, J., *Sur la vérification des hypothèses statistiques composées*. Bull. Soc. Math. France., **63**, 246–266 (1935).
151. NEYMAN, J., *Outline of a theory of statistical estimation based on the classical theory of probability*. Phil. Trans. Roy. Soc. London, A, **236**, 338–380 (1937).
152. NEYMAN, J., PEARSON, E. S., *On the use and interpretation of certain test criteria for purposes of statistical inference*. Biometrika, **20**, A., 175–240 (1928); 263–294 (1928).
153. NEYMAN, J., PEARSON, E. S., *On the problem of the most efficient tests of statistical hypotheses*. Phil. Trans. Roy. Soc., A, **231** 289–337 (1933).
154. NEYMAN, J., PEARSON, E. S., *Contributions to the theory of testing statistical hypotheses. I. Unbiased critical regions of type A and type A_1* . Stat. Res. Mem. Univ. London, **1**, 1–37 (1936 a).
155. NEYMAN, J., PEARSON, E. S., *Sufficient statistics and uniformly most powerful tests of statistical hypotheses*. Stat. Res. Mem. **1**, 113–137 (1936 b).
156. NEYMAN, J., PEARSON, E. S., *Contributions to the theory of testing statistical hypotheses*. Stat. Res. Mem. Univ. London, **2**, 25–57 (1938).
157. NEYMAN, J., SCOTT, E., *Consistent estimates based on partially consistent observations*. Econometrica, **16**, 1–32 (1948).
158. NOETHER, G. E., *On a theorem by Pitman*. Ann. Math. Statist., **26**, 64–68 (1955).
159. OLKIN, I., SIROTANI, M., *Asymptotic distribution of functions of a correlation matrix*. Technical Report., **6**, Stanford Univ.
160. PARZEN, E., *On uniform convergence of families of sequence of random variables*. Univ. Calif. Publ. Statist., **2**, 2, 23–54 (1954).
161. PATNAIK, P. B., *The power function of the test for the difference between two proportions in a 2×2 table*. Biometrika, **35**, 157 (1948).
162. PEARSON, E. S., HARTLEY, H. O., *Biometrika Tables for Statisticians*. 1. Cambridge University Press, 1958.
163. PEARSON, E. S., *The choice of statistical tests illustrated on the interpretation of data classed in a 2×2 table*. Biometrika, **34**, 139–167 (1947).
164. PEARSON, K., *On the criterion that a given sistem of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can reasonably be supposed to have arisen from random sampling*. Philosophical Magazine 5th Series, **50**, 157–175 (1900).
165. PFANZAGL, J., *On the existence of product measurable densities*. Sankhya, A, **31**, 13–18 (1969).
166. PFANZAGL, J., *On the Behrens-Fisher problem*. Biometrika, **61**, 1, 39–47 (1974).
167. PFANZAGL, J., *On the Behrens-Fisher problem. Correction*. Biometrika, **61**, 3, 647 (1974).
168. PIOTR WITOLD MIKULSKI, *On the Efficiency of optimal nonparametric Procedures in two sample Case*. Ann. Math. Statist., **34**, 22–33 (1963).

169. PIRIE, W. R., HAMDAN, M. A., *Some revised continuity corrections for discrete distributions.* Biometrics, **28**, 693–703 (1972).
170. PITMAN, E. J. G., *Tests of hypotheses concerning location and scale parameters.* Biometrika, **31**, 200 (1939).
171. PITMAN, E. J. G., *Lecture notes on nonparametric statistical inference.* Columbia University, 1949.
172. PLACKETT, R. L., *A note on Interactions in Contingency Tables.* J. R. Statist. Soc. B., **24**, 162–167 (1962).
173. PLACKETT, R. L., *The continuity correction in 2×2 tables.* Biometrika, **51**, 327–337 (1964).
174. QUADE, D., *On the asymptotic power of the one-sample Kolmogorov Smirnov tests.* Ann. Math. Statist., **36**, 1000–1018 (1965).
175. RAMACHANDRAN, K. V., *On the Tukey test for equality of means and the Hartley test for the equality of variances.* Ann. Math. Statist., **27**, 825–832 (1956).
176. RAMACHANDRAN, K. V., *A test of variances.* J. Amer. Statist. Ass. **53**, 741 (1958).
177. RAO, C. R., *Asymptotic efficiency and limiting information.* Proc. Berkely Symp. Math. Statist. and Probab., 531–545 (1961).
178. RAO, C. R., *Efficient estimates and optimum inference procedures in large samples.* J. R. Statist. Soc. B., **24**, 46–72 (1962).
179. RAO, C. R., *Linear Statistical Inference and its applications.* John Wiley, London, 1965.
180. ROBBINS, H., PITMAN, E. J. G., *Application of the method of mixtures to quadratic forms in normal variables.* Ann. Math. Statist., **20**, 552–560 (1949).
181. ROMANOVSKY, I. V., SUDAKOV, V. N. Tr. Matem. inst. im V. A. Steklova. A. N. S.S.S.R. (1964).
182. ROY, S. N., BOSE, R. C., *On a heuristic method of test construction and its use in multivariate analysis.* Ann. Math. Statist., **24**, 220–238 (1953).
183. ROY, S. N., MITRA, S. K., *An introduction to some nonparametric generalizations of analysis of variance and multivariate analysis.* Biometrika, **43**, 361 (1956).
184. SCHEFFÉ, H., *A useful convergence theorem for probability distribution.* Ann. Math. Statist., **18**, 434–438 (1947).
185. SCHEFFÉ, H., *Practical solutions to the Behrens-Fisher problem.* J. Am. Statist. Ass., **65**, 1501–1508 (1970).
186. SCHMETTERER, L., *Some remarks on the power of a most powerful test.* Sankhya., **25**, 207–210 (1963).
187. SCHMETTERER, L., *Introduction to Mathematical Statistics.* Springer-Verlag. Berlin–Heidelberg–New York, 1974.
188. SEN P. K., *On the robust-efficiency of the combination of independent nonparametric tests.* Ann. Inst. Statist. Math. Tokyo, **22**, 377–381 (1970).
189. SEVERO, N. C., *Asymptotic behavior of tests on the mean of a logarithmico-normal distribution with known variance.* Ann. Math. Statist., **28** (1957).
190. SEVERO, N. C., OLDS, E. G., *A comparison of tests, on the mean of a logarithmico-normal distribution with known variance.* Ann. Math. Statist., **27**, 670–686 (1956).
191. SHORACK, ROGER, A., *Recursive generation of the distribution of the Mann-Whitney-Wilcoxon U -statistic under generalized Lehmann alternative.* Ann. Math. Statist., **37**, 284–287 (1966).
192. SIEVERS, G. L., *On the probability of large deviations and exact slopes.* Ann. Math. Statist., **40**, 1908–1921 (1969).
193. SIMAIKA, J. B., *On an optimum property of two important statistical tests.* Biometrika, **32**, 70–80 (1941).
194. STEVENS, W. L., *Distributions of groups in a sequence of alternatives.* Ann. Eugen., **9**, 10–17 (1939).
195. SUGIURA, N., *Asymptotic expansion of the distributions of the likelihood ratio criteria for covariance matrix.* Ann. Math. Statist., **40**, 6, 2051–2063 (1969).
196. SUGIURA, N., *Locally best invariant test for sphericity and the limiting distributions.* Ann. Math. Statist., **43**, 1312–1316. (1972).
197. SUGIURA, N., *Asymptotic non-null distributions of the likelihood ratio criteria for covariance matrix under local alternatives.* Ann. Statist., **1**, 718–729 (1973).
198. SUGIURA, N., NAGAO, H., *Unbiasedness of some test criteria for the equality of one or two covariance matrices.* Ann. Math. Statist., **39**, 5, 1686–1692 (1968).
199. SUGIURA, N., NAGAO, H., *On Bartlett's test and Lehmann's test for homogeneity of variances.* Ann. Math. Statist., **40**, 2018–2033 (1969).
200. SWED, F. S., EISENHART, C., *Tables for testing randomness of grouping in a sequence of alternative.* Ann. Math. Statist., **14**, 66–87 (1943).
201. TANG, P. C., *The power function of the analysis of variance tests with tables and illustrations of their use.* Stat. Res. Mem., **3**, 126–149 (1938).

202. TOCHER, K. D., *Extension of the Neyman-Pearson theory of tests to discontinuous variates*. Biometrika, **37**, 130—144 (1950).
203. TUCKER, H. G., *An introduction to probability and mathematical statistics*. Academic Press, Textbooks in Mathematics, New York 1962.
204. TSUTAKAWA, R. K., *An example of large discrepancy between measures of asymptotic efficiency of tests*. Ann. Math. Statist., **39**, 179—182 (1968).
205. USPENSKY, J. V., *Introduction to Mathematical Probability*. Mc. Graw-Hill, New York, 1937.
206. VAN DER VAART, H. R., *Some remarks on the power function of Wilcoxon's test for the problem of two samples*. Proc. Royal Inst. Acad. Sci. A. I. **53**, 494 (1950), II. **53**, 507 (1950).
207. VESSEREAU, A., *Sur les conditions d'application de critérium χ^2 de Pearson*. Rev. Stat Appl., **6**, 2, 83 (1958).
208. VAN der WAERDEN, B. L., *Order tests for the two sample Problem and their power*, I, II, III Indagationes Math. **14** [Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap **55**], 453—458; Indag. **15** [Proc. **56**], 303—310, 311—316 corectie, Indag. **15** [Proc. **56**], 1952., 1953.
209. VAN DER WAERDEN, B. L., *Ein neuer Test für das Problem der zwei Stichproben*. Math. Ann., **126**, 93—107 (1953).
210. VAN DER WAERDEN, B. L., NIEVERGETT, E., *Tafeln zum Vergleich zweier Stichproben mittels X-Test und Zeichentest*. Springer-Verlag, 1956.
211. VAN DER WAERDEN, B. L., *Mathematische Statistik*. Springer-Verlag, Berlin, 1957.
212. WALD, A., *Asymptotically most powerful tests of statistical hypotheses*. Ann. Math. Stat., **12**, 1—19 (1941 a).
213. WALD, A., *Some examples of asymptotically most powerful tests*. Ann. Math. Statist., **12**, 396—408 (1941 b).
214. WALD, A., *Notes on the Theory of Statistical Estimation and Testing Hypotheses*. Columbia University. Mimeographed New York 1941 c.
215. WALD, A., *Tests of statistical hypotheses concerning several parameters when the number of observations is large*. Trans. Amer. Math. Soc., **54**, 462—482 (1943).
216. WALD, A., *Testing the difference between the means of two normal populations with unknown standard deviations*. Selected Papers in Statistics and Probability. Mc Graw-Hill, New York, 669—695, 1955.
217. WALD, A., WOLFOWITZ, J., *On a test whether two sample are from the same population*. Ann. Math. Stat., **11**, 147—162 (1940).
218. WALLIS, W. A., *Compounding probabilities from independent significance tests*. Econometrica, **10**, 229—248 (1942).
219. WATSON, G. S., *On chi-square goodness — of-fit tests for continuous distributions*. J. R. Statist. Soc., **B**, **20**, 44 (1958).
220. WATSON, G. S., *Some recent results in chi-square goodness-of-fit tests*. Biometrics, **15**, 440 (1959).
221. WELCH, B. L., *The significance of the difference between two means when the population variances are unequal*. Biometrika, **29**, 350—362 (1937).
222. WELCH, B. L., *The generalization of Student's problem when several different population variances are involved*. Biometrika, **34**, 28—35 (1947).
223. WILCOXON, F., *Individual comparisons by ranking methods*. Biometrics, **1**, 80—83 (1945).
224. WILKS, S. S., *The large sample distribution of the likelihood ratio for testing composite hypotheses*. Ann. Math. Statist., **9**, 60—62 (1938).
225. WILKS, S. S., *Mathematical Statistics*. Wiley, New York, 1962.
226. WILLIAMS, C. A., *On the choice of the number and width of classes for the chi-square test of goodness of fit*. J. Amer. Stat. Ass., **45**, 77 (1950).
227. WITTING, H., *A generalized Pitman efficiency for nonparametric tests*. Ann. Math. Statist., **31**, 405—414 (1960).
228. WOLFOWITZ, J., *Additive partition functions and a class of statistical hypotheses*. Ann. Math. Statist., **13**, 247 (1942).
229. WOLFOWITZ, J., *Asymptotic Distribution of Runs Up and Down*. Ann. Math. Statist., **15**, 163—172 (1944 a).
230. WOLFOWITZ, J., *Note on Runs of Consecutive Elements*. Ann. Math. Statist., **15**, 97—98 (1944 b).
231. WOODWORTH, G. G., *Large deviations and Bahadur efficiency of linear rank statistics*. Ann. Math. Statist., **41**, 251—263 (1970).
232. YATES, F., *Contingency tables involving small numbers and the χ^2 — test*. J. R. Statist. Soc. Suppl., **1**, 217—235 (1934).
233. VAN DER WAERDEN, B. L., *On the efficiency of the Wilcoxon-Smirnov tests*. Ann. Math. Statist., **42**, 1595—

Redactor : LUMINIȚA ZORILESCU
Tehnoredactor : MELUȘ TUREAC

*Bun de tipar 16.V.1977. Tiraj 2670 ex.
Format 16/70 × 100. Coli de tipar 25,5.
C. Z. pentru biblioteci mari : 519.2(021) = 59
C. Z. pentru biblioteci mici : 519.2*



cd. 96 I. P. INFORMAȚIA
Str. Brezoianu nr. 23—25,
București